

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ СТАБИЛИЗАЦИИ ДАЛЬНОГО ПОРЯДКА В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛАХ

А.А. Фраерман ^{а*}

^а *Институт физики микроструктур Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 21 января 2025 г.,
после переработки 1 апреля 2025 г.
Принята к публикации 28 апреля 2025 г.

Теоретически исследовано влияние магнитострикции на статические флуктуации магнитного момента в ферромагнитных поликристаллах. Найдены условия, при которых магнитоупругое взаимодействие приводит к стабилизации дальнего магнитного порядка в этих системах.

DOI: 10.31857/S0044451025080085

1. ВВЕДЕНИЕ

Ферромагнитные поликристаллы представляют собой широкий класс материалов, имеющих разнообразные применения. Их магнитные свойства зависят от распределения кристаллитов по размерам и ориентациям и могут существенно отличаться от свойств монокристаллов того же химического состава. Сам вопрос о существовании дальнего магнитного порядка в поликристаллах является нетривиальным. Утверждается, что в поликристалле, не имеющем выделенной ориентации в распределении кристаллографических осей кристаллитов, магнитный дальний порядок отсутствует. Намагниченность разрушается статическими флуктуациями в ориентации осей магнитной анизотропии, непосредственно связанных с ориентацией кристаллографических осей в кристаллитах. В подтверждение этого утверждения приводятся аргументы, которые сводятся к следующему [1, 2]. Пусть в ферромагнитном поликристалле направление намагниченности меняется на масштабе $\sim L$. Тогда плотность обменной энергии, обусловленная этой неоднородностью, имеет величину $\varepsilon_{ex} \sim J/L^2$, где J — «обменная жесткость». Величина энергии анизотропии при случайном распределении осей кристаллитов $\varepsilon_a \sim -K/\sqrt{N}$, где K — плотность энергии ани-

зотропии, N — число кристаллитов в области с линейными размерами L , $N \sim (L/l_c)^d$, l_c — размер кристаллита, d — размерность пространства. Минимуму энергии $\varepsilon = \varepsilon_{ex} + \varepsilon_a$ соответствует длина $L_c \sim l_w(l_w/l_c)^{d/(4-d)}$, где $l_w = \sqrt{J/K}$ — толщина доменной стенки. Из этого рассмотрения следует, что дальний магнитный порядок в поликристалле отсутствует, а вместо него существует неоднородное распределение намагниченности, получившее название «рябь намагниченности» [3, 4]. Поле насыщения поликристалла оценивается как поле, необходимое для «выхода» из состояния «ряби намагниченности», и сильно зависит от соотношения размера кристаллита и толщины доменной стенки l_w ,

$$H_c \sim \frac{\varepsilon(L \rightarrow \infty) - \varepsilon(L = L_c)}{M_0} \sim K \left(\frac{l_c}{l_w} \right)^{2d/(4-d)}.$$

В обширной литературе, посвященной исследованию магнитных свойств ферромагнитных поликристаллов (см., например, обзор [5]), не обсуждается вопрос о возможности стабилизации дальнего порядка в этих системах за счет дальнедействующих магнитных взаимодействий, к которым относятся магнитоэлектрическое и магнитоупругое взаимодействия. Хорошо известен эффект стабилизации дальнего порядка в двумерных ферромагнетиках с вырожденным основным состоянием за счет магнитоэлектрического взаимодействия [6]. Изучался также вопрос о возникновении дальнего порядка в двумерных магнетиках из-за магнитоупругой связи [7]. В настоящей работе мы покажем, что магни-

* E-mail: andr@ipmras.ru

тоупругое взаимодействие может стабилизировать дальний порядок в поликристаллах. Рассмотренный здесь эффект является статическим аналогом явления «магнитоупругой щели», проявляющейся в динамике магнетиков [8]. Статья организована следующим образом. В разд. 2 сформулированы основные приближения и выписаны слагаемые, определяющие энергию системы. В разд. 3 рассмотрена задача о свободной деформации трехмерного поликристалла и найдены условия, при которых флуктуации намагниченности малы. В разд. 4 решена задача о флуктуациях намагниченности в тонкой пленке поликристалла, упруго связанной с немагнитной подложкой. В Заключение приведены оценки рассмотренного эффекта.

