ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 1 (7), стр. 96–109 

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ОБЪЕМНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ И ОБМЕННО-ДИПОЛЬНЫХ МОД В ПЛАСТИНЕ ФЕРРОМАГНЕТИКА

*В. В. Киселев* [a,b*]

[a] *Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук 620108, Екатеринбург, Россия*

[b] *Физико-технологический институт, Уральский федеральный университет 620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 20 марта 2025 г.,
после переработки 26 апреля 2025 г.,
Принята к публикации 28 апреля 2025 г.

Методом многомасштабных разложений получены двумерные уравнения типа Дэви – Стюартсона, которые описывают эволюцию трехмерных нелинейных магнитостатических возбуждений в пластине ферромагнетика. Предложенный подход допускает обобщение. Показано, что в ферромагнитных пленках с толщиной, большей обменной длины, эволюция трехмерных обменно-дипольных волновых пакетов также описывается уравнениями Дэви – Стюартсона. Вычислены пороги нестабильности плоских нелинейных монохроматических волн. Модуляционная неустойчивость таких волн ведет к образованию когерентных структур. Найдены условия формирования и явные решения для плоских солитонных возбуждений. В рамках предложенной модели предсказана возможность критического коллапса пространственно локализованных двумерных волновых структур.

**DOI:** 10.31857/S0044451025070107

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Ферромагнитные пленки имеют интересные особенности, отсутствующие или слабо выраженные у массивных образцов. Они оказались наиболее популярной системой для анализа закономерностей нелинейных волновых процессов и размерных эффектов в конденсированных средах и выявления возможностей их практического использования (см., например, работы [1, 2]). Дисперсионные свойства спиновых волн в магнитных пленках, а также характер их нелинейного взаимодействия [3, 4] легко контролировать, варьируя направление и величину внешнего магнитного поля, толщину пленки, состояние поверхностных спинов и параметры слоистых структур на основе магнитных пленок. Это облегчает исследование многообразия нелинейных явлений в магнитных пленках и позволяет использовать их в качестве модельного объекта для анализа нелинейных волновых режимов в целом. Среди нелинейных явлений следует в первую очередь отметить открытие солитонов огибающей спиновых волн и модуляционных неустойчивостей спиновых волн. Как известно, солитонная концепция была одной из основных парадигм предыдущего столетия. О первом наблюдении солитонов огибающей спиновых волн, а также модуляционной неустойчивости, было сообщено в работах [5–7]. Отметим, что спин-волновая самомодуляционная неустойчивость, о которой сообщалось в статье [6], была первым открытием таковой в твердотельных средах. Позднее самомодуляционная неустойчивость была обнаружена в оптическом волокне [8]. Экспериментальное обнаружение солитонов огибающей в узких пленках железоиттриевого граната было одним из первых подтверждений плодотворности теории магнитных солитонов. За последние десятилетия солитоны стали повсеместным явлением в природе, появляясь в таких разнообразных системах, как вода, оптические волокна, дезоксирибонуклеиновая кислота и ультрахолодные атомы [1, 2, 9–11].

* E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

В конце 1990-х – начале 2000-х годов, благодаря развитию методов бриллюэновской спектроскопии, в широких волноводах на основе железоиттриевого граната (ЖИГ-волноводах) удалось наблюдать формирование слабоколлапсирующих двумерных спин-волновых пакетов [12–14], которые являются аналогами световых пуль, предсказанных в нелинейной оптике [15]. В работе [16] «спин-волновые пули» — буллеты — формировались в активном кольцевом резонаторе и представляли собой уже не консервативные, а диссипативные локализованные возбуждения, которые спонтанно генерировались из шума в системе с усилением и потерями.

Теоретическое описание и численное моделирование одномерных солитонов огибающей спиновых волн, а также двумерных магнитостатических буллетов были выполнены в рамках упрощенных моделей типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [5–7, 12, 13]. Для обоснования модельных уравнений обычно используют нелинейный закон дисперсии спиновых волн в ферромагнитной пластине с однородным основным состоянием. Его получают формально — путем замены в законе дисперсии линейных мод длины $M_0 = \text{const}$ вектора плотности магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ на проекцию $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ вдоль равновесного направления намагниченности [17, 18]. Такое приближение порождает локальное НУШ, которое для одномерных возбуждений может быть строго обосновано [19, 20] и приводит к правильным выводам. Для анализа нелинейной динамики узких ЖИГ-волноводов предложены различные обобщения НУШ (см. [21, 22] и цитированную там литературу).

Основная трудность описания нелинейной динамики трехмерных волновых пакетов в широких ферромагнитных пленках состоит в учете дальнодействующего и нелокального магнитостатического взаимодействия с оценкой порядка малости сохраняемых величин. Упрощенный подход не пригоден для этой цели. Анализ спин-волновых пуль, выполненный в [12–14], в рамках моделей типа локального двумерного НУШ, хотя и воспроизводит некоторые качественные черты наблюдаемых явлений, не дает полного объяснения экспериментальных данных. Оценок применимости использованных моделей не существует. В то же время известно, что решения нелинейных уравнений очень чувствительны к виду нелинейных слагаемых в модельных уравнениях и даже к значениям коэффициентов при них. Порождаемые таким образом ошибки мало влияют на решения одномерной слабонелинейной задачи. Однако они приводят к существенным искажениям решений реальной трехмерной задачи.

Технологические приложения магнитных пленок в микроэлектронике и вычислительной технике привели к преобладанию численных методов. Однако численное моделирование не вскрывает в полной мере закономерностей наблюдаемых явлений. Кроме того, для оценки корректности предположений и допущений численного подхода важно получать хотя бы некоторые неодномерные результаты в аналитическом виде. Вопросы о структуре неодномерных спин-волновых пакетов в широких ЖИГ-волноводах, об интерпретации данных по форме «огибающей», ее координатной и функциональной зависимостях требуют новых методов вывода модельных уравнений и более детального изучения.

