ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 1 (7), стр. 125–137 © 2025

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ МОД И ЗОНАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТОКАМАКАХ С ТОРОИДАЛЬНЫМ ВРАЩЕНИЕМ ПЛАЗМЫ

В. П. Лахин[*]

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 февраля 2025 г.,
после переработки 16 апреля 2025 г.
Принята к публикации 17 апреля 2025 г.

В приближении слабой нелинейности исследовано взаимодействие геодезических акустических мод (ГАМ) и низкочастотных зональных течений в токамаках с тороидальным вращением плазмы. Показано, что определяющее влияние на зональное течение оказывают нелинейные эффекты, обусловленные самим зональным течением. Из-за своей малой частоты уже при небольших амплитудах зональное течение становится заведомо нелинейным. Получено условие, при котором зональное течение может быть описано в приближении слабой нелинейности. Вместе с тем основное влияние на ГАМ оказывает ее нелинейное взаимодействие с зональным течением. В результате взаимодействия возникают сателлиты ГАМ с частотами, равными сумме и разности частот ГАМ и зонального течения. Частоты сателлитов качественно согласуются с частотами сателлитов, наблюдаемых в спектре колебаний потенциала в токамаке Т-10. При этом в противоречии с экспериментальными результатами вычисленные амплитуды сателлитов малы по сравнению с амплитудой ГАМ.

DOI: 10.31857/S0044451025070120

1. ВВЕДЕНИЕ

Зональные течения являются повсеместным явлением в природе. Особенно хорошо они прослеживаются в атмосфере Юпитера. Они также присутствуют в атмосфере Венеры, в земной атмосфере и океанах, в солнечном тахоклине. Зональные течения и геодезические акустические моды (ГАМ), называемые иногда высокочастотными зональными течениями, также являются широко распространенными явлениями в лабораторной плазме в современных тороидальных установках магнитного удержания (токамаках, стеллараторах). По существующим на данный момент представлениям, основанным на экспериментальных наблюдениях, теоретическом анализе и численном моделировании, они являются неотъемлемым элементом мелкомасштабной турбулентности плазмы и играют критическую роль в регулировании аномального переноса плазмы. В этой связи за последние 25 лет им посвящено огромное количество публикаций (см., например, обзоры [1–3] и приведенные в них ссылки). Вместе с тем до полного понимания многих их свойств, а также некоторых явлений, связываемых с зональными течениями и ГАМ, весьма далеко. Одним из таких загадочных явлений, не имеющим должного теоретического объяснения, является регулярно наблюдаемый в спектре колебаний электростатического потенциала плазмы на токамаке Т-10 дополнительный пик амплитуды на частоте, близкой к теоретически предсказанной частоте ГАМ [4–9]. Потенциал, характеризующий дополнительный пик колебаний, как и ГАМ, имеет осесимметричную структуру и не зависит от полоидального и тороидального углов ($m = 0$, $n = 0$, где m и n – полоидальное и тороидальное волновые числа), а его частота изменяется при изменении температуры плазмы. Дополнительный пик фиксируется с использованием самых различных диагностик плазмы (корреляционной рефлектометрии, ленгмюровских зондов, диагностики пучком тяжелых ионов) и получил у экспериментаторов название сателлита ГАМ. О наблюдении аналогичного явления посредством корреляционной рефлектометрии в экспериментах на тока-

[*] E-mail: Lakhin_VP@nrcki.ru

маке TEXTOR сообщалось в работе [10]. Сателлиты ГАМ фиксировались также на токамаке STOR-M с помощью ленгмюровских зондов [11]. Линейная теория не предсказывает появления дополнительного колебания с частотой, близкой к частоте ГАМ, обладающего приведенными выше свойствами. Также следует отметить, что наблюдаемый на многих установках характер ГАМ как собственной моды колебаний с постоянной по радиусу частотой (~ 20 кГц) и даже амплитудой [12] не был пока удовлетворительно объяснен теорией. Можно предположить, что эти явления обусловлены нелинейными эффектами.

При наличии в токамаке равновесного тороидального вращения из-за центробежного эффекта возникает стратификация по полоидальному углу давления и плотности плазмы на магнитных поверхностях токамака (см., например, [13]). Вкупе с кривизной силовых линий магнитного поля такая стратификация приводит к тому, что, как показано в линейной теории [13–15], в плазме существует две ветви осесимметричных электростатических колебаний, характеризуемых потенциалом с $m = 0,\ n = 0$. Одной из ветвей является ГАМ, модифицированная эффектами вращения, а вторая ветвь имеет частоту, много меньшую частоты ГАМ, и обращается в нуль в отсутствие вращения. Такую моду в литературе принято называть низкочастотным зональным течением. Она характеризуется осциллирующими с малой частотой электростатическим потенциалом и движением плазмы на магнитных поверхностях (подобно ГАМ). В дальнейшем в данной работе под зональным течением (в расширенном смысле этого понятия) будем понимать именно эту моду колебаний плазмы.

Задача о нелинейном взаимодействии ГАМ с низкочастотным зональным течением рассматривается в рамках одножидкостной магнитогидродинамической (МГД) модели. Эта модель приводится в разд. 2. Впервые она была предложена в недавней работе [16]. Нелинейность, учитываемая в данной модели, обусловлена $E\times B$-дрейфом плазмы в скрещенных возмущенном электрическом поле и равновесном магнитном поле. Это — так называемая векторная нелинейность. В силу того, что возмущенный электростатический потенциал рассматриваемых возмущений зависит только от метки магнитной поверхности, нелинейные эффекты проявляются только в уравнениях сателлитных полоидальных гармоник с $m = \pm 1$ возмущений давления, массовой плотности и скорости плазмы вдоль магнитного поля, сопровождающих возмущение потенциала плазмы. Используемая МГД-модель описывает взаимодействие ГАМ с низкочастотным зональным течением на магнитной поверхности. В разд. 3 в приближении слабой нелинейности исследуется взаимодействие ГАМ и зональных течений. Вводится соответствующий малый параметр нелинейности, проводится упорядочение возмущенных величин и применяется стандартный метод асимптотического разложения по малому параметру. Вопрос о применимости МГД-модели к интерпретации экспериментальных результатов обсуждается в разд. 4. Также в этом разделе суммированы полученные в настоящей работе результаты и следующие из них выводы, а также критически обсуждаются результаты недавней работы [16].

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Будем описывать плазму следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}=-\nabla p+\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B},\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})=0,\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla p+\gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0,\\
&\mathbf{v}\times\mathbf{B}=c\nabla\phi,
\end{aligned}\tag{1}$$

где $\rho, \mathbf{v}, p$ — массовая плотность, скорость и давление плазмы, $\mathbf{B}$ — индукция равновесного магнитного поля, c — скорость света, а ϕ — электростатический потенциал, описывающий электрическое поле. В рамках модели предполагается рассматривать электростатические возмущения плазмы, при которых магнитное поле не возмущается. Термодинамическое состояние плазмы описывается уравнением адиабаты с показателем γ.

Осесимметричное МГД-равновесие в токамаке с чисто тороидальным вращением плазмы в стандартной цилиндрической системе координат $\{R,\varphi,Z\}$ описывается хорошо известными соотношениями [13, 17]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}=I(\psi)\nabla\varphi+\nabla\varphi\times\nabla\psi,\quad \phi_0=\phi_0(\psi),\\
&\mathbf{v}_0=R^2\Omega\nabla\varphi,\quad \Omega\equiv-c\,d\phi_0/d\psi,\\
&R^2\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\psi}{R^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{dI^2}{d\psi}+\\
&+4\pi R^2\frac{(\nabla p_0-\rho_0\Omega^2\nabla R^2/2)\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}=0.
\end{aligned}\tag{2}$$

Равновесные температура и плотность плазмы однозначно не определяются в рамках одножидкостной

МГД-модели, но должны удовлетворять равновесному уравнению движения плазмы вдоль магнитного поля

$$\frac{\rho_0 \Omega^2}{2}\mathbf{B}\cdot\nabla R^2 = \mathbf{B}\cdot\nabla p_0. \tag{3}$$

Для определенности будем полагать, что из-за высокой теплопроводности температура плазмы постоянна на магнитных поверхностях токамака, так что $p_0 = T(\psi)\rho_0$. Тогда

$$\begin{aligned} p_0 &= p(\psi)\exp(\Omega^2 R^2/2T(\psi)),\\ \rho_0 &= \rho(\psi)\exp(\Omega^2 R^2/2T(\psi). \end{aligned} \tag{4}$$

Возмущения плазмы будем описывать в потоковых координатах $\{\psi, \theta, \varphi\}$ с выпрямленными силовыми линиями, в которых коэффициент запаса устойчивости токамака q не зависит от полоидального угла и является функцией магнитной поверхности:

$$q \equiv \frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\varphi}{\mathbf{B}\cdot\nabla\theta} = q(\psi).$$

Здесь θ — полоидальный угол.