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

В ферромагнитном поликристалле компоненты тензора магнитокристаллической анизотропии являются случайными величинами, зависящими от координат [3]. Для одноосных кристаллитов плотность энергии анизотропии может быть представлена в виде

$$\varepsilon_a = -\frac{1}{2}K(n_i(\mathbf{r})M_i), \quad (1)$$

где $K > 0$ — константа анизотропии, $n_i(\mathbf{r})$ — компоненты случайного единичного вектора, определяющего ориентацию кристаллографических осей в поликристалле. Статистические свойства этого вектора считаются известными, M_i — компоненты вектора намагниченности, которые, вообще говоря, также случайны и зависят от координат. С неоднородным распределением намагниченности связан дополнительный обменный вклад в энергию, который мы представим в виде

$$\varepsilon_{ex} = -l^2 M_i \Delta M_i, \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, $l^2 \approx J/M_0^2$, M_0 — намагниченность насыщения. Распределение намагниченности M_i индуцирует поля рассеяния, с которыми связана магнитостатическая энергия

$$\varepsilon_m = -\frac{1}{2}H_i M_i, \quad (3)$$

где компоненты поля рассеяния H_i удовлетворяют уравнениям магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0.$$

Зависимость энергии поликристалла от деформаций определяется суммой упругой и магнитоупругой энергий:

$$\varepsilon_e + \varepsilon_{me} = \frac{1}{2}\lambda U_{ll}^2 + \mu U_{ik}^2 + \beta U_{ik} M_i M_k, \quad (4)$$

где

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

— тензор деформации, u_i — компоненты вектора смещений. Коэффициенты Ламэ λ и μ связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ соотношениями [9]

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Безразмерный коэффициент β определяет величину магнитоупругой связи. При записи энергии (4) мы пренебрегаем пространственными флуктуациями упругих и магнитоупругих модулей в поликристалле [10] и заменяем их средними по ориентациям кристаллитов значениями. Это позволяет значительно упростить задачу и свести ее к проблеме магнитоупругих деформаций в упругоизотропном материале. После дифференцирования (4) по U_{ik} получаем выражение для тензора напряжений

$$G_{ik} = \lambda U_{ll} \delta_{ik} + 2\mu U_{ik} + \beta M_i M_k, \quad (5)$$

δ_{ik} — единичный тензор. Вектор смещений определяется из уравнений равновесия

$$\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Представим намагниченность в виде суммы ее среднего значения $M_i^{(0)}$ и флуктуаций m_i :

$$M_i = M_i^{(0)} + m_i(\mathbf{r}), \quad M_i^{(0)} = M_0(1, 0, 0).$$

Предположим, что флуктуации малы. Тогда из условия сохранения модуля намагниченности имеем

$$m_i = \left(-\frac{1}{2M_0} (m_y^2 + m_z^2), m_y, m_z \right). \quad (6)$$

Ограничиваясь в выражениях для энергии (1)–(4) слагаемыми, квадратичными по флуктуациям, мы можем определить средний квадрат флуктуаций, обусловленных случайным распределением осей анизотропии. Выполнение условия малости поперечных флуктуаций по сравнению со средней намагниченностью $\langle m_y^2 + m_z^2 \rangle < M_0^2$ является необходимым условием существования дальнего магнитного порядка в поликристалле (угловые скобки означают усреднение по ориентациям и размерам кристаллитов). Далее мы рассмотрим случаи трехмерного поликристалла и тонкой поликристаллической пленки, упруго связанной с подложкой.

