

КОНИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ГЕОМЕТРИИ МИНКОВСКОГО

М. Г. Иванов ^{a,*}, З. В. Хайдуков ^{a,b,**}

^a Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

^b Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики
117259, Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 апреля 2025 г.,
после переработки 28 апреля 2025 г.
Принята к публикации 29 апреля 2025 г.

Строится полная классификация конических сингулярностей, возникающих при триангуляции двумерных поверхностей, при условии, что на каждом треугольнике имеет место геометрия Минковского или Евклида. Обсуждаются физический смысл нестандартных конусов и возможные применения построенной классификации к обобщению исчисления Редже.

DOI: 10.31857/S0044451025080061

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Из истории вопроса

Приближение геометрии пространства-времени в общей теории относительности с помощью триангуляции (исчисление Редже) впервые было введено в статье Редже в 1961 г. [1]. Триангуляция пространства-времени размерности D представляет собой разбиение пространства на плоские (с метрикой Евклида или Минковского) D -мерные симплексы¹⁾.

Геометрия, возникающая при таком способе разбиения, была названа скелетной. При такой триангуляции симплекс размерности $D - 2$ (далее — $(D - 2)$ -симплекс) может быть носителем бесконечной кривизны (такие особенности геометрии мы бу-

дем называть сингулярностями). Триангуляция любого гладкого искривленного пространства содержит сингулярности, в которых оказывается сосредоточена кривизна. В непрерывном пределе (при стремлении размеров симплексов к нулю) сингулярности исчезают и мы возвращаемся к гладкому пространству.

В работе Редже сначала рассматривалась риманова геометрия (сигнатура $(+, \dots, +)$), в которой возможны только $(D - 2)$ -симплексы, двумерное ортогональное сечение которых имеет геометрию поверхности конуса, имеющего локально евклидову геометрию (которую далее будем называть геометрией евклидова конуса или евклидовой конической сингулярностью). В той же статье, обобщая подход на случай псевдоевклидовой геометрии (сигнатура $(-, +, +, +)$), Редже отметил, что $(D - 2)$ -симплексы могут быть трех типов:

- 1) времениподобный $(D - 2)$ -симплекс (содержит времениподобный вектор) имеет ортогональное сечение с геометрией евклидова конуса;
- 2) светоподобный (нулевой) $(D - 2)$ -симплекс (содержит светоподобный вектор) имеет нулевую площадь и не дает вклада в действие;
- 3) пространственноподобный $(D - 2)$ -симплекс (содержит только пространственноподобные векторы) имеет ортогональное двумерное сечение с геометрией конуса, имеющего локально геометрию

* E-mail: ivanov.mg@mipt.ru

** E-mail: khaidukov.zv@phystech.edu

¹⁾ Симплекс размерности d — выпуклая оболочка множества $d + 1$ точек (наименьшее выпуклое множество, содержащее данные точки), не лежащих ни в какой $(d - 1)$ -мерной плоскости. Нульмерный симплекс — точка, одномерный — отрезок, двумерный — треугольник, трехмерный — тетраэдр. Четырехмерный симплекс — фигура, образованная объединением всех отрезков, соединяющих заданную точку v со всеми точками тетраэдра F , причем точка v не лежит в трехмерной гиперплоскости, содержащей данный тетраэдр F .

Минковского (которую далее будем называть геометрией конуса Минковского или конической сингулярностью Минковского).

Выбором триангуляции пространства-времени можно добиться того, чтобы все $(D - 2)$ -симплексы были времениподобными или светоподобными. Именно такой случай рассматривает в статье [1] Редже, «для простоты» и «чтобы избежать неоднозначности в определении» площади $(D - 2)$ -симплекса. Такой подход позволяет строить триангуляции, содержащие только евклидовы конические сингулярности.

Геометрия четырехмерного пространства-времени в окрестности конической сингулярности, локализованной на двумерной времениподобной поверхности, соответствует геометрии пространства-времени в присутствии прямой космологической струны. В системе покоя струны метрика имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + r^2 d\phi^2, \quad (1)$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi - \alpha.$$

Такая метрика²⁾ выглядит как метрика плоского пространства Минковского в цилиндрических координатах, при этом угловая координата ϕ имеет период $2\pi - \alpha$. В литературе решение (1) принято называть космической струной [3, 4]. Из уравнений Эйнштейна можно определить тензор энергии-импульса и натяжение струны (1). Натяжение струны пропорционально дефициту угла α . Если дефицит угла α отрицателен (имеет место избыток угла), то и натяжение струны оказывается отрицательным. На первый взгляд, такое решение является нефизическим, поскольку струна с отрицательным натяжением должна быть неустойчивой, но оно может иметь конкретные физические следствия [5]. Для исчисления Редже вопрос об устойчивости струны не важен: конические сингулярности исчезают в непрерывном пределе. Если мы ограничиваемся исчислением Редже с времениподобными $(D - 2)$ -симплексами, то только конические сингулярности с отрицательным дефицитом угла дают отрицательный вклад в скалярную кривизну.

Статья [1] оставила открытым вопрос об устройстве пространственноподобных $(D - 2)$ -симплексов и конических сингулярностей Минковского. И во многих работах по исчислению Редже также избегают использования конических сингулярностей Минковского.

Например, в третьем томе классического учебника [6] (гл. 42, «Исчисление Редже», с. 440) отмечается, что дефицит угла для конической сингулярности Минковского является чисто мнимым, но вклад в действие является действительным. Вопрос о знаке этого вклада не обсуждается.

В основополагающих статьях 1984 г. [7, 8] (входящих в сборник [9]) рассматриваются только положительно определенные метрики и утверждается (без ссылок на литературу), что случай сигнатуры Минковского отличается «некоторыми незначительными изменениями знаков».

Тем не менее конические сингулярности Минковского исследовались в объеме, необходимом для применения исчисления Редже. В 1975 г. вышла статья Соркина [10], в которой для конуса Минковского введено понятие дефицита угла с использованием тригонометрических функций комплексного переменного. Полученное выражение для дефицита угла применено для определения вклада в действие пространственноподобных $(D - 2)$ -симплексов. В 2010 г. Бревин привел алгоритмы для вычисления дефицита угла на плоскости Минковского и соответствующего вклада в действие без использования комплексных чисел [11].

Однако нам не удалось найти в литературе полной классификации конусов Минковского, т.е. конусов, которые могут быть получены склейкой треугольников, вырезанных из плоскости Минковского. Работы Соркина [10] и Бревина [11] ограничиваются конусами стандартного типа (согласно введенной ниже классификации). Только конусы данного типа допускают непрерывную деформацию в плоскость Минковского, а значит, при правильной триангуляции пространства-времени другие типы конических сингулярностей Минковского появляться не должны.

В данной статье основное внимание уделено классификации конических сингулярностей, включая такие, которые не могут возникать при триангуляции регулярных лоренцевых многообразий и не исчезают при переходе к непрерывному пределу, что является естественным развитием идей, изложенных в работах [10, 11]. Такие нестандартные конические сингулярности могут представлять интерес, поскольку многие физически осмысленные решения уравнений Эйнштейна не являются гладкими, т.е. содержат «физические» сингулярности (не связанные с триангуляцией). Также нестандартные сингулярности могут быть интересны для квантовой теории гравитации, в которой триангуляции могут рассматриваться как аналог фейнмановских диаграмм.

²⁾ Общее вакуумное цилиндрически-симметричное решение уравнений Эйнштейна, частным случаем которого является (1), получил Леви-Чивита [2].

1.2. Евклидовы конические сингулярности

Пусть геометрия D -мерного риманова пространства приближенно описывается с помощью триангуляции: пространство разбивается на симплексы размерности D , на каждом из которых задана евклидова геометрия. Условия склейки: симплексы размерности $D - 1$, образующие грани D -мерных симплексов, склеиваются попарно; у двух D -мерных симплексов может быть не больше одной общей $(D - 1)$ -мерной грани; склеиваемые $(D - 1)$ -мерные симплексы равны друг другу и склеиваются изометрически. Каждый симплекс размерности $d < D$ может быть общим только для конечного числа симплексов большей размерности. (Подробнее правила склейки мы обсудим в разд. 6.) При такой триангуляции мы приближаем риманову геометрию кусочно-евклидовой.

