

УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕТКОЙ ХОПФИОНОВ В ГЕЛИМАГНЕТИКЕ ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И АНИЗОТРОПИИ

К. Л. Метлов*, А. С. Тарасенко, Ю. А. Безус, М. М. Гордей

Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина
283048, Донецк, ДНР, Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 2025 г.,
после переработки 30 апреля 2025 г.
Принята к публикации 10 мая 2025 г.

Рассмотрено обобщение микромагнитной модели хопфионов в гелимагнетике с двумерной (допускающей как радиальную, так и азимутальную зависимость) функцией профиля. Расчеты подтверждают эллиптическую стабильность хопфионов и ранее полученное аналитическое выражение для верхнего критического поля их решетки. Показано, что в анизотропном гелимагнетике решетка хопфионов испытывает растяжение в направлении оси анизотропии, а ее периоды зависят от величины приложенного внешнего магнитного поля и константы одноосной анизотропии материала.

DOI: 10.31857/S0044451025080103

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитные топологические солитоны [1] играют ключевую роль практически во всех приложениях магнетизма: от сердечников трансформаторов, сенсоров, магнитных пластин в жестких дисках до твердотельной магнитной памяти и наномасштабных генераторов микроволн. С точки зрения топологии, все они соответствуют непрерывным отображениям сферы на сферу. При этом целевая сфера — всегда S^2 , на которой лежат концы векторов локальной намагниченности фиксированной длины $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_S$. Исходная же сфера является отображением физического пространства $\mathbf{r}$ с наложенными периодическими граничными условиями в бесконечности. Известно, что в одном ($S^1 \rightarrow S^2$) и в двух ($S^2 \rightarrow S^2$ [2]) измерениях такие отображения распадаются на гомотопические классы, пронумерованные целыми числами. Так, в векторном поле намагниченности возникают дискретные локализованные объекты (доменные границы [3], цилиндрические магнитные домены [4], скирмионы [5], магнитные вихри [6, 7]), а номер класса играет роль количества этих топологических солитонов.

Долгое время в математике считалось, что все отображения $S^3 \rightarrow S^2$ гомотопически эквивалент-

ны (что означало бы невозможность существования трехмерных топологических солитонов). Однако в 1931 г. Хопф привел пример отображения [8], не сводящегося ко всем остальным. Этот пример был обобщен Уайтхедом [9], который показал, что и в этом случае отображения распадаются на пронумерованные целыми числами гомотопические классы, ввел соответствующий индекс Хопфа $\mathcal{H}$ (оригинальный контрпример [8] имеет $\mathcal{H} = 1$) и построил отображения с произвольными $\mathcal{H}$. Идея поиска соответствующих этим отображениям солитонов в физике была высказана Фаддеевым [10], а конкретно в векторных полях локальной намагниченности ферромагнетиков Дзялошинским и Ивановым [11]. Но эта идея так и не реализовалась тогда в магнетизме в силу теоремы Хобарта–Деррика [12, 13], доказавших нестабильность трехмерных солитонов в классическом ферромагнетике.

В последние годы наблюдается новый всплеск интереса к трехмерным топологическим солитонам [14] в киральных магнетиках (выходящих за пределы применимости [15] теоремы Хобарта–Деррика). Это связано с развитием методов наблюдения распределений намагниченности на наномасштабах, таких как рентгеновская микроскопия высокого разрешения [16], векторная магнитная нанотомография [17] и магнитное малоугловое рассеяние нейтронов [18], для которых магнитные хопфионы были бы идеальным объектом исследований. Стимулом так-

* E-mail: metlov@donfti.ru

же является потенциал применения хопфионов в трехмерной спинтронике [14, 15, 19].

Появились первые экспериментальные наблюдения хопфионов и хопфион-подобных состояний в ограниченной геометрии [16, 20, 21]. Они также воспроизводятся качественно и в численных экспериментах [14, 22–25]. Тем не менее это не свободно стоящие объемные хопфионы, а их существование зависит от внешней стабилизации и удержания. Обычно это достигается путем помещения хопфион-содержащей пленки между двумя магнитными слоями с сильной перпендикулярной магнитной анизотропией [23]. Но все же истинный потенциал хопфионов может быть реализован только в полностью трехмерном «объемном» окружении.