Рассматриваем осесимметричные электростатические возмущения приведенного равновесия плазмы, не зависящие от тороидального угла φ. Представляем все величины, входящие в уравнения (1), в виде суммы равновесной величины, обозначаемой нижним индексом «0», и ее возмущения, которое будем обозначать штрихом. Тогда из последнего уравнения в (1) получаем

$$\mathbf{v}'\times\mathbf{B} = \mathrm{c}\nabla\phi'.$$

Отсюда следует, что $\phi' = \phi'(\psi)$, а возмущенная скорость плазмы направлена вдоль магнитных поверхностей токамака и описывается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \frac{\mathrm{c}\mathbf{B}\times\nabla\psi}{B^2}\frac{\partial\phi'}{\partial\psi} + \frac{v'_\parallel}{B}\mathbf{B} =\\ = \left(\frac{cI}{B^2}\frac{\partial\phi'}{\partial\psi} + \frac{v'_\parallel}{B}\right)\mathbf{B} - cR^2\frac{\partial\phi'}{\partial\psi}\nabla\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда с учетом выражения (5) уравнения для возмущенного давления и возмущенной продольной скорости плазмы записываем в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{qIA}{B^2}\mathbf{B}\cdot\nabla(p_0 + p') + \\ &+\gamma p_0\left(qIA\mathbf{B}\cdot\nabla\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B}\mathbf{B}\cdot\nabla v'_\parallel\right) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial v'_\parallel}{\partial t} + \frac{qIA}{B^2}\mathbf{B}\cdot\nabla v'_\parallel + \frac{q\Omega A}{B}\mathbf{B}\cdot\nabla R^2 = -\frac{\mathbf{B}\cdot\nabla p'}{\rho_0 B}. \tag{7}$$

Здесь $A = (c/q)\partial\phi'/\partial\psi$ — угловая скорость полоидального вращения плазмы под действием возмущенного радиального электрического поля:

$$\mathbf{v}'_E\cdot\nabla\theta \equiv \frac{c\mathbf{B}\times\nabla\phi'}{B^2}\cdot\nabla\theta \equiv \frac{cI^2}{qR^2B^2}\frac{\partial\phi'}{\partial\psi} \approx A.$$

Для описания возмущенной плотности в дальнейшем удобно пользоваться уравнением, следующим из уравнения непрерывности при вычитании из него уравнения (6) с коэффициентом c_s^{-2}, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho' - \frac{p'}{c_s^2}\right) + \frac{qIA}{B^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\rho' - \frac{p'}{c_s^2}\right) - \\ - \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{qIA}{B^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\ln\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $c_s \equiv (\gamma\bar{p}_0/\bar{\rho}_0)^{1/2}$ — скорость звука, а $\bar{p}_0$, $\bar{\rho}_0$ — усредненные по магнитной поверхности значения давления и массовой плотности плазмы.

Для замыкания системы уравнений (6)–(8) необходимо получить уравнение, описывающее временну́ю эволюцию A. Для этого умножаем уравнение движения плазмы на величину $R^2\mathbf{B}_p/\mathbf{B}_p\cdot\nabla\theta$, где $\mathbf{B}_p = \nabla\varphi\times\nabla\psi$, и интегрируем по магнитной поверхности, учитывая при этом уравнение (7). В результате получаем

$$\begin{aligned} \oint\frac{Id\theta}{\mathbf{B}_p\cdot\nabla\theta}\Bigg[\rho_0 q\frac{|\nabla\psi|^2}{B^2}\frac{\partial A}{\partial t} - Ip'\mathbf{B}\cdot\nabla\frac{1}{B^2} - \\ - \left(\rho_0\Omega\frac{v'_\parallel}{B} + \frac{\rho' I\Omega^2}{2B^2}\right)\mathbf{B}\cdot\nabla R^2\Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что, как уже было сказано во Введении, определяющая нелинейность в рассматриваемой проблеме обусловлена возмущенным дрейфом плазмы в скрещенных полях — магнитном и возмущенном электрическом, и описывается оператором

$$\mathbf{v}'_E\cdot\nabla \equiv (qIA/B^2)\mathbf{B}\cdot\nabla.$$

Это — так называемая векторная нелинейность. Поскольку величина A зависит лишь от магнитного потока ψ и не зависит от полоидального угла θ, то нелинейность в уравнении (9) отсутствует и это уравнение является линейным по амплитуде возмущений.

Отметим, что система уравнений (6)–(9) с точностью до обозначений идентична системе уравнений, впервые предложенной в недавней работе [16] (см. уравнения (11)–(13), (15) указанной работы).

В дальнейшем будем рассматривать упрощенную модель токамаков с большим аспектным отношением $R_0/a \gg 1$ (R_0 и a — большой и малый радиусы токамака) и круглыми концентрическими магнитными поверхностями, так что

$$\psi = \psi(r), \quad R \approx R_0 + r\cos\theta, \quad Z = r\sin\theta.$$

В этом приближении

$$p_0 = \bar{p}_0(r)\left(1 + \frac{r}{R_0}\gamma M^2\cos\theta\right),$$

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0 \cdot \frac{p_0(r)}{\bar{p}_0(r)},$$

где $M \equiv \Omega R_0/c_s$ — звуковое число Маха. Из-за центробежной силы, обусловленной тороидальным вращением плазмы, имеет место стратификация ее давления и массовой плотности по полоидальному углу. Амплитуда магнитного поля в используемом приближении дается выражением $B_0 = B_s R_0/R$, где B_s — значение поля на магнитной оси.

Как хорошо известно из предшествующих исследований [14], осесимметричные возмущения плазмы типа зональных течений характеризуются угловой скоростью полоидального вращения плазмы под действием возмущенного радиального электрического поля A и возмущениями давления, массовой скорости и продольной скорости в виде

$$\begin{aligned} p' &= p^c\cos\theta + p^s\sin\theta, \\ \rho' &= \rho^c\cos\theta + \rho^s\sin\theta, \\ v'_\parallel &= v^c\cos\theta + v^s\sin\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

Представляя указанные величины в виде (10), переписываем систему уравнений (6)–(9) и получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p^c}{\partial t} + \frac{\gamma p_0}{qR_0}v^s = -Ap^s, \\
&\frac{\partial v^s}{\partial t} - \frac{p^c}{\rho_0 qR_0} = \frac{2r}{R_0}c_s MA + Av^c, \\
&\frac{\partial p^s}{\partial t} - \frac{\gamma p_0}{qR_0}v^c = \frac{2r}{R_0}\gamma p_0\left(1 + \frac{M^2}{2}\right)A + Ap^c, \\
&\frac{\partial v^c}{\partial t} + \frac{p^s}{\rho_0 qR_0} = -Av^s, \\
&\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{rR_0}\left\{\frac{p^s}{\rho_0}\left(1 + \frac{M^2}{2}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{M^2c_s^2}{2}\frac{\delta\rho^s}{\rho_0} + Mc_s v^s\right\} = 0, \\
&\frac{\partial \delta\rho^c}{\partial t} = -A\delta\rho^s, \\
&\frac{\partial \delta\rho^s}{\partial t} = \frac{r}{R_0}\rho_0(\gamma-1)M^2A + A\delta\rho^c.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь и далее под p_0 и ρ_0 подразумеваются усредненные по магнитной поверхности значения соответствующих величин, а $\delta\rho^k \equiv \rho^k - p^k/c_s^2$, $k = (c, s)$.