При склейке двух соседних D -симплексов E_1 и E_2 на них можно ввести общую систему координат с постоянным метрическим тензором, таким образом, внутренние точки разграничивающего E_1 и E_2 $(D - 1)$ -симплекса никаких особенностей не несут. Симплексы размерности $D - 2$ могут нести конические сингулярности: через почти любую точку v $(D - 2)$ -мерного симплекса V можно провести двумерную поверхность C , которая в пределах каждого смежного с V D -мерного симплекса будет двумерной плоскостью, перпендикулярной V , имеющей с V одну общую точку v . Вне зависимости от размерности D внутренняя геометрия C в окрестности точки v будет геометрией конуса.

Приведем наиболее простые примеры.

1. Триангуляция двумерной поверхности проводится путем разбиения на треугольники. Если геометрия каждого треугольника евклидова, то их ребра не несут особенностей. Особенности могут нести вершины треугольников, при условии что сумма углов треугольников, сходящихся в данной вершине V , равна $2\pi - \alpha_V$, где $\alpha_V \neq 0$ — дефицит угла данной конической сингулярности. Окрестность каждой вершины триангуляции устроена как развертка конуса с вершиной V (см. рис. 1–3).

2. Триангуляция трехмерной поверхности проводится путем разбиения на тетраэдры. Если геометрия каждого тетраэдра евклидова, то их грани не несут особенностей. Особенности могут нести ребра тетраэдров, при условии что сумма двугранных углов, сходящихся на данном ребре V , равна $2\pi - \alpha_V$, где $\alpha_V \neq 0$ — дефицит угла данной конической сингулярности. Двумерное перпендикулярное сечение

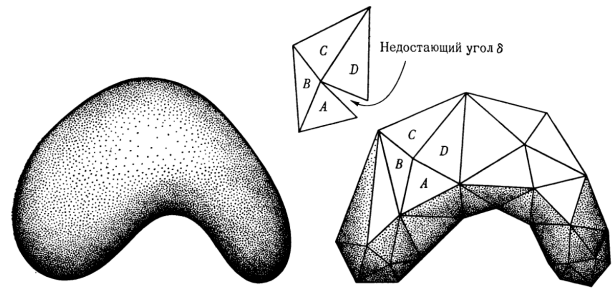


Рис. 1. Триангуляция двумерной поверхности (рис. 42.1 из тома 3 [6])

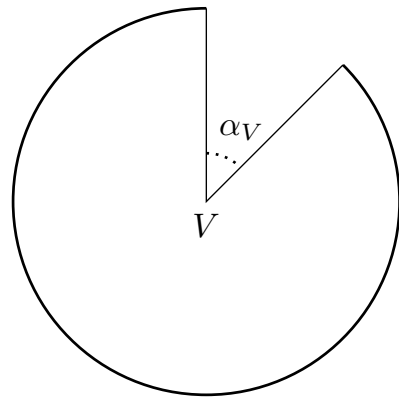


Рис. 2. Развертка двумерного конуса с положительным дефицитом угла α_V (границы вырезанного из круга сектора склеиваются между собой)

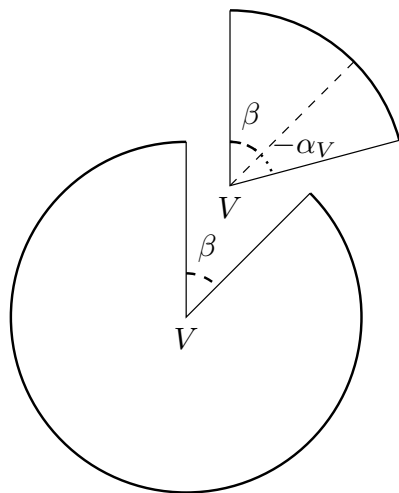


Рис. 3. Развертка двумерного конуса с отрицательным дефицитом угла α_V . Вместо вырезанного из круга сектора клеивается сектор с большим углом

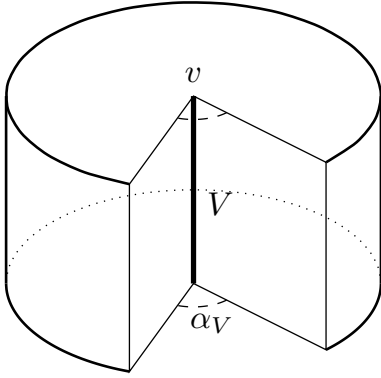


Рис. 4. Развертка трехмерной конической сингулярности с положительным дефицитом угла α_V (границы вырезанного из цилиндра сектора склеиваются между собой). Такая сингулярность соответствует сечению $t = \text{const}$ метрики космической струны (1)

каждого ребра V , пересекающее его в точке v , устроено как развертка конуса с вершиной v (см. рис. 4).

3. Триангуляция четырехмерной поверхности проводится путем разбиения на четырехмерные симплексы (пятивершинники с пятью тетраэдрическими гранями). Если геометрия каждого пятивершинника евклидова, то их грани-тетраэдры не несут особенностей. Особенности могут нести треугольники (грани тетраэдров), при условии что сумма гипердвугранных углов (углов между двумя тетраэдрами в четырехмерном евклидовом пространстве), сходящихся на данном треугольнике V , равна $2\pi - \alpha_V$, где $\alpha_V \neq 0$ — дефицит угла данной конической сингулярности. Двумерное перпендикулярное сечение каждого треугольника V , пересекающее V в одной точке v , устроено как развертка конуса с вершиной v (см. рис. 2, 3).

Мы видим, что конические сингулярности в евклидовой геометрии сводятся к двумерным коническим сингулярностям, а двумерные конические сингулярности классифицируются с помощью одного параметра — дефицита угла α_V , $-\infty < \alpha_V < 2\pi$ (отрицательный дефицит угла означает, что сумма углов в данной вершине больше 2π , см. рис. 3).

Применительно к теории гравитации часто рассматривают триангуляции четырехмерного евклидова пространства-времени. При этом интеграл от скалярной кривизны (действие Гильберта) сводится к взвешенной сумме дефицитов углов:

$$\frac{1}{2} \int R \sqrt{g} d^4 x \approx \sum_V S(V) \alpha_V, \quad (2)$$

где $S(V) > 0$ — площадь треугольника V .

При триангуляции лоренцева пространства-времени с сигнатурой $(-, +, +, +)$ часто выбирают триангуляцию так, чтобы все сингулярности были времениподобными (соответствующие треугольники содержали бы времениподобные векторы). Перпендикулярное сечение такого треугольника имеет обычную коническую сингулярность, характеризующую дефицитом угла. Это позволяет записать действие Гильберта аналогично риманову случаю:

$$\frac{1}{2} \int R \sqrt{-g} d^4 x \approx \sum_V S(V) \alpha_V, \quad (3)$$

где $S(V) > 0$ и α_V — по-прежнему вещественные числа.

Вклад в триангулированное действие для космологического члена имеет вид

$$\int \Lambda \sqrt{-g} d^4 x \approx \Lambda \sum_E W(E), \quad (4)$$

где $W(E) > 0$ — 4-объем четырехмерного симплекса E .

В двумерной геометрии действие для космологического члена аналогично триангулированному действию для релятивистской струны с натяжением T :

$$T \int \sqrt{-h} d^2 \xi \approx T \sum_E S(E), \quad (5)$$

где $S(E) > 0$ — площадь двумерного симплекса E .

Использование триангуляций, содержащих сингулярности на пространственноподобных треугольниках, обычно избегают. В исходной статье Редже [1] это мотивировалось неоднозначностью в выборе знака площади пространственноподобного треугольника и знака дефицита угла (обе эти величины предполагались комплексными).

Однако представляют интерес триангуляции псевдоевклидовых пространств, при которых они разбиваются на D -мерные симплексы, на которых имеет место геометрия Минковского. В случае общего положения перпендикулярные сечения $(D - 2)$ -мерных симплексов могут быть как евклидовыми конусами, так и конусами, склеенными из треугольников с геометрией Минковского.