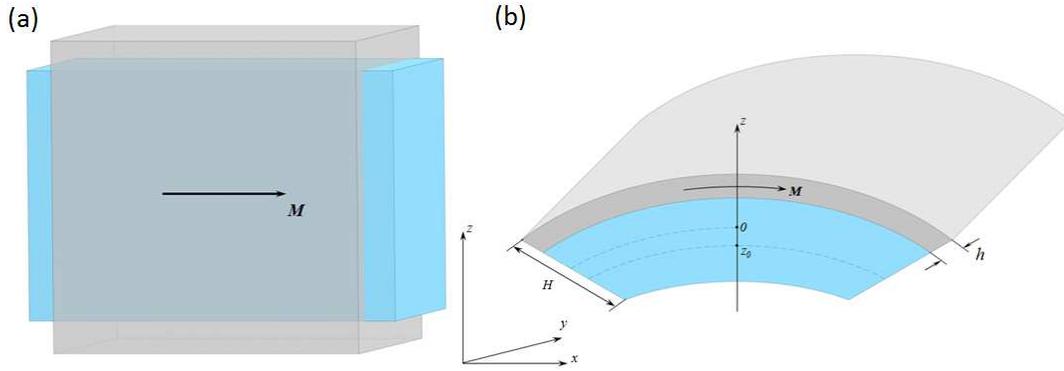


Рисунок. *a* — Свободная деформация ферромагнетика при намагничивании. *b* — Деформация при намагничивании тонкой пленки, упруго связанной с подложкой

3. ТРЕХМЕРНЫЙ ПОЛИКРИСТАЛЛ

При однородном намагничивании трехмерного поликристалла возникают однородные деформации (рис. *a*). Из условия отсутствия напряжений $G_{ik} = 0$ находим

$$\begin{aligned} U_{xx}^{(0)} &= U_{yy}^{(0)} - \frac{\beta}{2\mu} M_0^2, \\ U_{zz}^{(0)} &= U_{yy}^{(0)} = \frac{\beta}{2\mu} M_0^2 \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что деформации (7) понижают энергию системы, которая становится равной

$$\varepsilon_0 = -\frac{\beta^2(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} M_0^4 = -2\frac{\beta^2}{E} M_0^4. \quad (8)$$

Представим деформации в виде суммы однородных деформаций (7) и флуктуаций, обусловленных флуктуациями намагниченности

$$U_{ik} = U_{ik}^{(0)} + w_{ik} + \nu_{ik},$$

где малые деформации w_{ik} вычисляются в линейном, а ν_{ik} — в квадратичном по флуктуациям намагниченности приближении:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e + \varepsilon_{me} &= \\ &= \varepsilon_0 + \beta w_{ik} \left(M_i^{(0)} m_k + M_k^{(0)} m_i \right) + \frac{1}{2} \lambda w_{il}^2 + \\ &+ \mu w_{ik}^2 + \beta U_{ik}^{(0)} m_i m_k + \beta U_{ik}^{(0)} M_i^{(0)} m_k + \\ &+ G_{ik}^{(0)} w_{ik} + G_{ik}^{(0)} \nu_{ik}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $G_{ik}^{(0)}$ — тензор напряжений в нулевом по флуктуациям приближении. Поскольку расширение предполагается свободным $G_{ik}^{(0)} = 0$, последние два слагаемых в (9) равны нулю. Слагаемые, содержащие

$U_{ik}^{(0)}$, представляют собой спонтанную анизотропию для магнитных флуктуаций. С учетом (7) имеем

$$\begin{aligned} \beta U_{ik}^{(0)} \left(m_i + M_i^{(0)} \right) m_k &= \\ &= \frac{\beta^2(1 + \sigma)}{E} M_0^2 \left(m_y^2 + m_z^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, развитие поперечных флуктуаций намагниченности является энергетически невыгодным и повышает энергию системы [6]. Для ответа на вопрос о стабилизации дальнего порядка необходимо рассчитать дисперсию флуктуаций намагниченности.

Вектор смещения u_i удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\Delta u_i + \frac{1}{1 + 2\sigma} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{2\beta(1 + \sigma)}{E} \frac{\partial}{\partial x_k} (M_i M_k). \quad (11)$$

Решение этого векторного уравнения в линейном по флуктуациям намагниченности приближении легко найти, и для фурье-образа тензора деформаций получаем

$$\begin{aligned} w_{ij} &= -\frac{\beta(1 + \sigma)}{E} \left[(\mathbf{m}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}) \left(M_i^{(0)} k_j + M_j^{(0)} k_i \right) - \right. \\ &- \frac{2}{1 - \sigma} k_i k_j (\mathbf{m}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}) \left(\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{k} \right) + \\ &\left. + \left(\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{k} \right) \left(m_i k_j + m_j k_i \right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $k_j = q_j/q$, q — модуль волнового вектора. Подставляя (12) в (9), найдем энергию поликристалла, связанную с деформациями.