Нашей отправной точкой здесь является вариационная модель объемных хопфионов в гелимагнетике [26] на базе стандартного микромагнитного гамильтониана с учетом взаимодействия Дзялошинского–Мория (ДМ). Она предсказывает существование двух (топологически эквивалентных) типов магнитных хопфионов. Причем [27] один из них является стабильным относительно эллиптической деформации, а второй — нет. Хопфионы второго типа стремятся безгранично расширяться вдоль направления внешнего магнитного поля, сохраняя стабильный размер в перпендикулярном направлении. Это расширение можно остановить, вводя в систему слой с повышенной одноосной магнитной анизотропией [23]. Хопфионы же первого типа такой искусственной стабилизации не требуют.

В настоящей работе мы обобщили модель [27], введя в пробную функцию дополнительное измерение (соответствующее дополнительному бесконечному набору вариационных параметров). Такая расширенная модель в пределе сводится к исходной, но по определению (за счет большего количества свободных параметров) дает лучшее приближение к энергии точного решения. Проведена численная оценка верхнего критического поля хопфионной решетки, которое оказалось в полном (с учетом численной погрешности) согласии с полученным ранее аналитическим выражением [27]. Рассмотренная расширенная модель также позволяет «отвязать» внутреннюю структуру хопфиона от его внешнего контура, а значит, открывает возможность моделирования контактного (обменного, поскольку взаимодействие ДМ тоже является его частью) расталкивания между хопфионами в решетке. Это позволило исследовать влияние внешнего поля и анизотропии на параметры (периоды) равновесной решетки хопфионов.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим классический гелимагнетик со свободной энергией на единицу объема

$$E = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V F d^3\mathbf{r}$$

с плотностью

$$F = \frac{C}{2} \sum_{i=X,Y,Z} |\nabla m_i|^2 + D \mathbf{m} \cdot [\nabla \times \mathbf{m}] - \mu_0 M_S (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) - K (\mathbf{m} \cdot \mathbf{s})^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r})/M_S$, $|\mathbf{m}| = 1$, $C = 2A$ [Дж/м] — обменная жесткость, D [Дж/м²] — параметр взаимодействия ДМ [28, 29], K [Дж/м³] — константа одноосной (направленной вдоль $\mathbf{s}$) анизотропии, $\mathbf{H}$ [А/м] — внешнее магнитное поле, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — проницаемость вакуума. Для простоты предположим, что поле и ось анизотропии параллельны, и выберем декартову систему координат так, что это направление совпадает с осью Z : $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$, $\mathbf{s} = \{0, 0, 1\}$. Задача теперь состоит в том, чтобы найти векторное поле $\mathbf{m}(\mathbf{r})$, которое минимизирует E и имеет $\mathcal{H} > 0$.

Точное решение данной задачи на сегодня не известно. Поэтому воспользуемся методом Ритца, выбрав в качестве отправной точки следующую пробную функцию для векторного поля намагниченности:

$$\{m_X + im_Y, m_Z\} = \{2w, 1 - |w|^2\}/(1 + |w|^2), \quad (2a)$$

$$w = iu/v, \quad (2b)$$

$$u = \frac{2(\tilde{X} + i\tilde{Y})R}{\tilde{r}^2 + R^2}, \quad v = \frac{R^2 - \tilde{r}^2 + i2\tilde{Z}R}{\tilde{r}^2 + R^2}, \quad (2c)$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = R \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{e}{1 - e}, \quad e = e\left(\frac{r}{R}, \arctg \frac{Z}{\sqrt{r^2 - Z^2}}\right), \quad (2d)$$

$$\mathbf{r} = \{X, Y, \gamma Z\}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}\}, \quad \tilde{r} = |\tilde{\mathbf{r}}|.$$

Она определяет поле $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ с индексом Хопфа $\mathcal{H} = 1$, параметризованное (пока неизвестной) функцией профиля $e(\rho, \theta)$, $\rho = r/R$, удовлетворяющей граничным условиям $e(0, \theta) = 0$, $e(1, \theta) = 1$, и двумя скалярными параметрами — радиусом хопфиона R и фактором формы (отношению размера в направлении, перпендикулярном магнитному полю, к размеру в направлении поля) γ . Хопфион полностью содержится внутри эллипсоида $\rho < 1$, а на его границе ($\rho = 1$) имеется намагниченность $\mathbf{m} = \{0, 0, 1\}$, которая совпадает с намагниченностью снаружи хопфиона. Когда $|\gamma| < 1$, эллипсоид вытянут вдоль оси Z .