Наиболее интересны случаи $D = 2$ — триангуляция мировой поверхности струны (поверхности, заемаемой струной в пространстве-времени), и $D = 4$ — триангуляция пространства-времени общей теории относительности (ОТО).

При рассмотрении триангуляции пространства-времени в контексте процессов квантовой гравитации, сопровождающихся изменением сигнатуры

пространства-времени, возможны триангуляции, совмещающие D -мерные симплексы, на которых заданы евклидовы и псевдоевклидовы геометрии разной сигнатуры. В этом случае могут возникать конические сингулярности переменной сигнатуры, перпендикулярные сечения которых совмещают секторы с геометриями Евклида и Минковского.

Из всего перечисленного выше следует, что прежде всего нам необходимо ввести строгую классификацию конических сингулярностей, чтобы понять, с какими объектами мы можем столкнуться при описании задач триангуляции пространства-времени ОТО, мировой поверхности струны, а также в различных квантовополевых обобщениях.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ КОНИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

2.1. Параметризация плоскости Минковского

Для построения конической сингулярности на плоскости Минковского мы можем строить развертку конуса из секторов, ограниченных лучами, исходящими из начала координат. Но теперь секторы склеиваются не с помощью поворотов (элементов группы $SO(2)$), а с помощью преобразований Лоренца (элементов группы $SO(1,1)$).

Плоскость Минковского состоит из четырех секторов, разграниченных четырьмя светоподобными лучами (см. рис. 5):

- < «право» ($x > |t|$) — пространственноподобный сектор: $x = r \operatorname{ch} \theta$, $t = r \operatorname{sh} \theta$;
- ↗ «вперед в будущее» ($t = x > 0$) — «правый» светоподобный луч: $t = x = e^\theta$;
- ∨ «будущее» ($t > |x|$) — времениподобный сектор: $t = r \operatorname{ch} \theta$, $x = r \operatorname{sh} \theta$;
- ↖ «назад в будущее» ($-t = x < 0$) — «левый» светоподобный луч: $-t = x = -e^{-\theta}$;
- > «лево» ($x < -|t|$) — пространственноподобный сектор: $x = -r \operatorname{ch} \theta$, $t = -r \operatorname{sh} \theta$;
- ↙ «назад в прошлое» ($t = x < 0$) — «правый» светоподобный луч: $t = x = -e^\theta$;
- ∧ «прошлое» ($t < -|x|$) — времениподобный сектор: $t = -r \operatorname{ch} \theta$, $x = -r \operatorname{sh} \theta$;
- ↘ «вперед в прошлое» ($-t = x > 0$) — «левый» светоподобный луч: $-t = x = e^{-\theta}$.

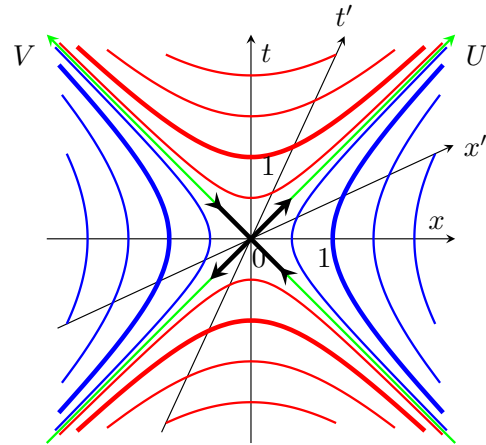


Рис. 5. Собственные оси буста: $U = t + x$, $V = t - x$. Крест со стрелками указывает, в каком направлении плоскость растягивается, а в каком сжимается при бусте, это видно и по тому, как наклоняются навстречу друг другу оси x' , t' , которые получаются с помощью буста с быстротой $\vartheta = \frac{1}{2}$. Точки вне собственных осей скользят вдоль гипербола

Везде $-\infty < \theta < +\infty$, $0 \leq r < +\infty$.

Подобно тому как евклидовы повороты можно рассматривать как сдвиги по круговому углу φ , преобразования Лоренца — это сдвиги по гиперболическому углу (быстроте) θ . Все параметризации лучей и секторов выбраны так, чтобы собственное ортохронное преобразование Лоренца (буст) соответствовало сдвигу по θ (добавление к θ одинаковой константы ϑ на всех лучах и во всех секторах).

Лучи, исходящие из начала координат плоскости Минковского, могут быть пространственноподобными, времениподобными и светоподобными. При построении развертки конуса склеивать можно только лучи одного типа.

Гиперболический угол, в отличие от кругового, пробегает бесконечный диапазон $(-\infty, +\infty)$. Любой конечный дефицит гиперболического угла не меняет соответствующий сектор. По этой причине, строя конические сингулярности в геометрии Минковского, мы можем избежать разрезов вдоль пространственноподобных и времениподобных лучей всегда, кроме двух исключительных случаев, когда конус не имеет светоподобных образующих.

2.2. Исключительные конусы

Исключительный конус будущего типа $(0, \vartheta)_\vee$ может быть получен из сектора $\theta \in [\theta_1, \theta_1 + \vartheta]$, вырезанного из «будущего» двумя времениподобными лучами $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_1 + \vartheta$, которые склеиваются друг с другом с помощью буста с быстротой ϑ .

На рис. 5 такой сектор ограничен положительными полуосями t и t' .

Такой конус также можно получить, введя для «будущего» соотношение эквивалентности $\theta \sim \theta + \vartheta$. При этом сектор «будущее» наматывается на конус, делая бесконечное число оборотов.

Аналогичные исключительные конусы могут быть получены из других трех секторов: «право» $(0, -\vartheta)_{<}$, «прошлое» $(0, \vartheta)_{\wedge}$ и «лево» $(0, -\vartheta)_{>}$.

Выбор знаков (минус для пространственноподобных секторов и плюс для времениподобных) обусловлен соответствием с типичными конусами, которые рассматриваются ниже.

Если триангуляция не позволяет поменять знак временной компоненты времениподобного вектора с помощью параллельного переноса (для склейки симплексов используется ортохронная группа Лоренца), то исключительные конусы будущего $(0, \vartheta)_{\vee}$ и прошлого $(0, \vartheta)_{\wedge}$ надо различать. Для триангуляций, не сохраняющих направление времени, исключительные конусы прошлого $(0, \vartheta)_{\wedge}$ и будущего $(0, \vartheta)_{\vee}$ не различаются.

Правые и левые исключительные конусы $(0, -\vartheta)_{<}$ и $(0, -\vartheta)_{>}$ неразличимы для четырехмерного пространства-времени.

Для триангуляций двумерной ориентируемой мировой поверхности все четыре типа исключительных конусов различаются, если для склейки симплексов используется группа $SO_+(1, 1)$. При использовании группы $O(1, 1)$ перестают отличаться не только правые конусы от левых, но и прошлые конусы от будущих. Группа $O_+(1, 1)$ не различает право и лево, но различает прошлое и будущее. По аналогии с группой $O_+(1, 1) = O_{t+}(1, 1)$ (подгруппа $O(1, 1)$, для которой проекция новой оси t на старую всегда положительна) мы можем ввести группу $O_{x+}(1, 1)$ (подгруппа $O(1, 1)$, для которой проекция новой оси x на старую всегда положительна). Группа $O_{x+}(1, 1)$ различает право и лево, но не различает прошлое и будущее.

Мы описали исключительные конусы, в следующем разделе опишем типичные конусы Минковского.

2.3. Типичные конусы

Типичный конус типа (N, ϑ) состоит из N времениподобных и N пространственноподобных секторов, чередующихся между собой и разграниченных $2N$ светоподобными лучами. В каждом секторе гиперболический угол пробегает весь диапазон значений: $\theta \in (-\infty, +\infty)$. На всех светоподобных лучах,

кроме одного, склейка осуществляется тривиальным образом (как на плоскости Минковского). По одному светоподобному лучу сделан разрез³⁾, берега которого склеиваются с помощью буста с параметром ϑ . Для определенности будем считать, что мы обходим вершину конуса против часовой стрелки и для выполнения склейки проводим буст с параметром ϑ в секторе перед разрезом (или буст с параметром $-\vartheta$ в секторе за разрезом). Как и дефицит угла в евклидовом конусе, параметр ϑ не меняет знак при изменении ориентации поверхности развертки.