Предполагая малость константы анизотропии K , при расчете энергии анизотропии можно ограничиться линейным по флуктуациям слагаемым

$$\varepsilon_a = -K n_x M_0 (n_y m_y + n_z m_z). \quad (13)$$

Обозначим

$$\eta_{xi}(\mathbf{r}) = n_x(\mathbf{r})n_i(\mathbf{r}), \eta_{xi}(\mathbf{q}) = \int \eta_{xi}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

$i = z, y$. Вектор \mathbf{n} равномерно распределен в телесном угле 4π , поэтому $\langle \eta_{xi}(\mathbf{q})\eta_{xj}(-\mathbf{q}) \rangle = \eta\delta_{ij}$. Полагая распределение кристаллитов по размерам статистически однородным и изотропным, запишем

$$\eta(q) = \int \langle n_x(\mathbf{r})n_i(\mathbf{r})n_x(\mathbf{r}_1)n_i(\mathbf{r}_1) \rangle e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} d\mathbf{r}d\mathbf{r}_1 = \frac{V}{15} \int \psi(\rho)e^{i\mathbf{q}\rho} d\rho, \quad (14)$$

где V — объем поликристалла. Корреляционная функция $\psi(\rho)$ определяет область пространства, в котором вектор \mathbf{n} не изменяет своего направления. Для статистически однородного и изотропного распределения эта функция может быть выбрана в виде

$$\psi(\rho) = \exp(-k_c^2\rho^2),$$

тогда размер кристаллита $l_c \sim 1/k_c$. Фурье-образ коррелятора (14) зависит только от модуля волнового вектора и равен

$$\eta(q) = V \frac{\pi\sqrt{\pi}}{15} k_c^{-3} \exp\left(-\frac{q^2}{4k_c^2}\right). \quad (15)$$

Магнитостатическую энергию (3) представим в виде

$$\varepsilon_m = 2\pi \int \frac{1}{q^2} |\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}|^2 d\mathbf{q}. \quad (16)$$

Подставляя найденные решения, для энергии поликристалла окончательно получим

$$\varepsilon = \int (f_1 |\mathbf{m}|^2 + f_2 |\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}|^2 - KM_0\eta_{xi}(\mathbf{q})m_i(-\mathbf{q})) d\mathbf{q}, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{k} = \mathbf{q}/q, \quad i = z, y,$$

$$f_1 = l^2q^2 + \frac{\beta^2(1+\sigma)}{E}M_0^2(1-k_x^2), \quad (18)$$

$$f_2 = \frac{\beta^2(1+\sigma)}{E}M_0^2\left(\frac{2}{1-\sigma}k_x^2 - 1\right) + 2\pi, \quad (19)$$

Приравнивая вариацию энергии (17) по $m_i(-\mathbf{q})$ к нулю, получаем систему уравнений для определения флуктуаций:

$$f_1m_i + f_2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{k})k_i = KM_0\eta_{xi}(\mathbf{q}). \quad (20)$$

Решая эту систему, находим средний по распределению случайной анизотропии квадрат поперечных флуктуаций:

$$\langle m_{\perp}^2 \rangle = \langle m_x^2 + m_y^2 \rangle = \frac{2\pi}{V}K^2M_0^2 \int \left[\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{(f_1 + f_2(1 - k_z^2))^2} \right] \eta(q)q^2 \sin \theta d\theta dq, \quad (21)$$

θ — угол между волновым вектором и осью x . Детали вычисления интегралов в (21) приведены в Приложении. Величина флуктуаций определяется соотношением размера кристаллита l_c и характерной длины l_m , связанной с константой спонтанной деформационной анизотропии $b = \beta^2(1 + \sigma)M_0^2/E$, $l_m^2 = l^2/b$. Приведем выражения для квадрата флуктуаций магнитного момента в предельных случаях. Если размер кристаллита велик, $k_cl_m \ll 1$, то

$$\langle m_{\perp}^2 \rangle = \frac{2\pi}{15} \frac{K}{b} \frac{1}{k_c^2 l_w^2} M_0^2, \quad l_w^2 = \frac{l^2}{K}. \quad (22)$$

В обратном предельном случае, $k_cl_m \gg 1$, имеем

$$\langle m_{\perp}^2 \rangle = \frac{\pi^4 \sqrt{\pi}}{30} \frac{K}{b} \frac{1}{k_c^3 l_w^2 l_m} M_0^2. \quad (23)$$

Условие малости флуктуаций и стабилизации дальнего порядка является условие $\langle m_{\perp}^2 \rangle \ll M_0^2$.