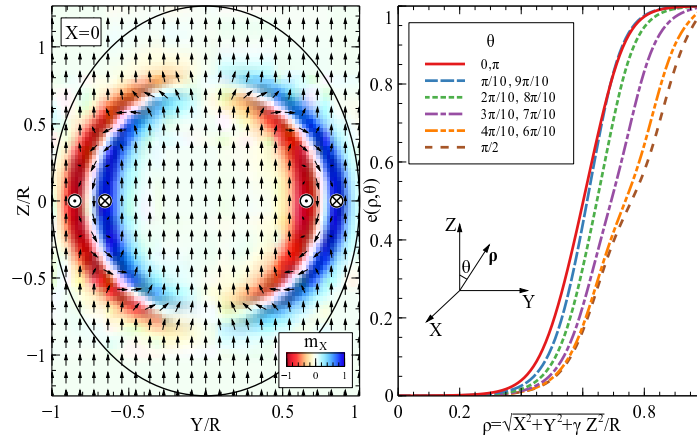


Рис. 1. Сечение распределения намагниченности (слева) и некоторые срезы функции профиля $e(x, \theta)$ (справа) равновесного хопфиона с $\mathcal{H} = 1$ (его общая киральность соответствует материалу с $D < 0$) при $q = 1$ и $h = 0.1$

Ключевым в этой пробной функции является анзац Уайтхеда (2b), который записан здесь в частном случае $\mathcal{H} = 1$. В общем случае [9] этот анзац имеет вид $w = iu^m/v^n$, где n и m — взаимно простые целые числа, что соответствует распределениям намагниченности с индексом Хопфа $\mathcal{H} = mn$. Множитель i в (2b) выбирает первый из двух типов хопфионов [26] (хопфионы второго типа соответствуют множителю $-i$ и требуют дополнительной стабилизации, компенсирующей их эллиптическую нестабильность [27]). Хопфионы с $\mathcal{H} = 1$ являются аксиально симметричными относительно оси Z и состоят из круговых, обернутых вокруг оси Z , вихревой и антивихревой нитей с противоположной намагниченностью в центрах их ядер. У рассмотренных здесь хопфионов первого типа внешняя антивихревая нить обернута вокруг внутренней вихревой, как показано на рис. 1 слева. У хопфионов второго типа порядок нитей меняется на противоположный. Анзац Уайтхеда (2b) определяет отображение сферы S^3 , параметризованной двумя комплексными координатами u и v (такими что $|u|^2 + |v|^2 = 1$), на сферу Римана S^2 , параметризованную комплексной координатой w . Формулы (2c) выражают u и v в терминах координат в расширенном евклидовом пространстве $\{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}\}$, а стереографическая проекция (2a) связывает w с компонентами вектора намагниченности фиксированной длины $|\mathbf{m}| = 1$. Все вместе уравнения (2a), (2b), (2c) определяют векторное поле $\mathbf{m}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$, содержащее один $\mathcal{H} = 1$ хопфион, заполняющий все пространство $\tilde{\mathbf{r}}$ целиком. Эти формулы универсальны в том смысле, что любые $\mathcal{H} = 1$ хопфионы (не только магнитные) обязательно сводятся к ним некоторым непрерывным отображением (гомотопией).

Основные приближения рассматриваемой модели содержатся в уравнении (2d), задающем отображение физического пространства $\{X, Y, Z\}$ на расширенное евклидово пространство $\{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}\}$. Оно полностью локализует хопфион внутри эллипсоида $\rho < 1$, отображая (за счет граничного условия $e(1, \theta) = 1$) точки на границе $\rho = 1$ в бесконечно удаленную точку пространства $\tilde{\mathbf{r}}$, где вектор намагниченности $\mathbf{m} = \{0, 0, 1\}$ направлен параллельно оси Z . Появление e в числителе (2d) улучшает оригинальную вариационную модель [26] и обсуждается в [27]. Ключевым отличием вариационной модели в данной работе является учет возможной азимутальной зависимости профиля $e(\rho, \theta)$ хопфиона, в то время как в более ранних исследованиях профиль считался не зависящим от θ .