Все светоподобные образующие можно разделить на «правые» и «левые» лучи, которые чередуются при обходе вершины. На «правых» лучах координаты задаются как $x = t = \pm e^\theta$, на «левых» — как $x = -t = \pm e^{-\theta}$.

На всей поверхности типичного конуса можно определить преобразование Лоренца, которое действует как $\theta \mapsto \theta + \vartheta$.

Типичный конус (N, ϑ) для случая $\vartheta > 0$ можно получить из типичного конуса $(N, 0)$ вклейкой дополнительного времениподобного сектора $\theta \in [-\vartheta, 0)$ внутрь одного из времениподобных секторов: делаем разрез вдоль времениподобного луча $\theta = 0$; отодвигаем один из берегов разреза, сдвинув диапазон изменения координаты $\theta \mapsto \theta - \vartheta$, $(-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, -\vartheta)$; вставляем дополнительный сектор $\theta \in [-\vartheta, 0)$.

Типичный конус (N, ϑ) для случая $\vartheta < 0$ можно получить из типичного конуса $(N, 0)$ вклейкой дополнительного пространственноподобного сектора $\theta \in (0, -\vartheta]$ внутрь одного из пространственноподобных секторов: делаем разрез вдоль пространственноподобного луча $\theta = 0$; отодвигаем один из берегов разреза, сдвинув диапазон изменения координаты $\theta \mapsto \theta - \vartheta$, $(0, +\infty) \rightarrow (-\vartheta, +\infty)$; вставляем дополнительный сектор $\theta \in (0, -\vartheta]$.

С этой точки зрения исключительный конус типа $(0, \vartheta)$ можно рассматривать как типичный конус с $N = 0$.

Глядя на рис. 6–10, удобно представить себе, что каждая полуось осей x и t представляет собой рычаг, потянув за который мы сдвигаем точки соответствующего сектора вдоль концентрических гипербол, в результате чего сектор растягивается в направлении

³⁾ Для классификации конусов удобно делать разрез по светоподобному лучу. Для вычислений в исчислении Редже удобнее, чтобы разрезы были по пространственноподобным и времениподобным лучам, чтобы тип конуса мог быть вычислен через скалярные произведения векторов, направленных вдоль разрезов.

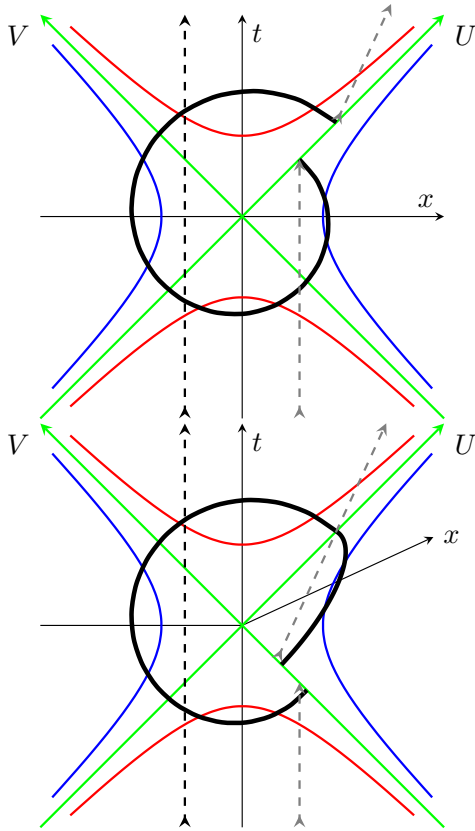


Рис. 6. Развертки стандартного конуса типа $(2, \frac{1}{2})$. На первом рисунке разрез идет по лучу «вперед в будущее». На втором рисунке разрез идет по лучу «вперед в прошлое», по сравнению с первым рисунком сектор «право» подвергся бусту с быстротой $\vartheta = \frac{1}{2}$, т.е. растянулся вдоль U и сжался вдоль V в $\sqrt{e}$ раз

того светоподобного луча, к которому мы тянем рычаг, и сжимается в направлении другого светоподобного луча. Параметр буста положителен, если рычаг приближается к «правому» светоподобному лучу (к собственной оси U).

Мы можем продолжить классификацию типичных конусов с точки зрения значения и четности N .

2.4. Стандартные конусы

Среди типичных конусов выделим тип $(2, \vartheta)$ (назовем его стандартным): только конус этого типа может быть непрерывно деформирован в плоскость Минковского (при $\vartheta = 0$).

Разные развертки стандартного конуса типа $(2, \frac{1}{2})$ приведены на рис. 6–8. На всех рисунках штриховыми линиями со стрелками показаны две времениподобные геодезические параллельные в

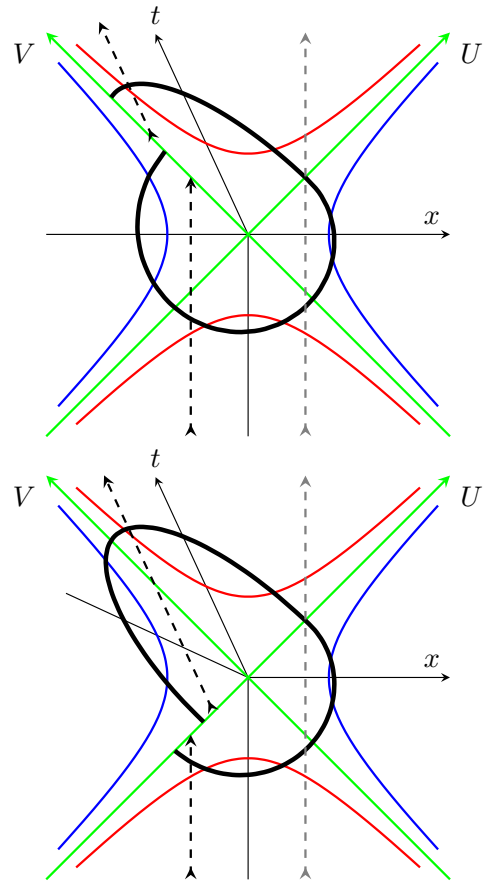


Рис. 7. Развертки стандартного конуса типа $(2, \frac{1}{2})$ с разрезами, идущими «назад в будущее» и «назад в прошлое»

секторе «прошлое»: левая и правая. Жирная черная кривая на рис. 6–8 — один и тот же замкнутый контур, охватывающий вершину конуса, кажущиеся разрывы контура лежат на разрезах.

Для стандартного конуса типа $(2, \vartheta)$ две параллельные в «прошлом» времениподобные прямые, пройдя с разных сторон от вершины, сходятся при $\vartheta < 0$ и расходятся при $\vartheta > 0$. Это легко можно увидеть на рис. 6–8. Отклонение геодезических [6] (см. Приложение) позволяет определить, что знак скалярной кривизны соответствует знаку параметра ϑ и, следовательно, вклад сингулярности V в действие равен ϑ_V для двумерного случая и $\vartheta_V |S(V)|$ для четырехмерного ($|S(V)| > 0$).