4. ФЕРРОМАГНИТНАЯ ПЛЕНКА НА ПОДЛОЖКЕ

Рассмотрим ферромагнитную пленку на немагнитной подложке, которые без учета намагничивания пленки были бы идеально согласованы. Будем считать, что в пленке спонтанно возникла намагниченность, направление которой выберем в качестве оси x . Эта намагниченность из-за магнитоупругой связи приводит к деформации пленки, которой препятствует подложка. Поскольку, как можно предположить, пленка и подложка упруго связаны, неоднородная деформация приводит к изгибу всей системы, а форма пластины задается уравнением $z = \xi(x, y)$ (рис. *b*). Найдем деформации, которые при этом возникают. Предполагая подложку достаточно тонкой, будем считать, что нормальные компоненты тензора деформаций (5) равны нулю, $G_{iz} = 0$ [9]. Из этого следует, что равны нулю компоненты тензора деформаций

$$U_{xz} = U_{yz} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (24)$$

Считая, что $u_z = \xi$, и интегрируя уравнения (24) по z , находим

$$u_x = -(z - z_0) \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad u_y = -(z - z_0) \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Здесь z_0 — координата нейтральной линии, разделяющей области растяжения и сжатия пластины. Обе величины, ξ и z_0 , найдем из условия минимума энергии. Поскольку источник деформаций — намагниченность — действует только вдоль оси x , будем считать, что $\xi = \xi(x)$. При этом отличны от нуля компоненты U_{xx} и $U_{zz} = -\lambda/(\lambda + 2\mu)U_{xx}$ тензора деформаций. После интегрирования по z с учетом того, что намагниченность существует только в пленке, а модули упругости пленки и подложки равны, находим

$$\varepsilon_e + \varepsilon_{me} = \frac{E}{2(1 - \sigma^2)} \left(\frac{H^3}{12} + z_0^2 H \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 - \beta M_0^2 \left(\frac{1}{2} H h - \frac{1}{2} h^2 - z_0 h \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (25)$$

где h — толщина пленки, H — суммарная толщина пленки и подложки. Минимум энергии (25) соответствует значениям

$$z_0 = -\frac{1}{6} \frac{H^2}{H - h}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{(1 - \sigma^2)\beta h}{E z_0 H} = 6 \frac{(1 - \sigma^2)\beta h (H - h)}{E H^3} M_0^2. \quad (27)$$

Таким образом система принимает форму параболического цилиндра, а нейтральная линия смещена от центра на величину z_0 . Если толщина подложки становится малой ($h \rightarrow H$), кривизна $\partial^2 \xi / x^2$ стремится к нулю, а средняя по толщине пленки деформация к постоянной величине

$$U_{xx} \rightarrow -(1 - \sigma^2)\beta M_0^2 / E.$$

В обратном предельном случае тонкой пленки ($h \ll H$) выигрыш в плотности энергии из-за деформаций равен

$$\varepsilon_0 = -2\beta^2 M_0^4 (1 - \sigma^2) h / E H,$$

что в H/h раз меньше выигрыша в случае свободной деформации (8).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, условием малости флуктуаций, обусловленных разбросом осей анизотропии, по сравнению со средней спонтанной намагниченностью, является неравенство $\langle m_{\perp}^2 \rangle \ll M_0^2$. Это условие может выполняться только при учете магнотрикции. Если коэффициент магнотрикции $\beta \rightarrow 0$, то стремится к нулю величина «магнитоупругой щели» $b \rightarrow 0$,