В данной работе методом многомасштабных разложений с контролируемой точностью по малым параметрам задачи установлена возможность эффективного анализа нелинейной динамики трехмерных волновых пакетов в ферромагнитных пленках в рамках моделей, близких к двумерным уравнениям Дэви – Стюартсона [9, 23–25], предложенным для описания неодномерных волн в водных бассейнах конечной глубины. В работе [26] на основе моделей типа Дэви – Стюартсона исследована модуляция длинноволновых электромагнитных импульсов в безграничной ферромагнитной среде, намагниченной до насыщения.

Известно [27–34], что из-за пространственного квантования волнового вектора спиновой волны вдоль нормали к поверхности пластины обменно-дипольный спектр описывается отдельными кривыми, каждая из которых отвечает своей волне, бегущей вдоль пластины.

Пусть ферромагнитная пластина (пленка) намагничена в плоскости $yz$, а внешнее магнитное поле направлено вдоль оси $z$:

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (0,\, 0,\, 1).$$

У линейных спин-волновых мод, бегущих вдоль пластины параллельно направлению магнитного поля, волновое число $k$ изменяется непрерывно. Неоднородность распределения намагниченности по толщине пленки $d$ конкретизируется дискретными значениями второго волнового числа $f$ [35–38]. В разд. 2 рассмотрена эволюция трехмерных волновых пакетов, образованных модами нижней ветви спектра спиновых волн, при соотношении параметров:

$$f \approx \pi/d \ll |k| \ll l_{ex}^{-1},$$

где $l_{ex}$ — обменная длина.

При таких условиях спин-волновая динамика ферромагнитной пленки обусловлена только магнитостатическими взаимодействиями. Для построения упрощенной модели развит специальный вариант метода многомасштабных разложений [39, 40], который корректно учитывает нелокальные магнитостатические взаимодействия и размерные эффекты. Установлено, что в главном приближении эволюция трехмерных волновых пакетов описывается двумерной нелинейной моделью типа Дэви – Стюартсона.

В разд. 3 показано, что при соотношении геометрических и материальных параметров пленки:

$$f \approx \pi/d \ll |k| \leq l_{ex}^{-1}, \tag{1}$$

учет локальных обменных взаимодействий сводится к простой модификации редуктивной техники разд. 2 с изменением коэффициентов в эффективной двумерной модели.

В разд. 4 на основе полученной модели вычислены пороги нестабильности квазимонохроматических нелинейных волн. Найдены условия формирования и аналитические решения для плоских солитонов. Обоснована невозможность образования в пленке стабильных двумерных пространственно локализованных волновых структур.

## 2. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ

Обсудим вначале нелинейную динамику пленки при учете только магнитостатических взаимодействий. Обменными взаимодействиями можно пренебречь, если толщина пленки $d$ больше обменной длины $l_{ex} = \sqrt{\alpha}$, где $\alpha$ — постоянная обменного взаимодействия. Для пленок железо-иттриевого граната значения $l_{ex}$ составляют несколько десятков нанометров [37]. Далее будем описывать эволюцию трехмерных спин-волновых пакетов, распространяющихся вдоль оси $z$ и образованных магнитостатическими модами с длинами волн, много большими обменной длины:

$$k^{-1} \gg l_{ex}.$$

Здесь $k$ — волновое число основной гармоники пакета. Его связь с толщиной пленки будет конкретизирована в ходе дальнейшего анализа.

Поскольку мы рассматриваем слабонелинейные волны, в уравнениях Ландау – Лифшица сохраним только кубические полиномы по амплитуде отклонений $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ от основного состояния:

$$\mathbf{M} = M_0\mathbf{e} + \mathbf{m}, \quad m_3 \approx -\frac{1}{2M_0}\,(m_1^2 + m_2^2).$$

Здесь $M_0 = \mathrm{const}$ — номинальная намагниченность ферромагнетика. Единичный вектор $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ задает равновесное направление намагниченности (вдоль поля $\mathbf{H}$). После перечисленных упрощений уравнения для расчета независимых компонент вектора $\mathbf{m}$ примут вид

$$\begin{aligned} \partial_t m_1 &= -\gamma\,[m_2(H_0 + h_3) - (M_0 + m_3)h_2], \\ \partial_t m_2 &= -\gamma\,[h_1(m_3 + M_0) - (H_0 + h_3)m_1], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\gamma$ — магнитомеханическое отношение.

Неоднородная намагниченность $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ порождает магнитные поля $\mathbf{h}$ и $\mathbf{h}^{(e)}$ внутри пластины и вне ее. Выразим эти поля через внутренний $\varphi^{(i)}$ и внешний $\varphi^{(e)}$ потенциалы:

$$\mathbf{h} = -\nabla\varphi^{(i)}, \quad \mathbf{h}^{(e)} = -\nabla\varphi^{(e)},$$

удовлетворяющие уравнениям магнитостатики

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi^{(i)} = 4\pi\,\mathrm{div}\mathbf{m}, \quad |x| < d/2, \\ &\Delta\varphi^{(e)} = 0, \qquad\qquad |x| > d/2, \end{aligned} \tag{3}$$

и подчиняющиеся краевым условиям

$$\begin{aligned} &-\partial_x\varphi^{(e)}|_{x=\pm d/2} = (-\partial_x\varphi^{(i)} + 4\,\pi\, m_1)|_{x=\pm d/2}, \\ &\varphi^{(e)}|_{x=\pm d/2} = \varphi^{(i)}|_{x=\pm d/2}\,, \qquad \varphi^{(e)}|_{|x|\to\infty} \to 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Последние учитывают непрерывность нормальных компонент магнитной индукции и тангенциальных компонент размагничивающего поля на поверхности пластины.