Выбор знаков для дефицитов углов надо проводить таким образом, чтобы положительные ϑ давали положительный вклад в действие, при этом действие Гильберта принимает вид

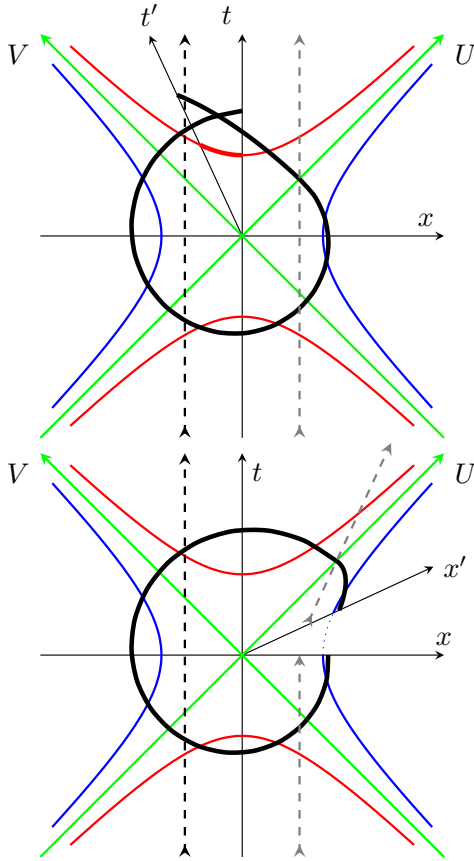


Рис. 8. Развертки стандартного конуса типа $(2, \frac{1}{2})$ с разрезами, идущими по положительным полуосям осей t и x . В первом случае сектор между лучами V и t и сектор между лучами t' и U частично наложился друг на друга: сектор между t' и t покрыт разверткой два раза, т.е. имеет место избыток $\vartheta = \frac{1}{2}$ гиперболического угла во времениподобном секторе. Во втором случае сектор между U и x' и сектор между x и $-V$ оставляют между собой пустой промежуток от x' до x , т.е. имеет место дефицит $\vartheta = \frac{1}{2}$ гиперболического угла в пространственноподобном секторе

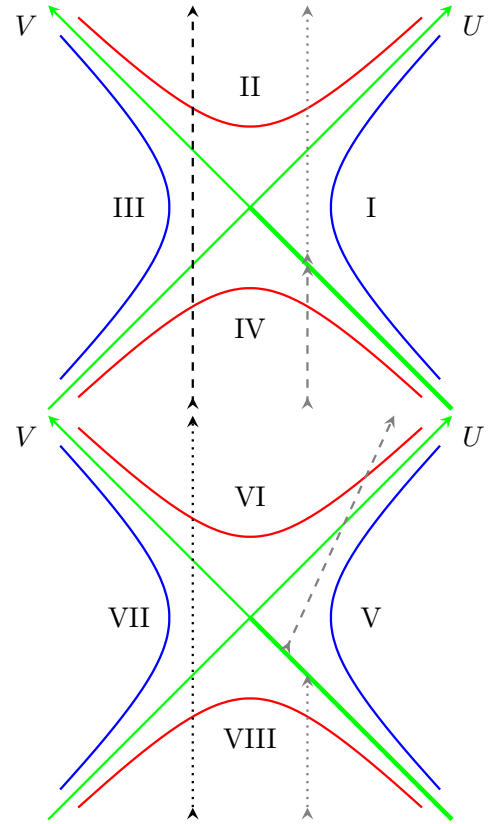


Рис. 9. Развертка конуса $(4, \frac{1}{2})$ состоит из двух экземпляров плоскости Минковского. Разрезы проведены по лучам «вперед в прошлое», вдоль которых склеены пары секторов IV–V (с бустом с быстротой $\frac{1}{2}$) и VIII–I (без буста). Показаны две пары мировых линий наблюдателей, летящих из двух секторов прошлого IV и VIII в два сектора будущего II и VI. Геодезические, проходящие из одного сектора прошлого по разные стороны вершины конуса, попадают в разные секторы будущего

2.5. Четные и нечетные конусы

Типичные конусы типа (N, ϑ) с четным и нечетным N (назовем их четными и нечетными) различаются с точки зрения причинности: у четных конусов времениподобные секторы можно разделить на будущие и прошлые так, чтобы они чередовались при обходе вершины, а у нечетных конусов это невозможно. Таким образом, четный конус $(2n, \vartheta)$ может рассматриваться как n -листное накрытие стандартного конуса $(2, \vartheta/n)$ (см. рис. 9).

На нечетном конусе типа $(1, \vartheta)$ времениподобные геодезические, обходя вершину конуса, разворачиваются во времени, при этом их релятивистская скорость $u^i = dx^i/d\tau$ меняет знак и подвергается бусту с параметром ϑ .

$$\frac{1}{2} \int R \sqrt{-g} d^4x \approx \sum_V |S(V)| \alpha'_V, \quad (6)$$

$$\alpha'_V = \begin{cases} \alpha_V, & V \text{ времениподобно,} \\ \vartheta_V, & V \text{ пространственноподобно,} \end{cases}$$

где площади всех $(D-2)$ -симплексов берутся по модулю $|S(V)| > 0$ (комплексные площади и дефициты углов мы пока не вводим). Данная формула предполагает, что все конические сингулярности Минковского являются стандартными (имеют тип $(2, \vartheta)$), это предположение подразумевается в литературе [10, 11], но явно обычно не оговаривается.

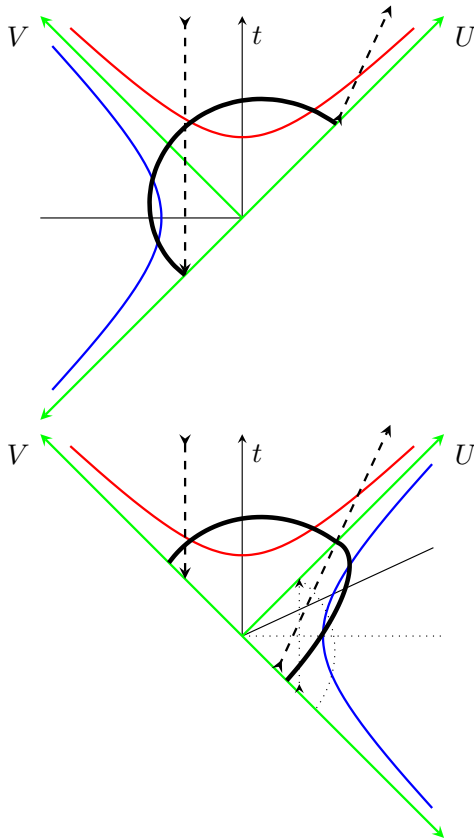


Рис. 10. Развертки нечетного конуса типа $(1, \frac{1}{2})$

На рис. 10 изображены развертки конуса типа $(1, \frac{1}{2})$. На первой развертке разрезы идут по оси U («вперед в будущее» и «назад в прошлое»). На второй развертке разрез идет по оси V («назад в будущее» и «вперед в прошлое»), по сравнению с первой разверткой сектор «лево» подвергся преобразованию центральной симметрии (развернулся в положение «право», результат показан пунктиром) и бусту с быстротой $\vartheta = \frac{1}{2}$, т.е. растянулся вдоль U и сжался вдоль V в $\sqrt{e}$ раз. Жирная кривая на самом деле замкнута (видимые разрывы располагаются на разрезах) и охватывает вершину конуса. Штриховая линия со стрелками — времениподобная геодезическая, обходящая вершину конуса и разворачивающаяся назад по времени.

По сравнению с евклидовым конусом, типичный конус (N, ϑ) имеет два параметра, аналогичных дефициту угла: ϑ и $2 - N$. Оба этих параметра могут давать свой вклад в действие (подобно дефициту угла в евклидовой ОТО). Вклад параметра ϑ мы уже установили. Вклад параметра $2 - N$ мы установим ниже (он окажется мнимым).

3. КОНИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЗНАКА МЕТРИКИ

Плоскость Минковского имеет дополнительную симметрию по сравнению с пространствами Минковского большей размерности. Она связана с тем, что число пространственных и временных координат совпадает и выбор, какую координату считать временной, а какую пространственной, оказывается произвольным. При преобразовании, которое задает эту симметрию, изменяется знак метрики и пространственноподобные кривые переходят во времениподобные и наоборот. Такая симметрия позволяет рассматривать триангуляции двумерных поверхностей, при которых склеиваются пространственноподобные ребра с времениподобными (длины склеиваемых ребер должны совпадать по модулю). Склеивка осуществляется путем комбинации буста и изменения знака метрики. Пространственноподобные и времениподобные секторы теперь неразличимы. Можно склеивать пространственноподобные лучи с времениподобными (но не со светоподобными). Как и при обычной склейке конусов, образующие, по которым проводится склейка, не выделены: разрез, чтобы развернуть конус на плоскость Минковского, можно провести по любой образующей. Параметр ϑ теперь определен только по модулю. В результате все четыре типа исключительных конусов сливаются в один.