а следовательно, амплитуда флуктуаций становится бесконечно большой. Наше предположение о существовании средней спонтанной намагниченности при этом не верно, что косвенно подтверждает существующее утверждение об отсутствии дальнего магнитного порядка в ферромагнитном поликристалле. При учете магнитоупругой связи ситуация качественно изменяется. Интенсивность флуктуаций зависит от соотношения размера кристаллического блока l_c ($k_c = 2\pi/l_c$) и характерной «магнотрикционной» длины $l_m = l/\sqrt{b}$. Размер кристаллического блока в пленках ферромагнитных металлов составляет $l_c \sim 10 - 100$ нм (см., например, [11]), длину $l \sim \sqrt{J/M_0^2}$ примем равной 10 нм. Величина «магнитоупругой щели» для свободной деформации ферромагнетика равна

$$b = \frac{\beta^2(1 + \sigma)}{E} M_0^2.$$

Если принять, что модуль упругости $E \sim 10^{11} - 10^{12}$ эрг/см³, $M_0^2 \sim 10^6$ эрг/см³, $\beta \sim 1$, то $b \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ [12]. Тогда «магнотрикционная длина» $l_m \sim 300 - 1000$ нм, как правило, больше размеров кристаллита. В этом случае для оценки интенсивности флуктуаций следует воспользоваться формулой (23), которую можно переписать в виде условия

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}}{240} \frac{K^2 l_c^3}{\sqrt{b} l^3} < 1.$$

Учитывая, что $K \sim 0.1 - 1$, это условие может быть выполнено для кристаллитов малых размеров $l_c < l$. Таким образом, стабилизация дальнего порядка в ферромагнитных поликристаллах возможна. Эта стабилизация обусловлена понижением энергии намагниченного ферромагнетика при деформациях, которое сопровождается формированием «магнитоупругой щели» для флуктуаций намагниченности, обусловленных флуктуациями ориентации кристаллических осей в поликристалле. В тонкой пленке, упруго связанной с подложкой, магнитоупругие деформации фактически отсутствуют. Действительно, средняя по толщине пленки деформация

$$U_{xx} \approx -\frac{(1 - \sigma^2)\beta M_0^2 h}{E H}$$

не превышает малой величины $\sim 10^{-10}$ ($h \sim 100$ нм, $H \sim 0.1$ см). Таким образом, пленка находится в напряженном состоянии, и «магнитоупругая щель» не возникает. Однако в этой системе может происходить релаксация напряженного состояния [13], подобно тому как в эпитаксиальных пленках происходит релаксация напряжений за счет формирования

дислокаций несоответствия [14]. Анализ этих процессов и их влияния на дальний магнитный порядок в ферромагнитных поликристаллах выходит за рамки данной работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность М. В. Сапожникову и Д. А. Татарскому за полезные замечания, а также М. А. Кузнецову и Р. В. Гореву за помощь в подготовке рукописи к печати.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 25-22-00126.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим интегралы в формуле (21)

$$\langle m_{\perp}^2 \rangle = \langle m_x^2 + m_y^2 \rangle = \frac{1}{V} 2\pi K^2 M_0^2 (I_1 + I_2),$$

$$I_1 = \int \frac{1}{f_1^2} \eta(q) q^2 \sin \theta d\theta dq,$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(f_1 + f_2(1 - k_z^2))^2} \eta(q) q^2 \sin \theta d\theta dq.$$

В интеграле по угловой переменной сделаем замену $x = \cos \theta$. Тогда выражение для I_1 примет вид

$$I_1 = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{15} k_c^{-3} \int_0^{\infty} q^2 \exp\left(-\frac{q^2}{4k_c^2}\right) dq \times \int_{-1}^1 \frac{dx}{[(lq)^2 + b - bx^2]^2}. \quad (A.1)$$

Вводя обозначения для деформационной анизотропии $b = \beta^2(1 + \sigma)M_0^2/E$ и связанной с ней характерной длины $l_m^2 = l^2/b$, получим

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{[(lq)^2 + b - bx^2]^2} = \frac{\sqrt{(lmq)^2 + 1}}{b^2 ((lmq)^2 + 1)^2} \times \quad (A.2)$$

$$\times \left[\frac{(lmq)^2 + 1}{(lmq)^2 \sqrt{(lmq)^2 + 1}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(lmq)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(lmq)^2 + 1} - 1} \right].$$

Тогда

$$I_1 = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{15 b^2 l_m^2} k_c^{-3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{q^2}{4k_c^2}\right) \left[\frac{1}{(lmq)^2 + 1} + \frac{(lmq)^2}{2((lmq)^2 + 1)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{(lmq)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(lmq)^2 + 1} - 1} \right] dq. \quad (A.3)$$

Рассмотрим предельные случаи.