Учет обменного взаимодействия и кристаллографической анизотропии не представляет принципиальных трудностей и может быть выполнен в рамках предлагаемой техники. Однако все вычисления станут более громоздкими.

Линеаризованная задача (2)–(4) имеет решения в форме бегущих плоских волн $\propto \exp[i\,kz - i\,\omega(k)t]$. Для малоамплитудных волн их трехмерные модуляции, обусловленные взаимодействием гармоник, являются слабыми. Поэтому приближенное решение задачи (2)–(4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &m_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} m_j^{(n,l)}(x, Y, Z, \tau)\, e^{i\,\theta_l}, \ j = 1, 2; \\ &\begin{pmatrix} \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(e)} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(n,\,l)} (x, Y, Z, \tau)\, e^{i\,\theta_l}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\theta_l = l(kz - \omega\, t).$$

Здесь малый параметр $\varepsilon$ характеризует отклонения системы от линейного режима, $Y = \varepsilon y$, $Z = \varepsilon (z - c_g t)$, $\tau = \varepsilon^2 t$ — медленные переменные. Выбор масштабных преобразований для медленных переменных определяется требованием баланса эффектов дисперсии, дифракции и нелинейности и оправдывается самосогласованностью вычислений [40]. Заметим, что в контексте редуктивной теории возмущений $\varepsilon$ является формальным параметром разложения, который используется для наглядной группировки членов одного порядка величины. Поэтому в конце вычислений полагаем $\varepsilon = 1$. В то же время, после того, как асимптотические ряды (5) будут получены, сравнением порядка величины его членов нетрудно выявить физически малый параметр. В данной задаче физически малый параметр разложения $(|k|\, r_0)^{-1} \ll 1$, где $k$ — волновое число основной гармоники, $r_0$ — размер волнового пакета или солитона. Групповая скорость $c_g$ волновых процессов и закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ линейных мод определятся в ходе решения задачи.

Вещественность полей $m_j(\mathbf{r}, t)$, $\varphi^{(i,e)}(\mathbf{r}, t)$ гарантируют условия

$$m_j^{(n,l)*} = m_j^{(n,-l)}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(n,l)*} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(n,-l)}.$$

Эта симметрия позволяет ограничиться расчетом компонент с неотрицательными значениями $l$: $l = 0,\, 1,\, 2, \ldots$

После подстановки (5) в уравнения (2), (3) и краевые условия (4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$ получаем цепочку уравнений с упрощенными краевыми условиями для последовательного вычисления функций $m_j^{(n,\,l)}$, $u^{(n,\,l)}$, $v^{(n,\,l)}$. Процедура расчетов будет замкнутой, если предположить, что в первом порядке по $\varepsilon$ (при $n = 1$) справедливы ограничения

$$\begin{aligned} &m_j^{(1,l)} = 0, \quad j = 1, 2, \quad l = 0, 2, 3, \ldots, \\ &\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(1,\,l)} = 0, \quad l = 2, 3, \ldots, \\ &\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(1,\,0)} \text{ не зависит от } x. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда для определения зависимости функций $u^{(1,1)}$ и $v^{(1,1)}$ от быстрой переменной $x$ получим простую краевую задачу:

$$\begin{aligned} &(\partial_x^2 - k^2) u^{(1,1)} = 4\pi \partial_x m_1^{(1,1)}, \quad |x| < d/2; \\ &(\partial_x^2 - k^2) v^{(1,1)} = 0, \qquad |x| > d/2; \\ &\left[-\partial_x u^{(1,1)} + 4\pi \partial_x m_1^{(1,1)}\right] |_{x=\pm d/2} = \\ &= \partial_x v^{(1,1)}|_{x=\pm d/2}, \\ &u^{(1,1)}|_{x=\pm d/2} = v^{(1,1)}|_{x=\pm d/2}, \\ &\partial_x v^{(1,1)}|_{|x|\to\infty} \to 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Магнитостатическое приближение оправдано при условии $k \gg \omega/c$, где $c$ — скорость света [28]. Для реальных значений параметров железоиттриевых гранатов: $\omega/c \sim 1$–$10$ см$^{-1}$ [18].

Решения этой и других магнитостатических задач редуктивной теории возмущений записываются с помощью одномерной функции Грина

$$G_q(x) = \frac{2\,\pi}{|q|}\, e^{-|q\,x|},$$

которая является убывающим при $|x| \to \infty$ решением уравнения

$$(\partial_x^2 - q^2) G_q(x) = -4\,\pi\,\delta(x). \tag{8}$$

В первом порядке теории возмущений ($n = 1$) из первого уравнения (7) и уравнения (8) после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &u^{(1,1)}(x) = \\ &= -\frac{1}{4\pi}\Big(\Big[-\partial_{x'} u^{(1,1)}(x') + 4\,\pi\, m_1^{(1,1)}(x')\Big]\, G_k(x' - x) + \\ &+ u^{(1,1)}(x')\, \partial_{x'} G_k(x' - x)\Big)\Big|_{x'=-d/2}^{x'=d/2} - \partial_x \hat{G}_k\, m_1^{(1,1)}. \end{aligned}$$

Зависимость функций от медленных переменных там, где это не вызывает недоразумений, не указываем и для сокращения записи вводим обозначение

$$\hat{G}_q u = \int_{-d/2}^{d/2} dx' u(x') G_q(x' - x).$$

Потенциалы вне пластины $v^{(1,1)}$, удовлетворяющие асимптотическим условиям при $|x| \to \infty$, можно сразу найти из второго уравнения (7):

$$v^{(1,1)} = \begin{cases} c_1\, e^{-|k|\,x}, & x > d/2; \\ c_2\, e^{|k|\,x}, & x < -d/2. \end{cases}$$