Для типичных конусов условие чередования пространственноподобных и времениподобных секторов теряет смысл, так что общее число секторов $2N$ может быть нечетным. Такие конусы мы будем называть полуцелыми.

Для полуцелых конусов светоподобные образующие нельзя разделить на «правые» и «левые» так, чтобы они чередовались при обходе вершины. По этой причине преобразование Лоренца на полуцелом конусе не может быть определено однозначно: будет хотя бы один разрез, на берегах которого преобразование Лоренца будет действовать с разными знаками быстроты. Такой разрез можно выбрать по одной из светоподобных образующих. За счет того, что при преобразованиях Лоренца берега разреза подвергаются обратным преобразованиям, мы можем добиться, чтобы сшивка нечетного конуса из секторов осуществлялась вообще без использования бустов: у полуцелых конусов всегда $\vartheta = 0$. Примеры разверток полуцелых конусов приведены на рис. 11, 12.

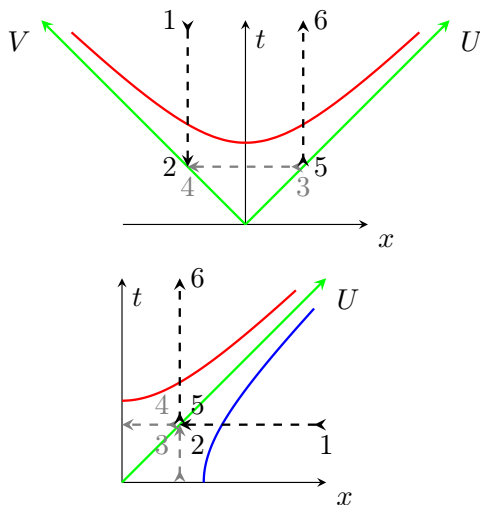


Рис. 11. Развертки полуцелого конуса типа $(\frac{1}{2}, 0)$. На первой развертке склеиваются лучи U и V , на второй — лучи x и t . Штриховая линия со стрелками 1–2–3–4–5–6 — геодезическая. Точки 2, 3, 4, 5 — это одна точка самопересечения геодезической

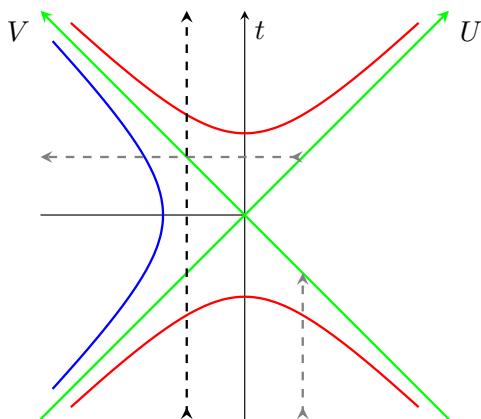


Рис. 12. Развертка полуцелого конуса типа $(\frac{3}{2}, 0)$. На развертке склеиваются лучи U и $-V$. Две геодезические проходят с двух сторон от вершины. Обе идут из сектора «прошлое», но для правой линии в роли «будущего» выступает сектор «лево». Как и для других полуцелых конусов, разделить пространственноподобные и времениподобные направления можно локально, но не глобально

Теперь нам необходимо вычислить действие для описанных конусов, но прежде мы сосредоточимся на одном важном моменте.

4. КОМПЛЕКСНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДЕФИЦИТОВ УГЛОВ И ПЛОЩАДЕЙ

Для пространства-времени с сигнатурой $(-, +, +, +)$ пространственноподобные интервалы выражаются вещественными числами, а времениподобные — мнимыми. Поэтому пространственноподобным треугольникам естественно приписать вещественную площадь, а времениподобным — мнимую. Следуя [10], будем считать, что площади пространственноподобных и времениподобных треугольников выражаются числами, лежащими на положительных полуосях вещественной и мнимой осей соответственно (положительными вещественными и «положительными мнимыми» числами). Круговые углы будем считать вещественными, а гиперболические — мнимыми.

Снова рассмотрим разбиение плоскости Минковского на четыре сектора, но уже с использованием комплексных чисел (выбор знаков снова соответствует статье [10]):

< «право» ($x > |t|$):

$$\begin{cases} x = r \cos(i\theta) = r \cos(i\theta + 2\pi), \\ it = r \sin(i\theta) = r \sin(i\theta + 2\pi); \end{cases} \quad (7)$$

∨ «будущее» ($t > |x|$):

$$\begin{cases} x = ir \cos\left(i\theta + \frac{\pi}{2}\right), \\ it = ir \sin\left(i\theta + \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \quad (8)$$

> «лево» ($x < -|t|$):

$$\begin{cases} x = r \cos(i\theta + \pi), \\ it = r \sin(i\theta + \pi); \end{cases} \quad (9)$$

∧ «прошлое» ($t < -|x|$):

$$\begin{cases} x = ir \cos\left(i\theta + \frac{3\pi}{2}\right), \\ it = ir \sin\left(i\theta + \frac{3\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (10)$$

Во всех секторах плоскости Минковского получаем псевдокоружность:

$$\begin{cases} x = R \cos(\varphi), \\ it = R \sin(\varphi); \end{cases} \quad R = +\sqrt{x^2 - t^2}, \quad (11)$$

$$\varphi = n\frac{\pi}{2} + i\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

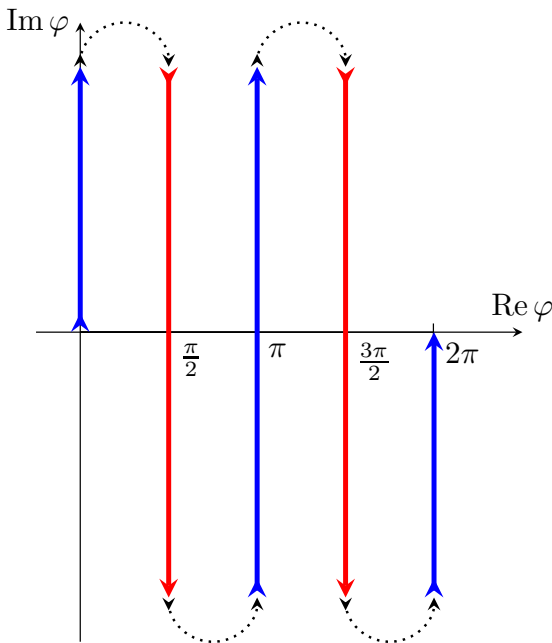


Рис. 13. На плоскости Минковского, как и на евклидовой плоскости, угол меняется с периодом 2π

Радиус R является вещественным положительным для пространственноподобных секторов и мнимым положительным для времениподобных. Угол φ при обходе вокруг начала координат, начиная с положительной полуоси x , ведет себя согласно рис. 13.

Мы можем определить круговой угол как изменение комплексного угла φ между любыми направлениями в плоскости Минковского, кроме светоподобных. Проводя границы между секторами по пространственноподобным и времениподобным направлениям, мы можем вычислить комплексный дефицит угла для конуса Минковского:

$$\alpha = 2\pi - \sum_k \varphi_k, \quad (12)$$

φ_k — угол между границами сектора с номером k .

Если брать стандартные конусы, то это воспроизводит определение дефицита угла из статьи Соркина [10]. Но теперь мы можем определить дефицит угла для любого конуса типа (N, ϑ) :

$$\alpha_{(N, \vartheta)} = (2 - N)\pi + i\vartheta. \quad (13)$$

Исключительные конусы также описываются данной формулой при $N = 0$.

Формула (13) дает нам ключ для вычисления действия для отдельных конусов и, следовательно, для вычисления действия Гильберта в целом.