Предположим теперь, что такие локализованные хопфионы выстроены в бесконечную трехмерную плотноупакованную решетку (FCC или НСР) с объемом $V = 4\sqrt{2}R^3\gamma$, приходящимся на один хопфион. При том, что каждый хопфион в отдельности имеет $\mathcal{H} = 1$, индекс Хопфа решетки в целом равен бесконечности. Полную нормированную на D^2/C энергию единицы ее объема можно представить в виде

$$EC/D^2 = \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{F} d\theta d\rho,$$

где

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\kappa} \left[\nu^2 p_{EX} + \nu p_{DM} + \frac{q}{2} (p_A - \kappa) + h(p_Z - \kappa) \right], \quad (3)$$

где $\kappa = 4\sqrt{2}$, $\nu = C/(DR)$ — безразмерный параметр, обратно пропорциональный размеру хопфиона R , $h = \mu_0 M_S C H / D^2$ — нормированное внешнее

поле, $q = 2CK/D^2$ — нормированный фактор качества одноосной анизотропии. Выражения для функций p_{EX} , p_{DM} , p_A и p_Z даны в Приложении. Энергия E является функционалом от профиля хопфиона $e(\rho, \theta)$ и зависит от двух дополнительных безразмерных скалярных параметров — ν и γ .

Минимизация энергии E в данной работе проводилась численно в два этапа. На первом этапе методом конечных элементов рассчитывался равновесный профиль хопфиона $e(\rho, \theta)$ при заданных q , h , ν и γ как решение уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_\rho} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_\theta} = 0, \quad (4)$$

где $e_\rho = \partial e(\rho, \theta)/\partial \rho$, $e_\theta = \partial e(\rho, \theta)/\partial \theta$ с граничными условиями $e(0, \theta) = 0$, $e(1, \theta) = 1$. Для этого использовалась функция `NDSolve‘FEM’` системы компьютерной алгебры Mathematica™. Для стабилизации численного счета в уравнение Эйлера–Лагранжа вводился дополнительный диффузионный член $0.0025(\partial^2 e/\partial \rho^2 + \partial^2 e/\partial \theta^2)$, который практически не влияет на значение энергии хопфиона, но хорошо подавляет высокочастотные численные флуктуации профиля около $e \approx 0$. Затем для полученного профиля вычислялась нормированная энергия EC/D^2 посредством прямого численного интегрирования (3) и минимизировалась численно при помощи функции `FindMinimum` по оставшимся двум скалярным параметрам ν и γ . Пример рассчитанного таким образом хопфиона и соответствующие функции профиля (для некоторых значений θ) приведены на рис. 1.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Уже на рис. 1 видна основная особенность рассмотренной модели, заключающаяся в том, что ядро хопфиона (область сильно неоднородной намагниченности) больше не привязано к его внешнему контуру $\rho = 1$ (показанному черным эллипсом на рис. 1 слева). Над и под ядром формируются области почти однородной намагниченности, но таким образом, что само ядро хопфиона (и этот эффект сохраняется для других q и h) сохраняет практически идеальную сферическую форму (притом, что внешний контур хопфиона приобретает значительную эллиптическую деформацию). Это находится в согласии с выводами, полученными в рамках более простой модели [27], и подтверждает вывод об эллиптической стабильности хопфионов.

В области $q > 0$, $h > 0$, когда хопфионы наиболее энергетически выгодны, их область стабильно-

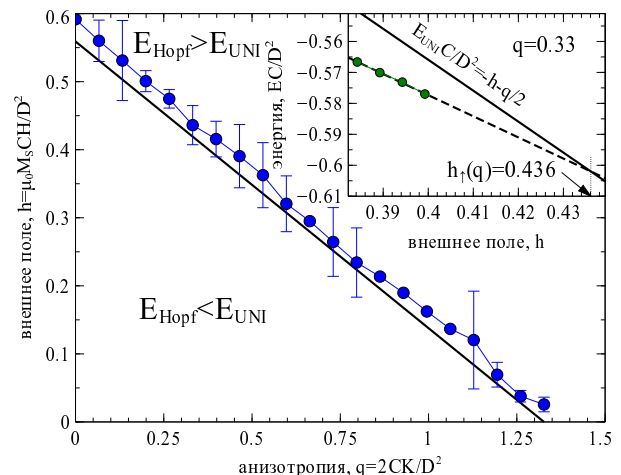


Рис. 2. Верхнее критическое поле решетки хопфионов, соответствующее ее переходу в состояние с однородной намагниченностью; вставка иллюстрирует процедуру экстраполяции на примере одной точки с $q = 0.33$

сти ограничена верхним критическим полем (обращающимся в нуль при некотором предельном значении фактора качества анизотропии q). В слабых (подкритических) внешних полях энергия равновесной решетки хопфионов ниже энергии состояния с однородной намагниченностью. На критической линии эти энергии становятся равны и происходит взаимное (безгистерезисное) превращение решетки хопфионов в состояние однородной намагниченности посредством фазового перехода второго рода.