Для дальнейших вычислений первые пять уравнений системы уравнений (11) удобно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\hat{D}p^c = -\frac{2r}{R_0}\gamma p_0\frac{\omega_s}{q}MA - \frac{\partial}{\partial t}(Ap^s) - \frac{\gamma p_0}{qR_0}Av^c, \\
&\hat{D}p^s = \frac{2r}{R_0}\gamma p_0\left(1 + \frac{M^2}{2}\right)\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(Ap^c) - \frac{\gamma p_0}{qR_0}Av^s, \\
&\hat{D}v^s = \frac{2r}{R_0}c_s M\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(Av^c) - \frac{1}{qR_0}A\frac{p^s}{\rho_0}, \\
&\hat{D}v^c = -\frac{2r}{R_0}c_s\frac{\omega_s}{q}\left(1 + \frac{M^2}{2}\right)A - \frac{\partial}{\partial t}(Av^s) - \frac{1}{qR_0}A\frac{p^c}{\rho_0}, \\
&\hat{L}\,A + \frac{1}{rR_0}\left\{\left(1 + \frac{M^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(A\frac{p^c}{\rho_0}) - c_s\frac{\omega_s}{q}Av^s\right) + \right. \\
&+ Mc_s\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(Av^c) - \frac{1}{qR_0\rho_0}Ap^s\right) + \\
&\left. + \frac{M^2}{2}c_s^2\hat{D}\left(A\frac{\delta\rho^c}{\rho_0}\right)\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $\omega_s = c_s/R_0$, а линейные дифференциальные операторы $\hat{D}$ и $\hat{L}$ определены выражениями

$$\hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\omega_s^2}{q^2}, \quad \hat{L} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_G^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_Z^2\right). \tag{13}$$

Последнее из этих уравнений получается из пятого уравнения в (11) путем применения к нему оператора $\hat{D}\,\partial/\partial t$. Здесь ω_G и ω_Z — частоты возмущений типа зональных течений в токамаке с тороидальным вращением плазмы. Они описываются полученным ранее в работах [14, 15] дисперсионным уравнением

$$\omega^4 - \left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2}\right)\omega_s^2\omega^2 + \\ + \frac{M^4(\gamma-1)}{2q^2}\omega_s^4 = 0, \tag{14}$$

и даются выражениями

$$\omega_G = \omega_1, \ \omega_Z = \omega_2,$$

где

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_s^2}{2}\left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2} \pm \right. \\ \left. \pm\sqrt{\left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2}\right)^2 - \frac{2(\gamma-1)M^4}{q^2}}\right). \tag{15}$$

В приближении малых скоростей тороидального вращения плазмы, $M^2 \ll 1$, высокочастотная ветвь колебаний переходит в классическую геодезическую акустическую моду, а частота низкочастотной ветви колебаний пропорциональна M^2 и в отсутствие равновесного вращения обращается в нуль, что соответствует классическому зональному течению:

$$\omega_G^2 = \left(2 + \frac{1}{q^2}\right)\omega_s^2, \quad \omega_Z^2 = \frac{(\gamma - 1)M^4}{2(1 + 2q^2)}\omega_s^2. \qquad (16)$$

Поэтому в литературе принято идентифицировать высокочастотную моду с частотой ω_G как ГАМ, а низкочастотную с частотой ω_Z — как зональное течение. Заметим, что при типичных значениях коэффициента запаса устойчивости токамака q и числа Маха M частота зонального течения мала по сравнению с частотой ГАМ, $\omega_Z \ll \omega_G$ (см. рис. 1 из работы [14]).

В пренебрежении нелинейными членами последнее уравнение в (12) описывает два осциллятора с частотами ω_G и ω_Z. Нелинейность приводит к сцеплению этих осцилляторов. Таким образом, по сути система уравнений (12), дополненная уравнениями для возмущений плотности плазмы $\delta\rho$, приведенными в (11), описывает нелинейное взаимодействие двух сцепленных осцилляторов, которые в приближении бесконечно малых амплитуд характеризуются частотами ω_G и ω_Z. Безусловно, при сильной нелинейности найти аналитическое решение этих уравнений не представляется возможным. Поэтому далее исследуем взаимодействие этих осцилляторов в приближении слабой нелинейности.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАМ И ЗОНАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ

Нелинейные эффекты входят в рассматриваемую в настоящей работе модель строго в комбинации

$$\partial/\partial t + \mathbf{v}'_E \cdot \nabla = \partial/\partial t + A\partial/\partial\theta.$$

Поэтому говорить в первом приближении о модах с частотами ω_G и ω_Z можно тогда и только тогда, когда линейные частоты существенно превышают нелинейные эффекты, так что $\partial/\partial t \gg A\partial/\partial\theta$, т. е. с учетом того, что $\omega_Z \ll \omega_G$, при выполнении условия

$$\mu \equiv |A|/\omega_Z \ll 1.$$

В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполняется. Тогда систему уравнений (11), (12) можно решить, воспользовавшись стандартным методом асимптотического разложения по малому параметру нелинейности μ. Представим все возмущения в виде разложения

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots .$$

3.1. Нулевой порядок по параметру μ

В нулевом порядке по малому параметру μ решением уравнений является суммарная комбинация ГАМ и зонального течения

$$A = A_{0G}\, e^{i\omega_G t} + A_{0Z}\, e^{i\omega_Z t} + \text{c.c.}, \qquad (17)$$

где c.c. означает комплексно-сопряженную величину. Аналогичную временну́ю зависимость имеют и соответствующие полоидальные гармоники возмущений давления, продольной скорости и массовой плотности плазмы

$$p^c = p^c_{0G}\, e^{i\omega_G t} + p^c_{0Z}\, e^{i\omega_Z t} + \text{c.c.}, \cdots .$$

Из уравнений (11) и (12) следует, что их комплексные амплитуды связаны с A_{0G} и A_{0Z} выражениями

$$\begin{aligned}
p^c_{0j} &= \frac{2r}{R_0}\gamma p_0 M \frac{\omega_s}{qD(\omega_j)} A_{0j}, \\
v^s_{0j} &= -\frac{2ir}{R_0} M c_s \frac{\omega_j}{D(\omega_j)} A_{0j}, \\
p^s_{0j} &= -\frac{2ir}{R_0}\gamma p_0 \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\omega_j}{D(\omega_j)} A_{0j}, \\
v^c_{0j} &= \frac{2r}{R_0} c_s \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\omega_s}{qD(\omega_j)} A_{0j}, \\
\delta\rho^c_{0j} &= 0; \quad \delta\rho^s_{0j} = -\frac{ir}{R_0}\rho_0(\gamma - 1)\frac{M^2}{\omega_j} A_{0j}.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Здесь

$$j = (G, Z), \quad D(\omega) \equiv \omega^2 - \omega_s^2/q^2.$$

При этом комплексные амплитуды A_{0G} и A_{0Z} зависят от медленного времени, обусловленного нелинейными эффектами. Нелинейная эволюция амплитуд мод возникает на временных масштабах порядка μ^{-2}, так что

$$A_{0G} = A_{0G}(t/\mu^2), \quad A_{0Z} = A_{0Z}(t/\mu^2). \qquad (19)$$

3.2. Первый порядок по параметру μ

В первом порядке по μ в результате нелинейного взаимодействия колебаний с частотами ω_Z и ω_G возникают сателлиты ГАМ с частотами $\omega_\pm = \omega_G \pm \omega_Z$. Поскольку колебания радиального электрического поля в плазме на частотах ω_G и ω_Z сопровождаются колебаниями плотности, давления и продольной скорости на этих же частотах, то из-за квадратичной нелинейности появляются возмущения с удвоенными частотами $2\omega_G$ и $2\omega_Z$, а также возмущения с нулевой частотой, так что решение уравнений в первом порядке по параметру μ можно представить в общем виде:

$$f_1 = f_+ e^{i\omega_+ t} + f_- e^{i\omega_- t} + \\ + f_{GG} e^{2i\omega_G t} + f_{ZZ} e^{2i\omega_Z t} + \text{c.c.} + \bar{f}, \quad (20)$$

где под f_1 подразумеваются $A, p^{(s,c)}, \delta\rho^{(s,c)}, v^{(s,c)}$.