5. ДЕЙСТВИЕ ГИЛЬБЕРТА

Действие Гильберта теперь удобно записать как

$$iS = \frac{i}{2} \int R \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \int R \sqrt{g} d^4x \approx \sum_V S(V) \alpha_V. \quad (14)$$

Все площади треугольников $S(V)$ являются положительными вещественными или положительными мнимыми, дефициты углов для евклидовых конусов — вещественными, а для конусов Минковского — комплексными (для стандартных конусов — чисто мнимыми).

Нестандартные конусы Минковского дают комплексный вклад в действие, что соответствует тому, что они не могут возникать при триангуляции классического (решающего классические уравнения движения) пространства-времени.

Мнимая добавка к действию от нестандартного конуса типа (N, ϑ) имеет вид

$$\begin{aligned} i\delta S_{(N, 0)} &= (2 - N)\pi S(V) \in \mathbb{R}, \\ \delta S_{(N, 0)} &= -i(2 - N)\pi S(V). \end{aligned} \quad (15)$$

Добавка $i\delta S$ положительна при $N < 2$ и отрицательна при $N > 2$.

Обсудим смысл нестандартных конусов Минковского.

Самое умеренное обобщение гравитации в скелетной геометрии состоит в том, чтобы разрешить только четные конусы Минковского.

Только четные конусы позволяют однозначно отделять прошлое и будущее. Типичным четным конусам при $N > 2$ соответствуют отрицательные добавки $i\delta S$, что может отвечать классически запрещенным процессам, которые тем не менее возможны в квантовом случае. Четные конические сингулярности при $N = 2n > 2$ соответствуют ветвлению пространства-времени, когда возникают n причинно не связанных между собой вариантов будущего (и прошлого). Из данного конкретного прошлого из n вариантов будущего доступны только два, которые выбираются в зависимости от того, с какой стороны обходится сингулярность. Сделать доступными более двух секторов будущего можно с помощью дополнительных конических сингулярностей, увеличивая количество ветвлений, каждое из которых дает выбор из двух вариантов.

В число четных конусов Минковского попадают исключительные конусы, которым мы приписали тип $(0, \vartheta)$. Для такого конуса $i\delta S = (2\pi + i\vartheta)S(V)$. Вещественная часть этого выражения $2\pi S(V) > 0$, что позволяет предположить связь с некоторым фазовым переходом. Исключительный конус содержит

только часть одного из четырех секторов плоскости Минковского. В случае если этот сектор — «будущее» $(0, \vartheta)_\vee$ ($\vartheta > 0$), такой конус устроен как сингулярность, в которой рождается расширяющееся пространство-время размерности $1+1$. Конусы, содержащие только пространственноподобные секторы ($\vartheta < 0$), вероятно, должны быть исключены, так как содержат замкнутые времениподобные мировые линии.

Теперь мы готовы обобщить наши размышления путем формулировки и обсуждения строгих правил склейки симплексов.

6. СКЛЕЙКА СИМПЛЕКСОВ ПРИ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ

Сформулируем более подробно правила склейки симплексов при триангуляции D -мерного пространства и обсудим их возможные модификации.

1. На всех D -симплексах метрика имеет одинаковую сигнатуру.

2. Два D -симплекса E_1 и E_2 имеют не более чем один общий $(D-1)$ -симплекс F .

3. Метрики, полученные ограничением на $(D-1)$ -симплекс F метрики D -симплекса E_1 и метрики D -симплекса E_2 , совпадают.

4. Каждый d -симплекс ($d < D$) может быть общим только для конечного числа симплексов большей размерности.

5. В каждом ортогональном сечении пространственноподобного $(D-2)$ -симплекса V количество светоподобных лучей, выходящих из точки $v \in V$, равно 4.

6. Окрестность каждой точки триангуляции гомеоморфна D -мерному шару.

При выполнении всех шести условий склейки триангуляция может содержать только евклидовы конусы и стандартные конусы Минковского, что соответствует стандартному исчислению Редже.

Стандартное исчисление Редже предполагает, что скелетная геометрия является приближением к геометрии некоторого гладкого пространства-времени, не содержащего сингулярностей. Однако многие физически осмысленные решения уравнений Эйнштейна содержат сингулярности. Поэтому естественно попытаться обобщить исчисление Редже, сделав допустимыми триангуляции, которые не могут быть непрерывно деформированными к пространству-времени без сингулярностей. Новым допустимым склейкам симплексов при этом следует

приписать дополнительный вклад в действие (возможно, комплексный).

Интересно было бы отменить или ослабить правила склейки 5, 1 и 6.

Обобщение, рассмотренное выше, допускающее четные конусы Минковского, предполагает ослабление условия 5 до следующего условия:

5'. В каждом ортогональном сечении пространственноподобного $(D-2)$ -симплекса V количество светоподобных лучей, выходящих из точки $v \in V$, делится на 4.

Если от условия 5 вообще отказаться, то станут возможны как четные, так и нечетные конусы Минковского. Такая геометрия плохо различает прошлое и будущее и требует отдельного рассмотрения с точки зрения причинности.

Если отказаться от условия 1, то допускается геометрия пространства-времени с переменной сигнатурой. Такой подход полезен для рассмотрения возникновения Вселенной в модели Хокинга–Хартла [12]. Классификация конических сингулярностей при этом расширяется: становятся возможны конические сингулярности переменной сигнатуры, когда в ортогональном сечении $(D-2)$ -симплекса присутствуют секторы с разной сигнатурой. Такие сингулярности мы рассматриваем в разд. 7.

Интересно было бы отказаться также от условия 6. В этом случае следует для каждой точки, малая окрестность которой не гомеоморфна шару, ввести свой вклад в действие. Отказ от условия 6 требует классификации всех таких особенностей. Для двумерного пространства условие 6 выполняется автоматически. Для трехмерного пространства классификация особенностей, нарушающих условие 6, может основываться на топологии границы маленького шара с центром в вершине триангуляции, а соответствующий вклад в действие может быть пропорционален отлнчению эйлеровой характеристики границы этого шара от двух (два — эйлерова характеристика двумерной сферы). Для размерности $D > 3$ такие сингулярности локализованы на $(D-3)$ -симплексах, соответствующий вклад в действие (вероятно, мнимый) должен быть пропорционален объему $(D-3)$ -симплекса (в четырехмерном случае — длине ребра). Исследование сингулярностей, возникающих при отмене правила склейки 6, требует отдельного рассмотрения.

Мы рассмотрели различные модификации, которые интересны с точки зрения классической физики, но квантовый мир может подарить нам еще одну возможность.

7. КОНИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ СИГНАТУРЫ

Работа Хокинга–Хартла [12] привлекла внимание к необходимости рассматривать в рамках квантовой гравитации пространство-время с переменной сигнатурой. В таком пространстве выделены границы доменов с разной сигнатурой (доменные стенки), которые представляют собой поверхности размерности $D - 1$. При триангуляции без условия склейки 1 каждый D -симплекс лежит в пределах одного домена с определенной сигнатурой. При этом часть $(D - 1)$ -симплексов ложится на доменную стенку. Если $(D - 2)$ -симплекс лежит на доменной стенке, то на соответствующей конической сингулярности сходятся секторы с разной сигнатурой.

При склейке двух соседних D -симплексов E_1 и E_2 на них можно ввести общую систему координат с постоянным метрическим тензором, только если сигнатуры метрик на E_1 и E_2 одинаковы. В этом случае внутренние точки разграничивающего E_1 и E_2 $(D - 1)$ -симплекса никаких особенностей не несут. Если сигнатуры метрик на E_1 и E_2 различны, то разграничивающий их $(D - 1)$ -симплекс — часть доменной стенки.

Мы по-прежнему можем классифицировать конусы по числу светоподобных образующих, но между двумя такими образующими пространственноподобный или времениподобный сектор может разрываться любым конечным числом евклидовых секторов с сигнатурой $(+, +)$ или $(-, -)$ соответственно.