При приближении к критической линии энергетический минимум для радиуса хопфиона превращается в седловую точку и исчезает, а сам радиус стремится к бесконечности (однородно намагниченное ядро хопфиона при этом расширяется и заполняет все пространство). Это значит, что численная процедура поиска минимума полной энергии хопфиона по ν и γ перестает работать вблизи критической линии. Тем не менее к ней можно подобрать достаточно близко, чтобы использовать линейную (по полю h) экстраполяцию энергии до точки, где энергия хопфионов становится в точности равной энергии состояния однородной намагниченности. Результаты этой экстраполяции показаны точками на рис. 2. Изображенные погрешности учитывают лишь статистический разброс использованных для экстраполяции при каждом значении q четырех точек. Сплошной линией на рис. 2 показано критическое поле, вычисленное по формуле

$$h_{\uparrow} = \frac{4(2 + \pi)(3\pi - 4)q - 15\pi^2}{60(\pi - 4)(2 + \pi)}, \quad (5)$$

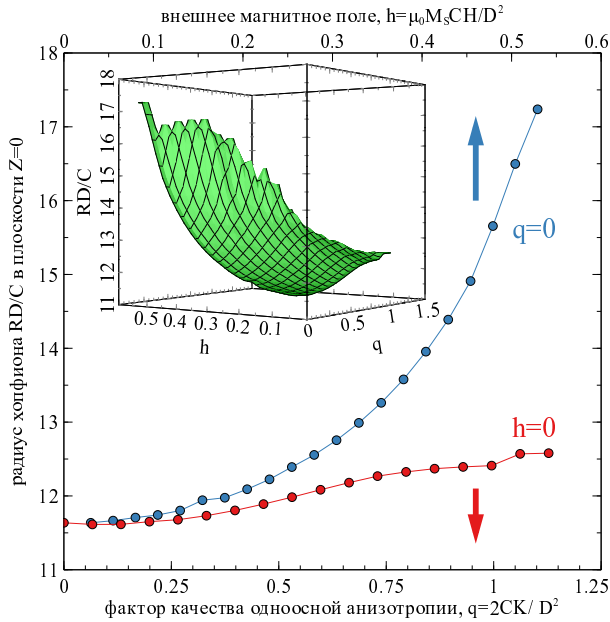


Рис. 3. Радиус хопфиона как функция приложенного магнитного поля и фактора качества одноосной анизотропии при $q = 0$ и $h = 0$; на вставке показан полный график во всей области стабильности хопфионов при $h > 0$, $q > 0$

полученной в [27]. Заметное систематическое превышение численной оценки критического поля, по-видимому, связано с дополнительно введенным в уравнение диффузионным членом. Но в целом можно сказать, что численная оценка критического поля находится в очень хорошем согласии с аналитической формулой. Учитывая, что такое согласие присутствует для трех разных моделей хопфионов: [26], [27] и нынешней — можно сказать, что оценка (5), если и не является точным результатом, то очень близка к нему.

Описанная в разд. 2 численная процедура позволяет вычислить равновесные значения параметров ν и γ во всей области стабильности хопфионов, показанной на рис. 2. Из них можно оценить влияние внешнего поля и анизотропии на радиус (в плоскости $Z = 0$), пропорциональный $1/\nu$, и высоту (размер в направлении поля), пропорциональную $1/(\gamma\nu)$, хопфиона. Эти зависимости изображены на рис. 3 и 4. Видно (особенно хорошо на графиках при $q = 0$), что изменение внешнего поля вызывает примерно одинаковое изменение радиуса и высоты хопфиона, а изменение фактора качества анизотропии на радиусе хопфиона практически не отражается (см. рис. 3 при $h = 0$), но сильно влияет на его высоту (см. рис. 4 при $h = 0$). Сам хопфион (та его область, где намагниченность существенно от-