1. Размер кристаллита большой, $k_c l_m \ll 1$:

$$I_1 = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{15 b^2 l_m^2} k_c^{-3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{q^2}{4k_c^2}\right) \left[1 + \frac{1}{2}(lmq)^2 \times \ln \frac{4}{(lmq)^2} \right] dq \approx \frac{\pi^2}{15 b^2 l_m^2} k_c^{-2}. \quad (A.4)$$

Пренебрегая вторым слагаемым в скобках, для среднего квадрата флуктуаций намагниченности имеем

$$\langle m_{\perp}^2 \rangle = \frac{2\pi^3}{15} \frac{K}{b} \frac{1}{k_c^2 l_{dw}^2} M_0^2, \quad l_{dw}^2 = \frac{l^2}{K}. \quad (A.5)$$

2. Размер кристаллита мал, $k_c l_m \gg 1$:

$$I_1 = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{15 b^2 l_m^2} k_c^{-3} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(lmq)^2 + 1} + \frac{(lmq)^2}{2((lmq)^2 + 1)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{(lmq)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(lmq)^2 + 1} - 1} \right] dq = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{15 b^2 l_m^3} k_c^{-3} C,$$

$$C = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{2(x^2 + 1)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \right] dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

В этом приближении вклад в поперечные флуктуации равен

$$\langle m_{\perp}^2 \rangle = \frac{\pi^4 \sqrt{\pi}}{30} \frac{K}{b} \frac{1}{k_c^3 l_w^2 l_m} M_0^2, \quad l_w^2 = \frac{J}{K}. \quad (A.6)$$

Покажем, что поправки к выражениям (A.5) и (A.6), обусловленные I_2 , малы:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2(1 - k_z^2) &= l^2 q^2 + b(1 - k_z^2) + \\ &+ b \left(\frac{2}{1 - \sigma} k_z^2 - 1 \right) (1 - k_z^2) + 2\pi(1 - k_z^2) = \\ &= l^2 q^2 + b \frac{2}{1 - \sigma} k_z^2 (1 - k_z^2) + 2\pi(1 - k_z^2). \end{aligned}$$

Поскольку $b \frac{2}{1 - \sigma} k_z^2 \ll 2\pi$, знаменатель в I_2 приобретает форму, аналогичную знаменателю в I_1 , с заменой $b \leftrightarrow 2\pi$. Таким образом, вклад от I_2 в $1/b$ раз меньше, чем от I_1 , и мы будем им пренебрегать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Imry and S.-k. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
2. R. Alben, J. J. Becker, and M. C. Chi, J. Appl. Phys. **49**, 1653 (1978).
3. E. M. Chudnovsky, W. M. Saslow, and R. A. Serota, Phys. Rev. B **33**, 251 (1986).
4. A. Cowan, K. McNeill, M. B. Janjua, and St. McVitie, J. Magn. Magn. Mater. **535**, 168094 (2021).
5. А. А. Берзин, А. И. Морозов, А. С. Сигов, ФТТ **64**, 3 (2022).
6. S. V. Maleev, Sov. Phys. JETP **43**, 1240 (1976).
7. B. A. Ivanov and E. V. Tartakovskaya, JETP Lett. **63**, 835 (1996).
8. Е. А. Туров, В. Г. Шавров, УФН **140**, 429 (1983).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Физматлит, Москва, 2001.
10. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг, ЖЭТФ **16**, 967 (1946).
11. С. А. Гусев, Д. А. Татарский, А. Ю. Климов, В. В. Рогов, Е. В. Скороходов, М. В. Сапожников, Б. А. Грибков, И. М. Нефёдов, А. А. Фраерман, ФТТ **55**, 435 (2013).
12. *Таблицы физических величин*, под ред. И. К. Киикоина, Атомиздат, Москва, 1976.
13. G. Abadias, E. Chason, J. Keckes, M. Sebastiani, G. B. Thompson, E. Barthel, G. L. Doll, C. E. Murray, C. H. Stoessel, and L. Martinu, J. Vac. Sci. Technol. A **36**, 020801 (2018).
14. А. Р. Шугуров, А. В. Панин, ЖТФ **90**, 1971 (2020).