Подставляем решение уравнений нулевого порядка по μ в нелинейные части уравнений для давления, продольной скорости и массовой плотности плазмы (11) и (12). Тогда, решая эти уравнения, находим, что колебания соответствующих возмущенных величин плазмы на частоте ω_+ описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} p_+^c &= \frac{2r}{R_0}\gamma p_0 M \frac{\omega_s}{qD(\omega_+)} A_+ + \hat{p}_+^c, \\ v_+^s &= -\frac{2ir}{R_0} M c_s \frac{\omega_+}{D(\omega_+)} A_+ + \hat{v}_+^s, \\ p_+^s &= -\frac{2ir}{R_0}\gamma p_0 \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\omega_+}{D(\omega_+)} A_+ + \hat{p}_+^s, \\ v_+^c &= \frac{2r}{R_0} c_s \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\omega_s}{qD(\omega_+)} A_+ + \hat{v}_+^c, \\ \delta\rho_+^c &= \delta\hat{\rho}_+^c, \quad \delta\rho_+^s = -\frac{ir}{R_0}\rho_0(\gamma-1)\frac{M^2}{\omega_+} A_+ + \delta\hat{\rho}_+^s. \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{p}_+^c &= \frac{2r}{R_0}\gamma p_0 \frac{1 + M^2/2}{D(\omega_+)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\omega_+\omega_G + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_+\omega_Z + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_Z)} \right\} A_{0G}A_{0Z}, \\ \hat{v}_+^s &= -\frac{2ir}{R_0} c_s \frac{\omega_s}{q} \frac{1 + M^2/2}{D(\omega_+)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_Z)} \right\} A_{0G}A_{0Z}, \\ \hat{p}_+^s &= -\frac{2ir}{R_0}\gamma p_0 \frac{\omega_s}{q} \frac{M}{D(\omega_+)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_+)} \right\} A_{0G}A_{0Z}, \\ \hat{v}_+^c &= \frac{2r}{R_0} c_s \frac{M}{D(\omega_+)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\omega_+\omega_G + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_+\omega_Z + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_Z)} \right\} A_{0G}A_{0Z}, \\ \delta\hat{\rho}_+^s &= 0, \quad \delta\hat{\rho}_+^c = \frac{r}{R_0}\rho_0(\gamma-1)M^2 \frac{A_{0G}A_{0Z}}{\omega_G\omega_Z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя выражения (21), (22) в нелинейные члены последнего уравнения в (12), находим, что амплитуда высокочастотного сателлита ГАМ с частотой ω_+ описывается выражением

$$A_+ = \frac{4M(1 + M^2/2)\,\omega_+}{(\omega_+^2 - \omega_G^2)(\omega_+^2 - \omega_Z^2)} \frac{\omega_s^3}{q} \times \\ \times \left(\frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_Z)} \right) A_{0G}A_{0Z}. \quad (23)$$

Колебания плазменных величин на частоте низкочастотного сателлита ГАМ ω_- описываются выражениями, которые следуют из выражений (21)–(23) при заменах в них $\omega_+ \to \omega_-$, $\omega_Z \to -\omega_Z$, $A_{0Z} \to A_{0Z}^\star$ (здесь и далее «$*$» означает комплексно-сопряженную величину). Амплитуда низкочастотного сателлита ГАМ характеризуется величиной

$$A_- = \frac{4M(1 + M^2/2)\,\omega_-}{(\omega_-^2 - \omega_G^2)(\omega_-^2 - \omega_Z^2)} \frac{\omega_s^3}{q} \times \\ \times \left(\frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_- - \omega_Z}{D(\omega_Z)} \right) A_{0G}A_{0Z}^*. \quad (24)$$

Аналогичным образом для индуцированных в результате нелинейных эффектов колебаний давления, продольной скорости и массовой плотности с частотой $2\omega_G$ находим:

$$\begin{aligned} p_{GG}^c &= \frac{2r}{R_0}\gamma p_0 \times \\ &\times \left\{ M\frac{\omega_s}{q}\frac{A_{GG}}{D(2\omega_G)} + \frac{(1 + M^2/2)A_{0G}^2}{D(2\omega_G)} \frac{2\omega_G^2 + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)} \right\}, \\ v_{GG}^s &= -\frac{2ir}{R_0} c_s \times \\ &\times \left\{ 2M\omega_G \frac{A_{GG}}{D(2\omega_G)} + \frac{\omega_s}{q} \frac{(1 + M^2/2)A_{0G}^2}{D(2\omega_G)} \frac{3\omega_G}{D(\omega_G)} \right\}, \\ p_{GG}^s &= -\frac{2ir}{R_0}\gamma p_0 \times \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{2\omega_G A_{GG}}{D(2\omega_G)} + \frac{\omega_s}{q} \frac{MA_{0G}^2}{D(2\omega_G)} \frac{3\omega_G}{D(\omega_G)} \right\}, \\ v_{GG}^c &= \frac{2r}{R_0} c_s \times \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\omega_s}{q} \frac{A_{GG}}{D(2\omega_G)} + \frac{MA_{0G}^2}{D(2\omega_G)} \frac{2\omega_G^2 + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)} \right\}, \\ \delta\rho_{GG}^s &= -\frac{ir}{R_0}\rho_0(\gamma-1)\frac{M^2 A_{GG}}{2\omega_G}, \\ \delta\rho_{GG}^c &= \frac{r}{R_0}\rho_0(\gamma-1)M^2 \cdot \frac{A_{0G}^2}{2\omega_G^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда из последнего уравнения в (12) для амплитуды угловой полоидальной скорости, обусловленной радиальным электрическим полем возмущений, получаем

$$A_{GG}=\frac{8\omega_s^3}{q(4\omega_G^2-\omega_Z^2)}\frac{M(1+M^2/2)\,A_{0G}^2}{D(\omega_G)}. \qquad (26)$$

Колебания с удвоенной частотой зонального течения $2\omega_Z$ описываются выражениями (25), (26) при замене в них $\omega_G\to\omega_Z,\ \omega_Z\to\omega_G,\ A_{0G}\to A_{0Z}$.

Из уравнений (11) с учетом выражений (18) следует, что нулевые гармоники $p^s, v^s, \delta\rho^s, \delta\rho^c$ и A не генерируются в результате нелинейных взаимодействий, так что

$$\bar{p}^s=0,\ \ \bar{v}^s=0,\ \ \delta\bar{\rho}^s=0,\ \ \delta\bar{\rho}^c=0,\ \ \bar{A}=0. \qquad (27)$$

Вместе с тем возникают нулевые гармоники величин p^c и v^c, для которых из уравнений (11) с учетом выражений (18) находим

$$\begin{aligned}\bar{p}^c&=-\frac{4r}{R_0}\gamma p_0\left(1+\frac{M^2}{2}\right)\left(\frac{|A_{0G}|^2}{D(\omega_G)}+\frac{|A_{0Z}|^2}{D(\omega_Z)}\right),\\ \bar{v}^c&=-\frac{4r}{R_0}Mc_s\left(\frac{|A_{0G}|^2}{D(\omega_G)}+\frac{|A_{0Z}|^2}{D(\omega_Z)}\right).\end{aligned} \qquad (28)$$

В предельном случае медленного равновесного вращения плазмы, такого что $M^2\ll 1$, имеем следующую иерархию частот: $\omega_Z\ll(\omega_s/q,\omega_G)$. Тогда $D_G\approx 2\omega_s^2,\ D_Z\approx-\omega_s^2/q^2$ и выражения для амплитуд высокочастотного и низкочастотного сателлитов ГАМ упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}A_+&\approx\frac{2M\omega_s}{q\omega_G\omega_Z}(1-q^2)A_{0G}A_{0Z},\\ A_-&\approx-\frac{2M\omega_s}{q\omega_G\omega_Z}(1-q^2)A_{0G}A_{0Z}^*.\end{aligned} \qquad (29)$$

С учетом выражений (29) при

$$A_G=2|A_{0G}|\cos(\omega_Gt+\varphi_G),$$

$$A_Z=2|A_{0Z}|\cos(\omega_Zt+\varphi_Z)$$

для сателлитов ГАМ находим

$$\begin{aligned}A_{sat}&=\frac{4M\omega_s(1-q^2)}{q\omega_G\omega_Z}\times\\ &\times|A_{0G}||A_{0Z}|\left[\cos(\omega_+t+\varphi_+)-\cos(\omega_-t+\varphi_-)\right]=\\ &=\frac{8M\omega_s}{q\omega_G\omega_Z}(q^2-1)\times\\ &\times|A_{0G}||A_{0Z}|\sin(\omega_Gt+\varphi_G)\sin(\omega_Zt+\varphi_Z),\end{aligned} \qquad (30)$$

где $\varphi_\pm=\varphi_G\pm\varphi_Z$. В этом приближении амплитуды высокочастотного и низкочастотного сателлитов ГАМ равны. Их различие возникает в следующем порядке разложения по ω_Z/ω_G. Этот результат остается в силе и при произвольных значениях числа Маха M.