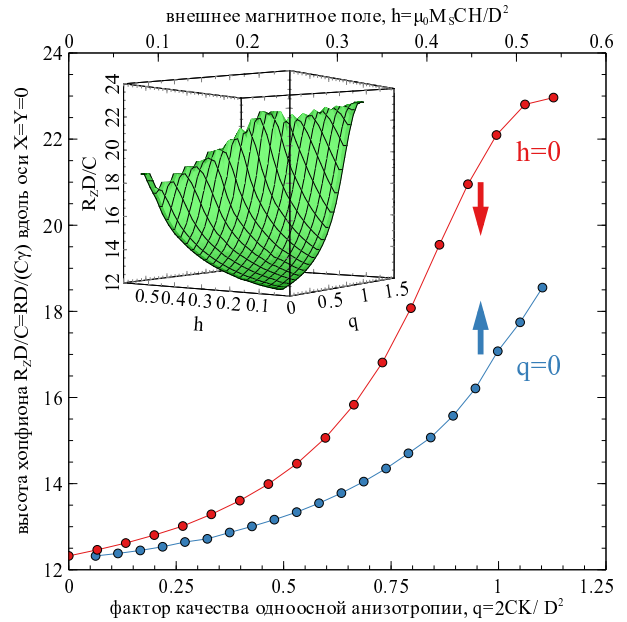


Рис. 4. Высота хопфиона как функция приложенного магнитного поля и фактора качества одноосной анизотропии; композиция графика идентична рис. 3

клоняется от однородной) сохраняет почти идеальную сферическую форму, меняется лишь его внешний контур (показан эллипсом на рис. 1). Тем не менее даже малые отклонения намагниченности внутри контура хопфиона от идеальной вертикальной ($\mathbf{m} = \{0, 0, 1\}$ за его пределами) производят обменные силы, препятствующие сближению хопфионов.

Поскольку энергия стабильного хопфиона ниже энергии однородно намагниченного состояния, решетка хопфионов будет плотно упакованной, чтобы минимизировать пространство (с однородной намагниченностью) между ними. Задача о плотной упаковке эллипсоидов имеет ряд нетривиальных решений [30], не сводящихся к перемасштабированной решетке плотноупакованных сфер. Однако во всех этих необычных случаях эллипсоиды не являются соосными. Хопфионы же в отсутствие анизотропии имеют почти идеальную сферическую форму и приобретают заметное эллиптическое искажение только в анизотропном магнетике. Но эта же анизотропия навязывает им выделенное направление, а значит, мешает реализации более сложных плотноупакованных состояний [30].

В целом, это означает, что внешнее поле однородно масштабирует решетку плотноупакованных сфер (и размеры каждого хопфиона в отдельности), а наличие одноосной анизотропии деформирует ее сильнее в одном направлении. Такое растяжение решетки

ки хопфионов в анизотропном гелимагнетике неизбежно проявится при наблюдении ее дифракционными методами, например в нейтронографии [18].

4. ВЫВОДЫ

В работе представлено обобщение модели [27] магнитных хопфионов в гелимагнетике, допускающее азимутальную зависимость их функции профиля. Показано, что, несмотря на дополнительные степени свободы, хопфионы (первого типа [26]) остаются эллиптически стабильными и сохраняют практически идеальную сферическую форму. Рассчитано верхнее критическое поле решетки $h_{\uparrow}$, соответствующее ее переходу (второго рода) в состояние с однородной намагниченностью. Численные расчеты в рамках настоящей расширенной модели подтверждают ранее полученное в [27] аналитическое выражение (5) для этого критического поля. Рассчитаны зависимости размеров (радиуса в плоскости $Z = 0$ и высоты вдоль линии $X = Y = 0$) хопфиона как функции внешних параметров — нормированных внешнего поля h и фактора качества анизотропии q . Показано, что увеличение внешнего поля примерно одинаково перемасштабирует все периоды решетки и размер отдельных хопфионов, в то время как одноосная анизотропия заставляет хопфионы вытягиваться вдоль своей оси ($X = Y = 0$) и приводит к соответствующему растяжению равновесной решетки хопфионов.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 25-22-00076.)

ПРИЛОЖЕНИЕ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Путем подстановки пробной функции (2) в выражение для свободной энергии (1), интегрирования по полярному углу и перенормировки на объем, занимаемый одним хопфионом в решетке, полную нормированную энергию на единицу объема EC/D^2 можно представить в виде интеграла от (3). Вводя сокращенные обозначения для функции профиля и ее производных

$$e = e(\rho, \theta), \quad e_\rho = \partial e(\rho, \theta)/\partial \rho, \quad e_\theta = \partial e(\rho, \theta)/\partial \theta,$$

входящие в (3) энергетические функции p_{EX} , p_{DM} , p_A и p_Z можно представить следующим образом.