Здесь параметры $c_{1,2}$ не зависят от $x$. Краевые условия (4) при $x = \pm d/2$ и соотношения

$$\begin{gathered} G_k(x' - x)|_{x'=\pm d/2} = \frac{2\pi}{|k|}\, \exp(-|k(x \mp d/2)|), \\ \partial_{x'} G_k(x' - x)|_{x'=\pm d/2} = \mp 2\,\pi\, \exp(-|k(x \mp d/2)|), \\ |x| < d/2; \\ \partial_x v^{(1,1)}|_{x=\pm d/2} = \mp c_{1,2}\, |k|\, \exp(\mp |k| d/2) \end{gathered}$$

приводят к цепочке равенств

$$\Big( \Big[-\partial_{x'} u^{(1,1)}(x') + 4\,\pi\, m_1^{(1,1)}(x')\Big]\ G_k(x'-x) + \\ + u^{(1,1)}(x')\,\partial_{x'} G_k(x'-x)\Big)\Big|_{x'=\pm d/2} = \\ = \Big( -\partial_{x'} v^{(1,1)}(x')\, G_k(x'-x) + \\ + v^{(1,1)}(x')\,\partial_{x'} G_k(x'-x)\Big)\Big|_{x'=\pm d/2} = 0.$$

Поэтому при $n = 1$ магнитостатический потенциал внутри пластины имеет вид

$$u^{(1,1)} = -\partial_x \hat{G}_k m_1^{(1,1)}, \tag{9}$$

а магнитостатическое поле $\mathbf{h}^{(1,1)}$ определяется формулами

$$\begin{aligned} &h_1^{(1,1)} = -4\,\pi\, m_1^{(1,1)} + k^2 \hat{G}_k m_1^{(1,1)}, \\ &h_2^{(1,1)} = 0, \quad h_3^{(1,1)} = i\,k\,\partial_x \hat{G}_k\, m_1^{(1,1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

В том же порядке уравнения (2), (10) приводят к системе однородных линейных уравнений для расчета компонент $m_{1,2}^{(1,1)}$:

$$\begin{aligned} &-i\,\omega\, m_1^{(1,1)} + \omega_H\, m_2^{(1,1)} = 0, \\ &(\omega_M + \omega_H - \gamma M_0 k^2 \hat{G}_k)\, m_1^{(1,1)} + i\,\omega\, m_2^{(1,1)} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\omega_M = 4\,\pi\, M_0 \gamma$, $\omega_H = \gamma H_0$. Выразим функцию $m_2^{(1,1)}$ через $m_1^{(1,1)}$:

$$m_2^{(1,1)} = \frac{i\,\omega}{\omega_H}\, m_1^{(1,1)}.$$

Тогда для $m_1^{(1,1)}$ получим интегродифференциальное уравнение

$$\left(\omega_M + \omega_H - \gamma M_0 k^2 \hat{G}_k - \frac{\omega^2}{\omega_H}\right) m_1^{(1,1)} = 0, \tag{12}$$

которое после действия на него оператора $(\partial_x^2 - k^2)$, с учетом (8) сводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\left[\left(\omega_M + \omega_H - \frac{\omega^2}{\omega_H}\right)(\partial_x^2 - k^2) + \omega_M k^2\right] m_1^{(1,1)} = 0. \tag{13}$$

Его решение имеет вид

$$m_1^{(1,1)} = \cos(fx)\,\Psi(Y,Z,\tau) + \sin(fx)\,\Phi(Y,Z,\tau). \tag{14}$$

Здесь $\Psi$ и $\Phi$ — произвольные функции медленных переменных. Параметры $f$ и $\omega$ связаны дисперсионным соотношением [35]

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \frac{\omega_M\,\omega_H f^2}{k^2 + f^2}. \tag{15}$$

При частотах спин-волновых мод из интервала

$$\omega_H^2 < \omega^2 < \omega_H\,(\omega_H + \omega_M)$$

волновое число поперечных колебаний намагниченности в пластине будет вещественным:

$$f^2 = \frac{k^2(\omega^2 - \omega_H^2)}{\omega_H\,(\omega_H + \omega_M) - \omega^2} > 0.$$

Далее обсуждаем коллективные возбуждения с такими $f$ и $\omega$.

Поскольку уравнение (13) получено после действия на уравнение (12) оператора $(\partial_x^2 - k^2)$, найденное решение (14) в общем случае не удовлетворяет уравнению (12). А именно, после подстановки (14) в уравнение (12) левая часть (12) не обращается в нуль, а содержит слагаемые $\mathrm{sh}(|k|x)$, $\mathrm{ch}(|k|x)$, которые являются решениями однородного уравнения

$$(\partial_x^2 - k^2)\varphi = 0.$$

Подобная трудность имеет место и в следующих порядках редуктивной теории возмущений. Лишние слагаемые появляются от следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{kl}\sin(fx) &= \frac{4\,\pi}{f^2 + (l\,k)^2}\Bigg[\sin(fx) - \\ &\quad - \frac{\exp(-|l\,k|\,d/2)}{|l\,k|}\ \mathrm{sh}(|l\,k|\,x)\, f_2^{(l)}\Bigg], \\ \hat{G}_{lk}\cos(fx) &= \frac{4\,\pi}{f^2 + (l\,k)^2}\Bigg[\cos(fx) - \\ &\quad - \frac{\exp(-|l\,k|\,d/2)}{|l\,k|}\ \mathrm{ch}(|l\,k|\,x)\, f_1^{(l)}\Bigg], \\ f_1^{(l)} &= |l\,k|\,\cos\left(\frac{fd}{2}\right) - f\,\sin\left(\frac{fd}{2}\right), \\ f_2^{(l)} &= |l\,k|\,\sin\left(\frac{fd}{2}\right) + f\,\cos\left(\frac{fd}{2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

При $n{=}l{=}1$ интегродифференциальное уравнение (12) допускает альтернативу в выборе решений:

$$m_1^{(1,1)} \sim \cos(f\,x) \quad \text{или} \quad m_1^{(1,1)} \sim \sin(f\,x).$$