Отметим также, что при $A_{0G}\simeq A_{0Z}$ амплитуды колебаний с удвоенными частотами $2\omega_G$ и $2\omega_Z$ малы по сравнению с $A_\pm$:

$$(|A_{GG}|,|A_{ZZ}|)\simeq(\omega_Z/\omega_G)|A_\pm|.$$

3.3. Второй порядок по параметру μ: нелинейная эволюция ГАМ и зонального течения

Во втором порядке по малому параметру μ последнее уравнение в (12) принимает вид

$$\begin{aligned}&\hat{L}\,A_2+2i(\omega_G^2-\omega_Z^2)\times\\ &\times\left(-\omega_G\frac{\partial A_{0G}}{\partial t}e^{i\omega_Gt}+\omega_Z\frac{\partial A_{0Z}}{\partial t}e^{i\omega_Zt}\right)+\\ &+F_G^{nl}e^{i\omega_Gt}+F_Z^{nl}e^{i\omega_Zt}+\text{c. c.}+\ldots=0.\end{aligned} \qquad (31)$$

Члены в этом уравнении, представленные в символическом виде через коэффициенты F_G^{nl} и F_Z^{nl}, обусловлены нелинейным взаимодействием первоначальных ГАМ с частотой ω_G и зонального течения с частотой ω_Z с колебаниями с частотами $\omega_+,\ \omega_-,\ 2\omega_G,\ 2\omega_Z$ и $\omega=0$, которые, как показано выше, возникают в результате нелинейных эффектов в первом порядке малости по параметру μ. Точки в уравнении соответствуют нелинейным членам с нерезонансными частотами, отличными от ω_G и ω_Z, которые не важны для дальнейшего анализа. Тут важно заметить, что из-за нелинейных эффектов во втором порядке малости по μ появляются члены, пропорциональные $\exp(\pm i\omega_Gt)$ и $\exp(\pm i\omega_Zt)$. Вместе с тем ω_G и ω_Z являются собственными частотами оператора $\hat{L}$. Поэтому во избежание резонанса, который привел бы к нарушению первоначального предположения о слабой нелинейности, члены, пропорциональные $\exp(\pm i\omega_Gt)$ и $\exp(\pm i\omega_Zt)$, должны компенсировать друг друга. Это условие и дает уравнения временно́й эволюции A_{0G} и A_{0Z}:

$$\frac{\partial A_{0G}}{\partial t}+\frac{iF_G^{nl}}{2\omega_G(\omega_G^2-\omega_Z^2)}=0, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial A_{0Z}}{\partial t}+\frac{iF_Z^{nl}}{2\omega_Z(\omega_Z^2-\omega_G^2)}=0. \qquad (33)$$

Коэффициенты F_G^{nl}, F_Z^{nl} описываются выражениями

$$\begin{aligned} F_G^{nl} = &-\frac{\omega_G}{rR_0}\left(A_+ f_{0Z}^* + A_- f_{0Z} + A_{GG} f_{0G}^* + \right. \\ &\left. + A_{0Z}^* f_+ + A_{0Z} f_- + A_{0G}^* f_{GG} + A_{0G}\bar{f}\right), \\ F_Z^{nl} = &-\frac{\omega_Z}{rR_0}\left(A_+ g_{0G}^* + A_-^* g_{0G} + A_{ZZ} g_{0Z}^* + \right. \\ &\left. + A_{0G}^* g_+ + A_{0G} g_-^* + A_{0Z}^* g_{ZZ} + A_{0Z}\bar{g}\right), \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} f_j \equiv &\left(1+\frac{M^2}{2}\right)\left(\omega_G \frac{p_j^c}{\rho_0} + ic_s\frac{\omega_s}{q}v_j^s\right) + \\ &+ Mc_s\left(\omega_G v_j^c + i\frac{p_j^s}{\rho_0 qR_0}\right) + \\ &+ \frac{M^2}{2\omega_G}c_s^2 D\omega_G \frac{\delta\rho_j^c}{\rho_0}, \end{aligned}$$

$$\bar{f} = \omega_G\left\{\left(1+\frac{M^2}{2}\right)\frac{\bar{p}^c}{\rho_0} + Mc_s\bar{v}^c\right\}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} g_j \equiv &\left(1+\frac{M^2}{2}\right)\left(\omega_Z \frac{p_j^c}{\rho_0} + ic_s\frac{\omega_s}{q}v_j^s\right) + \\ &+ Mc_s\left(\omega_Z v_j^c + i\frac{p_j^s}{\rho_0 qR_0}\right) + \\ &+ \frac{M^2}{2\omega_Z}c_s^2 D\omega_Z \frac{\delta\rho_j^c}{\rho_0}, \\ \bar{g} = &\frac{\omega_Z}{\omega_G}\bar{f}. \end{aligned}$$

Индекс j принимает значения

$$j = (0G, 0Z, +, -, GG, ZZ).$$

Выражаем все входящие в выражение для коэффициента F_G^{nl} величины через A_{0G}, A_{0Z} и их комплексно сопряженные величины. Для этого используем ранее полученные соотношения, представленные в уравнениях (18), (21)–(27). Подставляя результат в уравнение (32), окончательно приходим к уравнению временно́й эволюции амплитуды ГАМ в следующем виде:

$$\frac{\partial A_{0G}}{\partial t} - i\left(\lambda_{GG}|A_{0G}|^2 + \lambda_{GZ}|A_{0Z}|^2\right)A_{0G} = 0. \tag{36}$$

Входящие в это уравнение коэффициенты имеют размерность обратной частоты и в общем случае описываются достаточно громоздкими выражениями:

$$\begin{aligned} \lambda_{GG} = &\frac{1}{\omega_G^2-\omega_Z^2}\left\{-\frac{6\omega_s^2\omega_G}{D(2\omega_G)}\left(\left(1+\frac{M^2}{2}\right)^2 + M^2\right) + \right. \\ &\left. + \frac{48\omega_s^6\omega_G M^2(1+M^2/2)^2}{q^2(4\omega_G^2-\omega_Z^2)D(\omega_G)D(2\omega_G)} + \frac{q^2\omega_Z^2}{4\omega_G\omega_s^2}D(\omega_G)\right\}, \\ \lambda_{GZ} = &\frac{1}{\omega_G^2-\omega_Z^2}\left\{\omega_s^2\left(\left(1+\frac{M^2}{2}\right)^2 + M^2\right)\times\right. \\ &\times\left[\frac{1}{D(\omega_+)}\left(\omega_G\left(\frac{\omega_+\omega_Z+\omega_s^2/q^2}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+\omega_G+\omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)}\right) + \right.\right. \\ &\left. + \frac{\omega_s^2}{q^2}\left(\frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{D(\omega_-)}\left(\omega_G\left(\frac{-\omega_-\omega_Z+\omega_s^2/q^2}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_-\omega_G+\omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)}\right) + \right. \\ &\left.\left. + \frac{\omega_s^2}{q^2}\left(\frac{\omega_- - \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_G)}\right)\right) - \frac{2\omega_G}{D(\omega_Z)}\right] + \\ &+ \frac{8\omega_s^6}{q^2}M^2\left(1+\frac{M^2}{2}\right)^2\left[\frac{\omega_+}{(\omega_+^2-\omega_G^2)(\omega_+^2-\omega_Z^2)}\times\right. \\ &\times\left(\frac{\omega_-}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_+)}\right)\left(\frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)}\right) + \\ &+ \frac{\omega_-}{(\omega_-^2-\omega_G^2)(\omega_-^2-\omega_Z^2)}\left(\frac{\omega_+}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_-)}\right)\times \\ &\left.\left.\times\left(\frac{\omega_- - \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_G)}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Тут следует заметить, что коэффициенты λ_{GG} и λ_{GZ} являются вещественными, а это значит, что амплитуда ГАМ при нелинейном взаимодействии остается постоянной, а изменяется только фаза колебаний

$$\begin{aligned} &\frac{\partial|A_{0G}|^2}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial\varphi_G}{\partial t} \equiv \delta\omega_G^{nl} = \lambda_{GG}|A_{0G}|^2 + \lambda_{GZ}|A_{0Z}|^2. \end{aligned} \tag{38}$$

Амплитуда и фаза ГАМ введены стандартным образом:

$$A_{0G} = |A_{0G}|\exp(i\varphi_G).$$

Иными словами, в приближении слабой нелинейности нелинейные эффекты приводят к сдвигу частоты колебаний.