Для обменной энергии:

$$p_{EX} = \frac{4\pi \sin \theta}{1 + \cos \alpha} \left[\frac{b_{EX,0}}{(1-2p)^4} + \frac{b_{EX,1}e_\theta}{(1-2p)^3} + \frac{b_{EX,2}e_\theta^2}{(1-2p)^2} \right],$$

где $p = e(1-e)$, $\gamma = \text{tg}(\alpha/2)$,

$$b_{EX,0} = c_{EX,0} + c_{EX,1} \cos 2\theta + c_{EX,2} \cos 4\theta,$$

$$c_{EX,0} = d_{EX,0} + d_{EX,1} \cos \alpha,$$

$$d_{EX,0} = 2(1-2p)^2 (\rho^2 e_\rho^2 + 3p^2),$$

$$d_{EX,1} = (1-2p)^2 \rho^2 e_\rho^2 + 2(1-2e(e(2e-3)+2))p\rho e_\rho + (4p(2p-5)+5)p^2,$$

$$c_{EX,1} = d_{EX,2} + d_{EX,3} \cos \alpha,$$

$$d_{EX,2} = 2(1-2p)^2 (p - \rho e_\rho) (\rho e_\rho + p),$$

$$d_{EX,3} = 2(-(1-2p)^2 \rho^2 e_\rho^2 + 4(3p-1)p^3 + p^2),$$

$$c_{EX,2} = (2p\rho e_\rho - 2ep - \rho e_\rho + p)^2 \cos \alpha,$$

$$b_{EX,1} = c_{EX,3} \sin 2\theta + c_{EX,4} \sin 4\theta,$$

$$c_{EX,3} = 4((1-2p)\rho e_\rho \cos \alpha - 2ep + p),$$

$$c_{EX,4} = 2(2p\rho e_\rho - 2ep - \rho e_\rho + p) \cos \alpha,$$

$$b_{EX,2} = -4(2p-1)(\cos \alpha \cos 2\theta + 1) \sin^2 \theta.$$

Для взаимодействия ДМ:

$$p_{DM} = 4\pi \rho \sin \theta \left[\frac{b_{EX,3}}{(1-2p)^4} + \frac{b_{EX,4}e_\theta}{(1-2p)^3} \right],$$

$$b_{EX,3} = c_{EX,5} + c_{EX,6} \cos 2\theta + c_{EX,7} \cos 4\theta,$$

$$c_{EX,5} = ((2p(\gamma p + p - 2) + 1)(\rho e_\rho - p(2\rho e_\rho + 6e - 3))),$$

$$c_{EX,6} = p(2e(4p((2\gamma - 3)p + 1) - 1) + 4p(p(-2\gamma + 2\rho e_\rho + 3) - 3\rho e_\rho - 1) + 6\rho e_\rho + 1) - \rho e_\rho,$$

$$c_{EX,7} = 2(\gamma - 1)p^2(2p\rho e_\rho - 2ep - \rho e_\rho + p),$$

$$b_{EX,3} = (2p-1)(4p(\gamma p + 1) - 1) \sin 2\theta + 2p^2(\gamma - 2(\gamma - 1)p - 1) \sin 4\theta.$$

И, наконец, для энергии магнитной анизотропии и зеемановской энергии:

$$p_A = 2\pi \rho^2 \sin \theta \left(1 - \frac{(1 - 4p(1 - p \cos 2\theta))^2}{(1-2p)^4} \right),$$

$$p_Z = \frac{16\pi \rho^2 \sin^3 \theta}{(1-2p)^2},$$

которые не зависят ни от γ , ни от производных функции профиля.