Далее ограничимся обсуждением четных по $x$ распределений намагниченности:

$$m_1^{(1,1)} = \cos(f\,x)\,\Psi(Y,Z,\tau).$$

Для них требование отсутствия слагаемых $\mathrm{ch}(|k|x)$ в уравнении (12) будет выполнено только при условии квантований волнового числа $f$ [36, 37]:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{fd}{2}\right) = \frac{|k|}{f}. \tag{17}$$

Уравнение (17) фиксирует дискретные значения $f$ в интервалах $[2\pi n/d,\, \pi(2n+1)/d]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ При $|k| \gg f$ для минимального из волновых чисел $f$ получаем оценку

$$f \approx \frac{\pi}{d}\left(1 - \frac{2}{d\,|k|}\right), \quad d\,|k| \gg 1. \tag{18}$$

Таким образом, в достаточно толстой ферромагнитной пленке волновые пакеты, отвечающие нижней ветви спектра магнитостатических мод, описываются выражением

$$\begin{gathered}\mathbf{m}^{(1,1)} \equiv \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}^{(1,1)} = \Psi(Y, Z, \tau)\, \mathbf{S}(x), \\ \mathbf{S}(x) = \cos(fx) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\,\omega}{\omega_H} \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{19}$$

Покажем, что следующие порядки нелинейной теории возмущений приводят к самосогласованным уравнениям для расчета огибающей $\Psi(Y, Z, \tau)$. Будем использовать оценки $f \approx \pi/d$, $k \gg f$ и пренебрегать малыми вкладами от поверхностных мод с множителями $\exp[-|l\,k|(d/2 \pm x)]$, $|x| < d/2$. Такие вклады появляются после вычисления интегралов (16).

Уравнения второго порядка по $\varepsilon$ ($n = 2$) не будут содержать секулярных членов, если параметр $c_g$ выбрать совпадающим с групповой скоростью магнитостатических мод:

$$c_g = \partial_k \omega = -\frac{\omega_H\, \omega_M k\, f^2}{\omega\, (k^2 + f^2)^2}. \tag{20}$$

Здесь и далее мы пренебрегаем слабой зависимостью $f$ от $k$, так как, согласно оценке (18), $df/dk = O((d\,k)^{-2}) \ll 1$.

С учетом этих замечаний решения магнитостатических задач по прежней схеме приводят к следующим отличным от нуля магнитостатическим полям $h_j^{(2,l)}$:

$$\begin{aligned}
h_1^{(2,1)} &= -\frac{4\pi i f\omega \sin(fx)}{\omega_H(k^2+f^2)}\, \partial_Y \Psi - \frac{8\pi i k f^2 \cos(fx)}{(k^2+f^2)^2}\, \partial_Z \Psi, \\
h_1^{(2,2)} &= -\frac{4\pi f^2}{k^2+f^2}\, m_1^{(2,2)} + \frac{\pi i k f \sin(2fx)}{M_0(k^2+f^2)} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right) \Psi^2, \\
h_2^{(2,1)} &= -\frac{4\pi f \sin(fx)}{k^2+f^2}\, \partial_Y \Psi, \\
h_3^{(2,0)} &= -\partial_Z u^{(1,0)}, \\
h_3^{(2,2)} &= \Psi^2 \frac{\gamma\, (2\pi k f)^2}{\omega_H(k^2+f^2)} \left[\frac{\omega_H^2 \cos(2fx)}{\omega^2(k^2+f^2)} - \frac{1}{k^2}\right].
\end{aligned}$$

Им соответствуют не равные нулю коэффициенты намагниченности:

$$\begin{aligned}
m_1^{(2,2)} &= -\frac{\pi\, i\, k\, f\, \gamma\, \omega_H}{\omega^2(k^2+f^2)} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right) \sin(2fx) \Psi^2, \\
m_2^{(2,0)} &= \frac{4\,\pi\, k\, f\, \omega\, \gamma\, \sin(2fx)}{\omega_H^2(k^2+f^2)}\, |\Psi|^2 - \frac{M_0}{H_0}\, \partial_Y u^{(1,0)}, \\
m_2^{(2,1)} &= \frac{c_g \cos(fx)}{\omega_H}\, \partial_Z \Psi - \frac{\omega_M f \sin(fx)}{\omega_H\, (k^2+f^2)}\, \partial_Y \Psi, \\
m_2^{(2,2)} &= \frac{2\,\pi\, k\, f\, \gamma\, \sin(2fx)}{\omega(k^2+f^2)}\, \Psi^2, \\
m_3^{(2,0)} &= -\frac{\cos^2(fx)}{2M_0} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right) |\Psi|^2, \\
m_3^{(2,2)} &= -\frac{\cos^2(fx)}{2M_0} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right) \Psi^2.
\end{aligned}$$

В третьем порядке теории возмущений при $n = 3$, $l = 0$ появляется магнитостатическая задача другого типа:

$$\begin{aligned}
&\partial_x^2 u^{(3,0)} + (\partial_Y^2 + \partial_Z^2) u^{(1,0)} = \\
&= 4\,\pi \left[\partial_x m_1^{(3,0)} + \partial_Y m_2^{(2,0)} + \partial_Z m_3^{(2,0)}\right], \\
&\left[-\partial_x u^{(3,0)} + 4\,\pi m_1^{(3,0)}\right]|_{x=\pm d/2} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Напомним, что функция $u^{(1,0)}(Y, Z, \tau)$ не зависит от быстрой переменной $x$. Проинтегрируем первое уравнение (21) по $x$ в интервале $|x| \le d/2$. С учетом краевых условий и свойств симметрии функций $m_{2,3}^{(2,0)}(x)$ получим уравнение, связывающее потенциал $u^{(1,0)}$ с распределением намагниченности в пластине:

$$\sigma \partial_Y^2 u^{(1,0)} + \partial_Z^2 u^{(1,0)} = -\beta \partial_Z |\Psi|^2, \tag{22}$$