В предельном случае малых тороидальных скоростей равновесного вращения плазмы ($M^2 \ll 1$) имеет место следующая иерархия частот, входящих в выражения (37): $\omega_Z \ll \omega_s/q < \omega_G$. Тогда с учетом этого обстоятельства коэффициенты существенным образом упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} &\lambda_{GG} \approx -\frac{6q^2}{\omega_G(3+8q^2)}, \\ &\lambda_{GZ} \approx \frac{1}{\omega_G}\left(2q^2 - 1 + \frac{2}{q^2}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Отметим, что нелинейная добавка к частоте ГАМ заведомо мала по сравнению с самой частотой $|\delta\omega_G^{nl}| \ll \omega_G$ при $|A_0|/\omega_G \ll 1$. С учетом того, что амплитуды колебаний на частоте $2\omega_G$ также малы по сравнению с амплитудой сателлитов ГАМ $|A_\pm|$, приходим к выводу о том, что основное влияние на высокочастотную моду колебаний обусловлено нелинейным взаимодействием ГАМ с зональным течением, следствием которого является возникновение сателлитов ГАМ с частотами $\omega_G \pm \omega_Z$.

Аналогичным образом вычисляем коэффициент F_Z^{nl} и, подставляя найденное выражение в уравнение (33), приходим к уравнению временно́й эволюции комплексной амплитуды зонального течения:

$$\frac{\partial A_{0Z}}{\partial t} - i\left(\lambda_{ZG}|A_{0G}|^2 + \lambda_{ZZ}|A_{0Z}|^2\right) A_{0Z} = 0. \quad (40)$$

где коэффициенты λ_{ZG} и λ_{ZZ} описываются выражениями

$$\begin{aligned}
\lambda_{ZZ} = {} & \frac{1}{\omega_Z^2 - \omega_G^2}\left\{-\frac{6\omega_s^2\omega_Z}{D(2\omega_Z)}\left(\left(1+\frac{M^2}{2}\right)^2 + M^2\right) + \right.\\
& \left. + \frac{48\omega_s^6\omega_Z M^2(1+M^2/2)^2}{q^2(4\omega_Z^2-\omega_G^2)D(\omega_Z)D(2\omega_Z)} + \frac{q^2\omega_G^2}{4\omega_Z\omega_s^2}D(\omega_Z)\right\},\\
\lambda_{ZG} = {} & \frac{1}{\omega_Z^2 - \omega_G^2}\left\{\omega_s^2\left(\left(1+\frac{M^2}{2}\right)^2 + M^2\right) \times \right.\\
& \times \left[\frac{1}{D(\omega_+)}\left(\omega_Z\left(\frac{\omega_+\omega_Z + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+\omega_G + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)}\right) + \right.\right.\\
& \left. + \frac{\omega_s^2}{q^2}\left(\frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)}\right)\right) + \\
& + \frac{1}{D(\omega_-)}\left(\omega_Z\left(\frac{-\omega_-\omega_Z + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_-\omega_G + \omega_s^2/q^2}{D(\omega_G)}\right) - \right.\\
& \left.\left. - \frac{\omega_s^2}{q^2}\left(\frac{\omega_- - \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_G)}\right)\right) - \frac{2\omega_Z}{D(\omega_G)}\right] + \\
& + \frac{8\omega_s^6}{q^2}M^2\left(1+\frac{M^2}{2}\right)^2\left[\frac{\omega_+}{(\omega_+^2-\omega_G^2)(\omega_+^2-\omega_Z^2)} \times \right.\\
& \times \left(-\frac{\omega_-}{D(\omega_G)} + \frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_+)}\right)\left(\frac{\omega_+ + \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_+ + \omega_G}{D(\omega_G)}\right) + \\
& + \frac{\omega_-}{(\omega_-^2-\omega_G^2)(\omega_-^2-\omega_Z^2)}\left(\frac{\omega_+}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_-)}\right) \times \\
& \left.\left. \times \left(\frac{\omega_- - \omega_Z}{D(\omega_Z)} + \frac{\omega_- + \omega_G}{D(\omega_G)}\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \quad (41)$$

Можно убедиться, что $\lambda_{GG} \to \lambda_{ZZ}, \lambda_{GZ} \to \lambda_{ZG}$ при замене индексов $G \to Z$ и наоборот в выражениях (37). Коэффициенты λ_{ZG} и λ_{ZZ} вещественны, и, следовательно, амплитуда зонального течения остается постоянной. Нелинейные эффекты приводят к сдвигу частоты зонального течения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial|A_{0Z}|^2}{\partial t} = 0,\\
& \frac{\partial\varphi_Z}{\partial t} \equiv \delta\omega_Z^{nl} = \lambda_{ZG}|A_{0G}|^2 + \lambda_{ZZ}|A_{0Z}|^2.
\end{aligned} \quad (42)$$

При малых значениях числа Маха, таких что $M^2 \ll 1$, выражения для коэффициентов λ_{ZG} и λ_{ZZ} упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}
& \lambda_{ZZ} \approx \frac{1}{4\omega_Z},\\
& \lambda_{ZG} \approx \frac{\omega_Z}{\omega_G^2}\left(1 - \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{q^4}\right).
\end{aligned} \quad (43)$$

Заметим, что основной вклад в нелинейный сдвиг частоты зонального течения при $|A_{0G}| \simeq |A_{0Z}|$ возникает в результате взаимодействия колебания массовой плотности плазмы на второй гармонике частоты зонального течения $2\omega_Z$ с исходным зональным течением (коэффициент λ_{ZZ}). Этот эффект описывается членом, пропорциональным $\delta\rho^c$ в последнем уравнении системы уравнений (12), который формально мал, поскольку пропорционален M^2. Этот «парадокс» объясняется тем, что $\delta\rho^c_{ZZ} \propto \omega_Z^{-2}$, а $\omega_Z \propto M^2$.

Из выражений (42), (43) следует, что

$$\delta\omega_Z^{nl}/\omega_Z \simeq |A_{0Z}|^2/\omega_Z^2.$$

Это означает, что при $|A_{0Z}| \simeq \omega_Z$ низкочастотные колебания в диапазоне частот порядка ω_Z становятся заведомо нелинейными. При этом говорить о зональном течении с частотой ω_Z уже не приходится.