Если в каждой из этих функций положить $e_\theta = 0$ и проинтегрировать по $\theta \in [0, \pi]$, получившиеся выражения в точности совпадут с соответствующими функциями для более простой модели [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наук. думка, Киев (1983).
2. А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика*, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
3. А. Хуберт, *Теория доменных стенок в упорядоченных средах*, Мир, Москва (1977).
4. В. Г. Барьяхтар, Ю. И. Горобец, *Цилиндрические магнитные домены и их решетки*, Наук. думка, Киев (1988).
5. А. Н. Богданов, Д. А. Яблонский, *Термодинамически устойчивые вихри в магнитоупорядоченных кристаллах*, ЖЭТФ **95**, 178 (1989).
6. N. A. Usov and S. E. Peschany, *Magnetization Curling in a Fine Cylindrical Particle*, J. Magn. Magn. Mater. **118**, L290 (1993).
7. K. L. Metlov, *Magnetization Patterns in Ferromagnetic Nano-Elements as Functions of Complex Variable*, Phys. Rev. Lett. **105**, 107201 (2010).
8. H. Hopf, *Über die Abbildungen der Dreidimensionalen Sphere auf die Kugelfläche*, Math. Ann. **104**, 637 (1931).
9. J. H. C. Whitehead, *An Expression of Hopf's Invariant as an Integral*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **33**, 117 (1947).
10. L. D. Faddeev, *Some Comments on the Many-Dimensional Solitons*, Lett. Math. Phys. **1**, 289 (1976).
11. И. Е. Дзялошинский, Б. А. Иванов, *Локализованные топологические солитоны в ферромагнетике*, Письма в ЖЭТФ **29**, 592 (1979).
12. R. H. Hobart, *On the Instability of a Class of Unitary Field Models*, Proc. Phys. Soc. **82**, 201 (1963).
13. G. H. Derrick, *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
14. F. N. Rybakov, N. S. Kiselev, A. B. Borisov et al., *Magnetic Hopfions in Solids*, APL Mater. **10**, 111113 (2022).
15. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 2, УРО РАН, Екатеринбург (2011).
16. N. Kent, N. Reynolds, D. Raftrey et al., *Creation and Observation of Hopfions in Magnetic Multilayer Systems*, Nat. Commun. **12**, 1562 (2021).
17. C. Donnelly, K. L. Metlov, V. Scagnoli et al., *Experimental Observation of Vortex Rings in a Bulk Magnet*, Nat. Phys. **17**, 316 (2021).
18. K. L. Metlov and A. Michels, *Small-Angle Neutron Scattering Signatures of Magnetic Hopfions*, Phys. Rev. B **109** (2024).
19. G. Gubbiotti, A. Barman, S. Ladak et al., *2025 Roadmap on 3d Nanomagnetism*, J. Phys.: Cond. Matt. **37**, 143502 (2025).
20. F. Zheng, N. S. Kiselev, F. N. Rybakov et al., *Hopfion Rings in a Cubic Chiral Magnet*, Nature **623**, 718 (2023).
21. X. Yu, Y. Liu, K. V. Iakoubovskii et al., *Realization and Current-Driven Dynamics of Fractional Hopfions and Their Ensembles in a Helimagnet FeGe*, Adv. Mater. **35** (2023).
22. Y. Liu, R. K. Lake, and J. Zang, *Binding a Hopfion in a Chiral Magnet Nanodisk*, Phys. Rev. B **98**, 174437 (2018).
23. J.-S. B. Tai and I. I. Smalyukh, *Static Hopf Solitons and Knotted Emergent Fields in Solid-State Noncentrosymmetric Magnetic Nanostructures*, Phys. Rev. Lett. **121**, 187201 (2018).
24. P. Sutcliffe, *Hopfions in Chiral Magnets*, J. Phys. A: Math. Theor. **51**, 375401 (2018).
25. X. S. Wang, A. Qaiumzadeh, and A. Brataas, *Current-Driven Dynamics of Magnetic Hopfions*, Phys. Rev. Lett. **123**, 147203 (2019).
26. K. L. Metlov, *Two Types of Metastable Hopfions in Bulk Magnets*, Physica D **443**, 133561 (2023).
27. K. L. Metlov, *Elliptical Stability of Hopfions in Bulk Helimagnets*, Phys. Rev. B **111**, 174450 (2025). DOI: 10.1103/PhysRevB.111.174450.
28. V. G. Baryakhtar and E. P. Stefanovsky, *Spin Wave Spectrum in Antiferromagnets Having a Spiral Magnetic Structure*, Sov. Phys. Solid State **11**, 1566 (1970).
29. P. Bak and M. H. Jensen, *Theory of Helical Magnetic Structures and Phase Transitions in MnSi and FeGe*, J. Phys. C **13**, L881 (1980).
30. A. Donev, F. H. Stillinger, P. M. Chaikin, and S. Torquato, *Unusually Dense Crystal Packings of Ellipsoids*, Phys. Rev. Lett. **92**, 255506 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.255506