где

$$\beta = \frac{4\pi^2 \gamma}{\omega_M} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right), \quad \sigma = 1 + \frac{\omega_M}{\omega_H}.$$

Эффективное уравнение для огибающей $\Psi(Y, Z, \tau)$ получается в третьем порядке теории возмущений ($n = 3$) при рассмотрении неоднородной линейной системы для функций $m_j^{(3,1)}$, $j = 1, 2$. Таковая содержит дополнительные магнитостатические поля $h_j^{(3,1)}$. Как и ранее, эти поля с помощью функции Грина выразим через распределение намагниченности в пластине:

$$\begin{gathered}
h_1^{(3,1)} = -\partial_x u^{(3,1)} = -\frac{ik}{2\pi} \partial_x \hat{G}_k\, u^{(2,1)} - \\
- \frac{1}{4\pi} (\partial_Y^2 + \partial_Z^2)\, \partial_x \hat{G}_k\, u^{(1,1)} - 4\pi m_1^{(3,1)} + \\
+ k^2 \hat{G}_k m_1^{(3,1)} + \partial_x \partial_Y \hat{G}_k\, m_2^{(2,1)} + i\, k\, \partial_x \hat{G}_k\, m_3^{(3,1)}, \\
h_2^{(3,1)} = -\partial_Y u^{(2,1)},
\end{gathered}$$

$$u^{(2,1)} = -\frac{4\pi i\omega\cos(fx)}{\omega_H(k^2+f^2)}\,\partial_Y\Psi + \frac{8\pi ikf\sin(fx)}{(k^2+f^2)^2}\,\partial_Z\Psi,$$
$$m_3^{(3,1)} = -\frac{i\pi kf\gamma(\omega^2-\omega_H^2)}{2M_0\,\omega_H^3(k^2+f^2)}\left(4+\frac{\omega_H^2}{\omega^2}\right)\times$$
$$\times\cos(fx)\sin(2fx)\,\Psi|\Psi|^2 + \frac{i\omega\gamma\cos(fx)}{2\,\omega_H^2}\Psi\partial_Y u^{(1,0)}.$$

В результате уравнения для расчета компонент $m_j^{(3,1)}$ оказываются интегродифференциальными:

$$\hat{L}\,\mathbf{m}^{(3,1)} = \mathbf{F}. \qquad (23)$$

Здесь линейный оператор $\hat{L}$ такой же, как в первом порядке теории возмущений (11):

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -i\,\omega & \omega_H \\ -\omega_M-\omega_H+\gamma M_0k^2\hat{G}_k & -i\,\omega \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец $\mathbf{F}$ в правой части системы (23) выражается через функцию медленных переменных $\Psi(Y,Z,\tau)$ и ее производные, а также содержит явную зависимость от быстрой переменной $x$. Поскольку оператор $\hat{L}$ вырожден, система (23) разрешима лишь при выполнении условия ортогональности [41]:

$$\int\limits_{-d/2}^{d/2} dx\,(p_1F_1+p_2F_2) = 0, \qquad (24)$$

где $\mathbf{p}=(S_2,\,S_1)$ — решение сопряженного однородного уравнения $\mathbf{p}\hat{L}=0$.

Условие ортогональности (24) приводит к уравнению для расчета медленных модуляций огибающей $\Psi(Y,Z,\tau)$ спиновых волн в пластине:

$$i\,\partial_\tau\Psi + \lambda\,\partial_Z^2\Psi + \mu\,\partial_Y^2\Psi + \rho\,\Psi|\Psi|^2 + $$
$$+\,\delta\,\partial_Z u^{(1,0)}\Psi = 0. \qquad (25)$$

Здесь $\lambda$, $\mu$, $\delta$, $\rho$ — положительные коэффициенты:

$$\lambda = \frac{\omega_H}{2\,\omega}\left[\frac{(3\,k^2-f^2)\,\omega_M f^2}{(k^2+f^2)^3} - \frac{c_g^2}{\omega_H}\right],$$

$$\mu = \frac{\omega_H\,\omega_M k^2}{2\,\omega\,(k^2+f^2)^2}, \quad \delta = \frac{\gamma\,\omega_H}{2\omega}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right),$$

$$\rho = \frac{2\,\pi^2\gamma^2\omega_H f^2}{\omega\,\omega_M\,(k^2+f^2)}\times$$
$$\times\left[3+\frac{\omega_M^2(k\,f)^2}{\omega_H^2(k^2+f^2)^2}\left(2+\frac{5\,\omega_H^2}{4\,\omega^2}\right) - \frac{\omega_M^2 f^4}{\omega_H^2\,(k^2+f^2)^2}\right].$$

Выражения для них можно упростить, используя приближение $|k|\gg f$:

$$\lambda\approx\frac{3\omega_M f^2}{2k^4},\ \mu\approx\frac{\omega_M}{2k^2}\left[1-\frac{f^2}{k^2}\left(\frac{\omega_M}{2\omega_H}+2\right)\right],\ \delta\approx\gamma,$$

$$\rho\approx\frac{2(\pi\gamma f)^2}{\omega_M\,k^2}\left[3+\frac{13}{4}\left(\frac{\omega_M f}{\omega_H\,k}\right)^2\right],$$
$$\omega\approx\omega_H\left(1+\frac{\omega_M f^2}{2\,\omega_H k^2}\right).$$

Для устойчивости основного состояния ферромагнитной пластины внешнее поле $\mathbf{H}$ в ее плоскости должно быть достаточно сильным, поэтому справедливо соотношение

$$\omega_H \gg \omega_M f^2/(2k^2).$$

Отметим, что значения коэффициентов $\lambda$ и $\mu$ связаны с законом дисперсии