Условие склейки треугольников — равенство интервала вдоль склеиваемых сторон. Таким образом, метрики, индуцируемые с двух сторон на границе симплексов, должны совпадать, а сигнатуры склеиваемых треугольников могут различаться не более, чем на один знак. Такие границы склейки (пространственно- и времениподобные) соответствуют доменным стенкам и уже не являются произвольными, поскольку на них локализована неустраняемая особенность метрического тензора (изменение сигнатуры). Кроме неустраняемых разрезов могут быть устранимые разрезы, которые разделяют секторы с одинаковой сигнатурой.

Такая сингулярность описывается последовательностью комплексных и вещественных углов между последовательными разрезами (пространственно- или времениподобными), при обходе вершины конуса против часовой стрелки: $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Последовательность $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ определена с точностью до циклических перестановок. Кроме то-

го, если подряд идут два сектора с одной сигнатурой, то граница между ними является устранимой и секторы можно объединить, а соответствующие углы сложить. После такого объединения углы, отвечающие евклидовым $((+, +)$ или $(-, -)$ секторам, и углы, отвечающие секторам Минковского, чередуются. Договоримся, что последовательность всегда начинается с евклидова сектора, а заканчивается сектором Минковского. Если евклидовы секторы или секторы Минковского отсутствуют, то будем считать, что соответствующий угол равен нулю.

Для евклидова конуса имеем последовательность $(\varphi, 0)$, для конуса Минковского типа (N, ϑ) имеем последовательность $(0, N\frac{\pi}{2} - i\vartheta)$.

Осталось сопоставить такому конусу некоторый дефицит угла и соответствующий вклад в действие.

При изменении знака метрики скалярная кривизна меняет знак (см. Приложение). По аналогии предположим, что при изменении знака метрики должен меняться и знак вклада в действие конуса с переменной сигнатурой. Вследствие этого, если круговой угол в секторе с сигнатурой $(+, +)$ считается вещественным положительным (как для евклидова конуса), то круговой угол в секторе с сигнатурой $(-, -)$ — вещественным отрицательным.

Секторам с сигнатурой $(+, +)$ и $(-, -)$ отвечают вещественные положительные и отрицательные углы соответственно. Секторам с сигнатурой $(+, -)$ соответствуют комплексные углы вида $i\vartheta + k\frac{\pi}{2}$, где $\vartheta \in \mathbb{R}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Конусу переменной сигнатуры с последовательностью углов $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ можно приписать комплексный дефицит угла:

$$\alpha = 2\pi - \sum_{m=1}^n \varphi_m. \quad (16)$$

Соответствующий вклад в действие выражается прежней формулой:

$$i\delta S = S(V)\alpha_V. \quad (17)$$

Пограничные симплексы (в двумерном случае — отрезки), на которых происходит перемена сигнатуры, могут давать вклад в действие, пропорциональный объему (длине) такой границы. То есть мы можем добавить в действие член, пропорциональный объему (длине) доменной стенки. Естественно брать вклад $i\delta S$ мнимым положительным для времениподобных поверхностей (отрезков), как для релятивистских мембран (частиц), и вещественным положительным для пространственноподобных поверхностей (отрезков), как для тахионов.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исчисление Редже с нестандартными ($N \neq 2$) коническими сингулярностями Минковского позволяет выйти за пределы общей теории относительности и рассматривать процессы ветвления и возникновения пространства-времени. То, что соответствующее действие оказывается комплексным, показывает, что эти процессы не описываются в рамках классической теории, но могут описываться квантовой теорией.

Исчисление Редже с симплексами различной сигнатуры может представлять значительный интерес с точки зрения развития идей Хокинга и Хартла, поскольку допускает вычисление действия и соответствующего «интеграла по траекториям» для значительно большего класса пространственно-временных конфигураций.

В данной статье основное внимание было уделено классификации конических сингулярностей и возможному их вкладу в действие. Изучение различных обобщений исчисления Редже требует дальнейших исследований.

Благодарности. Авторы благодарят С. Н. Вергелеса, А. Я. Мальцева, В. А. Дудченко и М. О. Катанаева за интерес к теме, полезное обсуждение и помощь в работе над статьей.

Финансирование. Работа З. В. Хайдукова выполнена при поддержке гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» № 22-1-3-59-1.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СОГЛАШЕНИЯ, ЗНАКИ

В литературе по общей теории относительности используются разные соглашения о знаках. Здесь приведены некоторые определения и ключевые формулы с теми знаками, которые мы используем.

Для метрики пространства-времени g_{ij} предполагается сигнатура $(-, +, +, +)$. Временная координата $t = x^0$, пространственные координаты: $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$.

В разд. 3 возможны любые сигнатуры, включая $(+, +, +, +)$, $(-, -, +, +)$, $(-, -, -, +)$, $(-, -, -, -)$.

Коэффициенты связности (на гладком многообразии) предполагаются симметричными метрическими:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{il}}{2} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (18)$$

При изменении знака метрики $g_{ij} \rightarrow -g_{ij}$ коэффициенты связности остаются неизменными: $\Gamma^i_{jk} \rightarrow \Gamma^i_{jk}$.

Изменение знака метрики в первую очередь интересно для нас с точки зрения перестановки осей x и t на плоскости Минковского.

Тензоры Римана и Риччи записываются в виде

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml} \Gamma^m_{jk}, \quad (19)$$

$$R_{jl} = R^k_{jkl}. \quad (20)$$

При изменении знака метрики тензоры Римана и Риччи также остаются неизменными.

Скалярная кривизна

$$R = R_{jl} g^{jl} \quad (21)$$

при изменении знака метрики меняет знак.

В двумерном пространстве тензор Римана имеет одну независимую компоненту R_{1212} для евклидовой плоскости и R_{1010} для плоскости Минковского. В случае, если метрика слабо отличается от метрики Евклида (Минковского), или в ортонормированном базисе имеем

$$R_{1212} = R^1_{212} = \frac{R}{2}, \quad R_{1010} = R^1_{010} = -\frac{R}{2}. \quad (22)$$

Относительное ускорение соседних геодезических выражается уравнением (см. [6], т. 1, гл. 11, с. 331)

$$\begin{aligned} \nabla_u \nabla_u n^i + R^i_{jkl} u^j n^k u^l &= 0, \\ \nabla_u n^i &= \partial_u n^i + \Gamma^i_{jk} n^j u^k. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь u^i — единичная касательная к геодезической, n^i — разделяющий вектор, соединяющий данную геодезическую с соседней (бесконечно близкой) геодезической.

Пусть две геодезические сближаются в двумерном пространстве с геометрией, близкой к геометрии Евклида или Минковского (нам достаточно линейного приближения для определения знака эффекта). Пусть в данный момент времени векторы n^i и u^i имеют по одной ненулевой компоненте $n^1 = 1$ и $u^a = 1$. Здесь $u^a = u^2$ для евклидовой сигнатуры или $u^a = u^0$ для сигнатуры Минковского. Тогда

$$\nabla_u \nabla_u n^1 = -R^1_{a1a} = -R_{1a1a} < 0. \quad (24)$$

Это дает нам $R > 0$ для евклидовой сигнатуры и $R < 0$ для сигнатуры Минковского.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Regge, *Nuovo Cim.* **19**, 558 (1961).
2. T. Levi-Civita, *Rend. Accad. Naz. Lincei* **28**, 101 (1919).
3. J. R. Gott, *Astrophys. J.* **288**, 422 (1985).
4. W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* **31**, 3288 (1985).
5. J. C. Feng, J. P. S. Lemos, and R. A. Matzner, *Phys. Rev. D* **103**, 124037 (2021).
6. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco (1973); Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, Москва (1977).
7. R. Friedberg and T. D. Lee, *Nucl. Phys. B* **242**, 145 (1984).
8. G. Feinberg, R. Friedberg, T. D. Lee et al., *Nucl. Phys. B* **245**, 343 (1984).
9. R. Friedberg and T. Lee, *Selected Papers: Random Lattices to Gravity*, Birkhäuser (1986), pp. 242, 213.
10. R. Sorkin, *Phys. Rev. D* **12**, 385 (1975).
11. L. Brewin, *Class. Quant. Grav.* **28**, 185005 (2011).
12. J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983).