Помимо этого, отметим, что нелинейный сдвиг частоты является более существенным для зонального течения, чем для ГАМ. Сравнивая выражения (38), (39) и (42), (43), находим, что при $|A_{0Z}| \simeq |A_{0G}|$ нелинейный сдвиг частоты зонального течения существенно превышает сдвиг частоты ГАМ: $|\delta\omega_Z^{nl}/\delta\omega_G^{nl}| \simeq \omega_G/\omega_Z \gg 1$, а соответственно, для относительного сдвига частот имеет место соотношение

$$\left|\frac{\delta\omega_Z^{nl}}{\omega_Z}\right| \simeq \frac{\omega_G^2}{\omega_Z^2}\left|\frac{\delta\omega_G^{nl}}{\omega_G}\right|.$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе для описания взаимодействия ГАМ с зональными течениями использована одножидкостная МГД-модель. В этой модели колебания параметров плазмы происходят на магнитной поверхности и в силу пространственной неоднородности радиальных профилей температуры плазмы и коэффициента запаса устойчивости ГАМ характеризуются сплошным спектром с частотой, непрерывно зависящей от радиуса, и имеют нулевую длину корреляции по радиусу. Все применяемые для исследований ГАМ диагностики (электростатические ленгмюровские зонды, корреляционная рефлектометрия, диагностика пучком тяжелых ионов) имеют конечное пространственное разрешение. Для зоны измерений, имеющей конечный радиальный размер, в случае линейных мод сплошного спектра имел бы место непрерывный набор частот, лежащих в диапазоне от f_{min} до f_{max} вокруг некоторой средней частоты f_{GAM}, усредненной по всей области наблюдений. В фурье-спектре измеренного сигнала наблюдалось бы некоторое непрерывное распределение мощности колебаний по частоте в интервале $[f_{min}, f_{max}]$, например нормальное (или же гауссово) распределение вокруг частоты f_{GAM} с полушириной $\sim (f_{max} - f_{min})/2$, но не два или несколько отдельных частотных пиков, как это имеет место в эксперименте. Отметим, что разница в частотах ГАМ и ее сателлита, ожидаемая для мод сплошного спектра и примерно равная $f_{ZF} \sim 3$–4 кГц, заведомо превышает уширение пика ГАМ за счет конечного размера области разрешения для используемых диагностик (<1 кГц). Это обстоятельство позволяет интерпретировать появление дополнительного пика как результат нелинейного взаимодействия ГАМ с низкочастотным зональным течением.

Одножидкостная МГД-модель не учитывает эффектов конечного ларморовского радиуса ионов. Такие эффекты при температуре ионов, малой по сравнению с температурой электронов, описываются в рамках двухжидкостной МГД-модели, а при сравнимых по величине температурах ионов и электронов — в рамках кинетического описания ионов. Эффекты конечного ларморовского радиуса ионов безусловно приведут к конечной радиальной ширине обсуждаемых мод. Пространственное разрешение для диагностик, применяемых при исследовании ГАМ, имеет масштаб от нескольких миллиметров до сантиметра (и даже полутора сантиметров), что заметно больше, чем ларморовский радиус ионов [18]. Таким образом, при измерениях происходит усреднение сигнала по области, значительно превышающий ларморовский радиус и ожидаемый радиальный пространственный размер мод с учетом эффектов конечного ларморовского радиуса ионов. Это позволяет надеяться, что в отсутствие нелинейного взаимодействия эффекты конечного радиального размера мод приводят лишь к конечной ширине частотного пика ГАМ (как и в случае сплошного спектра), но не к появлению дополнительного пика, наблюдаемого в эксперименте. При этом следует отметить, что вопрос о влиянии эффектов конечного ларморовского радиуса ионов на радиальную пространственную структуру ГАМ и на ее спектральные свойства на данный момент, по-видимому, далек от решения.

Если вкратце суммировать основные полученные в настоящей работе теоретические результаты, то можно отметить следующее.

1. При выполнении условия $|A|/\omega_G \ll 1$ основное влияние на ГАМ оказывает ее нелинейное взаимодействие с низкочастотным зональным течением.

2. В результате нелинейного взаимодействия с зональным течением появляются сателлиты ГАМ на частотах $\omega_G \pm \omega_Z$; частота сателлита $\omega_G + \omega_Z$ при значениях числа Маха $M^2 \ll 1$ близка к наблюдаемой в экспериментах частоте высокочастотного сателлита.

3. Амплитуды высокочастотного и низкочастотного сателлитов ГАМ, строго говоря, различаются, но их разница мала по сравнению с самими амплитудами как ω_Z/ω_G.

4. Из-за малой частоты зонального течения оно становится заведомо нелинейным уже при небольших амплитудах, таких что $|A_Z| \simeq \omega_Z$; это явно проявляется в том, что нелинейный сдвиг частоты зонального течения $\delta\omega_Z^{nl}$ при $|A_Z| \simeq \omega_Z$ соизмерим с частотой зонального течения ω_Z, вычисленной в линейном приближении; при этом, в отличие от ГАМ, наиболее значимый нелинейный эффект связан с самим зональным течением и обусловлен взаимодействием исходного зонального течения с возникающим из-за квадратичной нелинейности возмущением массовой плотности плазмы на удвоенной частоте зонального течения $2\omega_Z$.

Как уже отмечалось выше, модель для описания нелинейного взаимодействия ГАМ с низкочастотным зональным течением в токамаке с равновесным тороидальным вращением плазмы, идентичная нашим уравнениям (6)–(9), впервые была предложена в недавней работе [16] (см. уравнения (11c)–(13c), (15c) указанной работы; здесь и далее номер уравнения с добавленной буквой «c» означает соответствующее уравнение работы [16]). В рамках модели в работе [16] исследовалось взаимодействие ГАМ с зональным течением. К сожалению, работа [16] грешит многочисленными ошибками, приведшими к глубоко ошибочным выводам. Так, уже переход от уравнений (11c)–(13c), (15c) к уравнениям (16c), (17c) в этой работе выполнен некорректно. В нелинейной задаче принципиально невозможно исключить ρ' и $v'_\parallel$ и придти к уравнениям (16c) и (17c).

В отличие от настоящей работы, в работе [16] учитывается исключительно нелинейное взаимодействие ГАМ с зональным течением и для описания взаимодействия получено уравнение (22c) вида

$$\partial \bar{A}_{GAM}/\partial t = i\nu \bar{A}_{GAM} A_{ZF}.$$

Исходя из вида коэффициента ν в уравнении (22c), очевидно, что оно получено посредством исключения возмущений давления, продольной скорости и массовой плотности плазмы в нелинейных членах с использованием их связи с возмущением радиального электрического поля в линейном приближении. При этом в работе не рассматривается, при каких условиях это оправдано.

В работе [16] предполагалось, что зональное течение описывается выражением

$$A_{ZF}(t) = A^0_{ZF}\cos(\omega_{ZF} t), \quad A^0_{ZF} = \mathrm{const}.$$

Тогда уравнение (22c) при подстановке в его правую часть этого выражения решается точно, и в результате получается

$$A_{GAM}(t) = A^0_{GAM}\cos\left(\omega_{GAM} t + k\sin(\omega_{ZF} t)\right),$$

где $k = -\nu A^0_{ZF}/\omega_{ZF}$. Выражение в правой части этого равенства можно разложить в ряд Фурье [19], так что

$$\begin{aligned} A_{GAM}(t) = A^0_{GAM}\Big[&J_0(k)\cos(\omega_{GAM} t) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(k)\Big\{\cos[(\omega_{GAM} + 2m\omega_{ZF})t] + \\ &+ \cos[(\omega_{GAM} - 2m\omega_{ZF})t]\Big\} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(k)\Big\{\cos[(\omega_{GAM} + (2m-1)\omega_{ZF})t] - \\ &- \cos[(\omega_{GAM} - (2m-1)\omega_{ZF})t]\Big\}\Big], \end{aligned} \tag{44}$$

где $J_m(k)$ — функции Бесселя первого рода. Такое разложение впервые использовалось в работе Бакая [20] и позднее — в монографии Кадомцева [21]. Из выражения (44), в частности, следует, что, например, при $k = 1.6$ получаем $J_1(k) > J_0(k) > J_2(k)$. Это указывает на то, что в принципе в некоторых задачах уравнение типа (22c) работы [16] может иметь такое решение, что амплитуды сателлитов превышают амплитуду исходной высокочастотной моды (см., например, [20,21]). Это не относится к рассматриваемой задаче о взаимодействии ГАМ с низкочастотным зональным течением. С учетом выражения для ν, приведенного после формулы (22c), при $M^2 \ll 1$ получаем $k \simeq M A^0_{ZF}/\omega_Z$. Как уже сказано выше, из-за малой частоты зонального течения оно заведомо становится нелинейным уже при $|A^0_{ZF}|/\omega_{ZF} \simeq 1$ и не может описываться в линейном приближении. С учетом того, что число Маха M тоже мало, коэффициент k заведомо мал, $k \ll 1$. В этих условиях функции Бесселя $J_m(k)$ можно разложить по малому параметру k с точностью до линейных по k членов и придти к результату, представленному выражением (24c) работы [16].

В работе [16] уравнение (22c) решается итерационно заменой в его правой части $\bar{A}_{GAM} \to A^0_{GAM} = \mathrm{const}$. Такая процедура оправдана только при сходимости итерационного ряда, а именно при $k \ll 1$, поскольку следующий член ряда будет пропорционален k^2 и при $k > 1$ итерационный ряд заведомо расходится.