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \frac{\omega_M\omega_H(f^2+q^2)}{k^2+f^2+q^2}$$

линейных магнитостатических мод

$$\propto \exp(i\,k\,z + i\,q\,y - i\,\omega\,t),$$

которые распространяются в плоскости пленки под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(q/k)$ к направлению магнитного поля. А именно, справедливы соотношения

$$\partial_k^2\omega|_{q=0} = 2\lambda, \quad \partial_q^2\omega|_{q=0} = 2\mu.$$

Полученные уравнения образуют замкнутую систему типа Дэви – Стюартсона для эффективного описания двумерной нелинейной динамики намагниченности в толстой пластине ферромагнетика:

$$i\partial_\tau\Psi + \lambda\partial_Z^2\Psi + \mu\partial_Y^2\Psi + \rho\Psi|\Psi|^2 +$$
$$+\,\delta\partial_Z u^{(1,0)}\Psi = 0, \qquad (26)$$
$$\sigma\partial_Y^2 u^{(1,0)} + \partial_Z^2 u^{(1,0)} + \beta\partial_Z|\Psi|^2 = 0.$$

Здесь $\sigma$, $\beta$ — такие же, как в формуле (22).

Уравнения (26) знаками и анизотропией коэффициентов $\lambda$, $\mu$, $\sigma$ отличаются от моделей Дэви – Стюартсона, которые описывают волны на поверхности водного бассейна или модуляции длинных электромагнитных волн в намагниченной до насыщения неограниченной ферромагнитной среде [23, 26]. Значения коэффициентов $\lambda$, $\mu$, $\rho$, $\delta$, $\sigma$ таковы, что система (26) не может быть сведена к моделям, которые удается проинтегрировать методом обратной задачи рассеяния.

Близкие к системе (26) уравнения получены в работе [42] для описания упругих волн в двумерных решетках при учете ангармонизмов третьего и четвертого порядков.

## 3. УЧЕТ ОБМЕННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В предыдущем разделе установлено, что эволюция трехмерных волновых пакетов, образованных модами нижней ветви спектра магнитостатических волн, при соотношении параметров

$$f \approx \pi/d \ll |k| \ll l_{ex}^{-1}$$

описывается нелинейной моделью (26) типа Дэви–Стюартсона. Когда волновые числа $|k|$ спиновых волн близки к значению $l_{ex}^{-1}$, обменные и магнитостатические взаимодействия становятся равноправными. Интересно и важно, что при условии

$$f \approx \pi/d \ll |k| \leq l_{ex}^{-1} \tag{27}$$

учет обменных взаимодействий сводится к простой модификации приведенных расчетов. С целью пояснить утверждение напомним, что в сравнительно толстых пленках (при $d \gg l_{ex}$) обменно-дипольные поверхностные моды локализованы в узких приграничных слоях толщиной порядка обменной длины $l_{ex}$, где их амплитуда в $|k|\, l_{ex} \ll 1$ раз меньше амплитуды объемных спиновых волн. Поэтому при анализе объемных волн в главном приближении можно пренебречь поверхностными модами. Тогда структура и динамика объемных обменно-дипольных мод будет определяться краевыми условиями магнитостатической задачи, выражающими непрерывность тангенциальных компонент напряженности магнитного поля и нормальных компонент магнитной индукции на развитых поверхностях пластины [36–38]. Воспользуемся этим замечанием для построения упрощенной модели нелинейной динамики объемных обменно-дипольных волн в ферромагнитной пластине с параметрами из интервала (27).

При включении обменных взаимодействий уравнения Ландау–Лифшица изменяются. Как и ранее, сохраним в них только кубичные полиномы по отклонениям намагниченности от основного состояния среды. Тогда вместо (2) для расчета независимых компонент вектора $\mathbf{m}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t m_1 = -\gamma \big[ & m_2(H_0 + h_3 + \alpha\, \hat{\Delta} m_3) - \\ & -(M_0 + m_3)(h_2 + \alpha\, \hat{\Delta} m_2)\big], \\ \partial_t m_2 = -\gamma \big[ & (m_3 + M_0)(h_1 + \alpha\, \hat{\Delta} m_1) - \\ & -(H_0 + h_3 + \alpha\, \hat{\Delta} m_3) m_1\big]. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $\hat{\Delta} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ — трехмерный оператор Лапласа, $\alpha > 0$ — постоянная обменного взаимодействия, которая определяет обменную длину: $l_{ex} = \sqrt{\alpha}$. Остальные обозначения сохраняются прежними. Размагничивающие поля $\mathbf{h}$ и $\mathbf{h}^{(e)}$ определяются уравнениями (3), решение которых ищем при магнитостатических краевых условиях (4) в виде разложения (5). Вычисления нелинейной теории возмущений отличаются от выполненных ранее только наличием дополнительных локальных вкладов от обменных взаимодействий. Их учет не вызывает трудностей.

В рассматриваемом приближении дисперсионное соотношение для обменно-дипольных мод принимает вид

$$\omega^2 = \omega_{H,\,\alpha}^2 + \frac{\omega_{H,\,\alpha}\, \omega_M f^2}{k^2 + f^2}. \tag{29}$$

Здесь и далее для упрощения формул используем обозначение

$$\omega_{H,\,n\alpha} = \omega_H + n\,\gamma\,\alpha\, M_0 (k^2 + f^2), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Условие квантования поперечного волнового числа $f$ остается прежним (17). Поэтому при $k^2 \gg f^2$ для нижней ветви обменно-дипольных мод сохраняется приближение: $f \approx \pi/d$.