Таким образом, мы выяснили, что результат, полученный в работе [16], справедлив только при $k \ll 1$. Попутно заметим, что выражение (24c) для амплитуд сателлитов ГАМ отличается от выражения (30) настоящей работы, хотя они и были получены идентичным образом посредством использования в нелинейных членах выражений для возмущений давления, массовой плотности и продольной скорости плазмы, вычисленных в линейном приближении. Это различие обусловлено уже упомянутой выше некорректностью уравнений (16c), (17c) обсуждаемой работы, использованных при получении выражения (24c).

На основании выражения (24c) и условия слабой нелинейности, которое в работе [16] приведено в виде $|\nu A_{ZF}/\omega_{GAM}| \ll 1$, в обсуждаемой работе сделано утверждение, что даже при слабой нелинейности коэффициент k может быть заметной величиной (особенно при малых значениях числа Маха M). Как видим, это утверждение противоречит предположениям, при которых было получено выражение для коэффициента k, и является глубоко ошибочным. Более того, если устремить число Маха M к нулю, $M \to 0$, $M \neq 0$, и зафиксировать A^0_{ZF}, то нелинейность в уравнении (22c) становится ничтожно малой, а при этом амплитуды сателлитов стремятся к бесконечности, поскольку $k \propto 1/M$. Такой заведомо абсурдный результат является следствием некорректного условия слабой нелинейности, представленного в работе [16], которое на самом деле, как мы выяснили ранее, имеет вид $|A^0_{ZF}| \ll \omega_Z$, так что чем меньше M, тем меньше A^0_{ZF}, при котором справедливо приближение слабой нелинейности, использованное в работе [16].

На основании ошибочного утверждения о том, что при слабой нелинейности k может быть заметной величиной, в работе [16] представлена интерпретация экспериментальных результатов, полученных на токамаке Т-10. Согласно этой интерпретации, наблюдаемые в спектре мощности колебаний потенциала плазмы два пика — это не ГАМ и ее сателлит, как это интерпретировалось экспериментаторами, а два сателлита ГАМ с частотами $\omega_{GAM} + \omega_{ZF}$ и $\omega_{GAM} - \omega_{ZF}$, а амплитуда самого ГАМ мала по сравнению с амплитудами сателлитов: в одном приведенном примере $k = -3.8$, а в другом и вовсе $k = 11.4$, при том что область применимости представленной теории ограничивается значениями $k \ll 1$.

Как уже отмечалось выше, поскольку линейная частота зонального течения мала, то уже при небольших амплитудах оно становится заведомо нелинейным. Вопрос о том, к каким последствиям для колебаний в диапазоне частот порядка частоты зонального течения приведут эффекты сильной нелинейности, выходит за рамки настоящей работы.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность К. В. Чукбару, обратившему его внимание на работу [20].

Финансирование. Работа выполнена в рамках выполнения государственного задания Национального исследовательского центра «Курчатовский институт».

ЛИТЕРАТУРА

1. P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, R35 (2005).

2. A. Fujisawa, T. Ido, A. Shimizu, S. Okamura, K. Matsuoka, H. Iguchi, Y. Hamada, H. Nakano, S. Ohshima, K. Itoh, K. Hoshino, K. Shinohara, Y. Miura, Y. Nagashima, S.-I. Itoh, M. Shats, H. Xia, J. Q. Dong, L. W. Yan, K. J. Zhao, G. D. Conway, U. Stroth, A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. E. Lysenko, S. V. Perfilov, C. Hidalgo, G. R. Tynan, C. Holland, P. H. Diamond, G. R. McKee, R. J. Fonck, D. K. Gupta, and P. M. Schoch, Nucl. Fusion **47**, S718 (2007).

3. G. D. Convay, A. I. Smolyakov, and T. Ido, Nucl. Fusion **62**, 013001 (2022).

4. A. V. Melnikov, V. A. Vershkov, L. G. Eliseev, S. A. Grashin, A. V. Gudozhnik, L. I. Krupnik, S. E. Lysenko, V. A. Mavrin, S. V. Perfilov, D. A. Shelukhin, S. V. Soldatov, M. V. Ufimtsev, A. O. Urazbaev, G. Van Oost, and L. G. Zimeleva, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, S87 (2006).

5. A. V. Melnikov, C. Hidalgo, L. G. Eliseev, E. Ascasibar, A. A. Chmyga, K. S. Dyabilin, I. A. Krasilnikov, V. A. Krupin, L. I. Krupnik, S. M. Khrebtov, A. D. Komarov, A. S. Kozachek, D. López-Bruna, S. E. Lysenko, V. A. Mavrin, J. L. de Pablos, I. Pastor, S. V. Perfilov, M. A. Pedrosa, R. V. Shurygin, V. A. Vershkov, T-10 Team and TJ-II Team, Nucl. Fusion **51**, 083043 (2011).

6. A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. E. Lysenko, S. V. Perfilov, D. A. Shelukhin, V. A. Vershkov, V. N. Zenin, L. I. Krupnik, N. K. Kharchev, and HIBP Team, J. Phys.: Conf. Ser. **591**, 012003 (2015).

7. A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. V. Perfilov, S. E. Lysenko, R. V. Shurygin, V. N. Zenin, S. A. Grashin, L. I. Krupnik, A. S. Kozachek, R. Yu. Solomatin, A. G. Elfimov, A. I. Smolyakov, M. V. Ufimtsev and The HIBP Team, Nucl. Fusion **55**, 063001 (2015).

8. A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. A. Grashin, M. A. Drabinskij, Ph. O. Khabanov, N. K. Kharchev, L. I. Krupnik, A. S. Kozachek, S. E. Lysenko, V. N. Zenin and HIBP Team, Plasma Fusion Res. **13**, 3402109 (2018).

9. А. В. Мельников, В. А. Вершков, С. А. Грашин, М. А. Драбинский, Л. Г. Елисеев, И. А. Земцов, В. А. Крупин, В. П. Лахин, С. Е. Лысенко, А. Р. Немец, М. Р. Нургалиев, Н. К. Харчев, Ф. О. Хабанов, Д. А. Шелухин, Письма в ЖЭТФ **115**, 360 (2022).

10. A. Kramer-Flecken, S. Soldatov, D. Reiser, M. Kantor, and H. R. Koslowski, Plasma Phys. Control. Fusion **51**, 015001 (2009).

11. D. Basu, M. Nakajima, A. V. Melnikov, D. McColl, A. Rohollahi, S. Elgriw, C. Xiao, and A. Hirose, Nucl. Fusion **58**, 024001 (2018).

12. А. В. Мельников, Л. Г. Елисеев, С. Е. Лысенко, С. В. Перфилов, Р. В. Шурыгин, Л. И. Крупник, А. С. Козачок, А. И. Смоляков, Письма в ЖЭТФ **100**, 627 (2014).

13. B. van der Holst, A. G. C. Beliën, and J. P. Goedbloed, Phys. Plasmas **7**, 4208 (2000).

14. S. Wang, Phys. Rev. Lett. **97**, 085002 (2006); S. Wang, Phys. Rev. Lett. **97**, 129902 (erratum) (2006).

15. C. Wahlberg, Phys. Rev. Lett. **101**, 115003 (2008).

16. Е. А. Сорокина, Письма в ЖЭТФ **120**, 667 (2024).

17. E. Hameiri, Phys. Fluids **26**, 230 (1983).

18. A. V. Melnikov, L. I. Krupnik, L. G. Eliseev, J. M. Barcala, A. Bravo, A. A. Chmyga, G. N. Deshko, M. A. Drabinskij, C. Hidalgo, P. O. Khabanov, S. M. Khrebtov, N. K. Kharchev, A. D. Komarov, A. S. Kozachek, J. Lopez, S. E. Lysenko, G. Martin, A. Molinero, J. L. de Pablos, A. Soleto, M. V. Ufimtsev, V. N. Zenin, and A. I. Zhezhera, Nucl. Fusion **57**, 072004 (2017).

19. Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Наука, Москва (1977), с. 170.

20. A. S. Bakai, Nucl. Fusion **10**, 53 (1970).

21. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976).