В области (27) вклады в закон дисперсии (29) от обменного и магнитостатического взаимодействий — одного порядка величины. Для устойчивости основного состояния среды внешнее магнитное поле должно быть достаточно большим:

$$\gamma\, H = \omega_H \gg \gamma\, \alpha\, M_0\, k^2 \sim \frac{\omega_M f^2}{2\, k^2}\ , \quad k^2 \gg f^2. \tag{30}$$

Отсюда следует аппроксимация функции $\omega(k, f)$:

$$\omega \approx \omega_H + \gamma\, \alpha\, M_0\, k^2 + \frac{\omega_M f^2}{2\, k^2}.$$

Отметим, что в реальных пленках железо-иттриевого граната нетрудно выделить область материальных и геометрических параметров (27), (30). В качестве примера выберем $d = 10$ мкм, $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $H = 300$ Э, $\omega_H = \gamma H = 6\cdot 10^9$ рад/с,

$\alpha M_0^2 = 4\cdot 10^{-7}$ эрг/см. Тогда при $k \sim l_{ex}^{-1} \sim 10^5$см$^{-1}$, $f \sim 10^4$см$^{-1}$, как и положено, имеем

$$\omega_H \gg \alpha\,\gamma\,M\,k^2 \sim \frac{\omega_M f^2}{2\,k^2} \sim 10^8 \text{ рад/с}.$$

В конечном счете условия отсутствия секулярных членов в редуктивной теории возмущений снова приводят к универсальной модели типа Дэви–Стюартсона. Другими будут только коэффициенты в уравнениях (26):

$$\lambda = \frac{\omega_{H,\alpha}}{2\omega}\left[\frac{(3k^2-f^2)\omega_M}{(k^2+f^2)^3} - \frac{c_g^2}{\omega_{H,\alpha}} + \gamma\alpha M_0\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{H,\alpha}^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{4\gamma\alpha M_0\,k^2}{\omega_{H,\alpha}}\left(\gamma\,\alpha\,M_0 - \frac{\omega_M f^2}{(k^2+f^2)^2}\right)\right],$$
$$\mu = \frac{\omega_{H,\alpha}}{2\omega}\left[\gamma\alpha M_0\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{H,\alpha}^2}\right) + \frac{\omega_M k^2}{(k^2+f^2)^2}\right],$$
$$\delta = \frac{\gamma\,\omega_{H,\alpha}}{2\,\omega}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{H,\alpha}^2}\right),$$
$$\rho = \frac{2(\pi\gamma f)^2\omega_{H,\alpha}}{(k^2+f^2)\,\omega\,\omega_M}\left\{3 - \frac{\omega_M^2 f^2}{(k^2+f^2)\,\omega_{H,\alpha}^2} + \right. \tag{31}$$
$$+ \frac{3\,k^2\omega^2\,\omega_M}{(k^2+f^2)\,\omega_{H,\alpha}^2\,\omega_{H,4\alpha}(k=0)} - \frac{k^2\omega_M D^{-1}}{k^2+f^2}\times$$
$$\times\left[\frac{3}{4} + \frac{3\omega^2}{4\omega_{H,\alpha}^2}\left(1+\frac{2\omega_H}{\omega_{H,4\alpha}}\right) - \frac{\omega_{H,2\alpha}\omega_M f^2}{2\omega_H\omega_{H,\alpha}(k^2+f^2)}\right] +$$
$$+ \frac{\gamma\alpha M_0(k^2+f^2)}{\omega_{H,\alpha}}\left[\frac{3k^2-f^2}{k^2+f^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{H,\alpha}^2}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{6\omega_M}{\omega_{H,\alpha}}\left(\frac{k\,f}{k^2+f^2}\right)^2\right]\right\},$$
$$\sigma = 1 + \frac{\omega_M}{\omega_H}, \quad \beta = \frac{4\,\pi^2\gamma}{\omega_M}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{H,\alpha}^2}\right).$$

Здесь $D = (\omega^2\omega_H/\omega_{H,\alpha}\omega_{H,4\alpha}) - \gamma\alpha M_0(k^2+f^2)$, групповая скорость обменно-дипольных волн определяется выражением

$$c_g = \frac{\partial\,\omega}{\partial\,k} =$$
$$= \frac{k\,\omega_{H,\alpha}}{\omega}\left[\gamma\,\alpha\,M_0\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{H,\alpha}^2}\right) - \frac{\omega_M f^2}{(k^2+f^2)^2}\right].$$

Интересно, что учет обменного взаимодействия привел к появлению минимумов на кривой $\omega = \omega(k)$ (29) в точках $\pm k_0$,

$$k_0 \approx \sqrt{\frac{\omega_M}{2\,\gamma\,\alpha\,M_0}}\,f.$$

В них групповая скорость $c_g$ обращается в нуль, а затем меняет знак. В то же время при соотношении пространственных масштабов (1) все коэффициенты (31) в уравнениях (26) всегда положительны.

Для линейных обменно-дипольных мод

$$\propto \exp(i\,k\,z + i\,q\,y - i\,\omega\,t),$$

распространяющихся под углом к направлению внешнего магнитного поля $\mathbf{H} = H(0,\,0,\,1)$, закон дисперсии модифицируется:

$$\omega^2(q,k,f) = \left[\omega_H + \gamma\,\alpha\,M_0\,(k^2+q^2+f^2)\right]\times$$
$$\times\left[\omega_H + \gamma\,\alpha\,M_0\,(k^2+q^2+f^2) + \frac{\omega_M\,(f^2+q^2)}{k^2+q^2+f^2}\right].$$

Коэффициенты $\lambda$, $\mu$ (31) связаны с производными функции $\omega(q,k,f)$ как

$$2\,\lambda = \partial_k^2\omega|_{q=0}, \quad 2\,\mu = \partial_q^2\omega|_{q=0}.$$

Свойства решений системы (26) зависят от знака коэффициентов при вторых производных в линейной части первого уравнения. В данном случае параметр $\mu$ положителен. При ограничениях (1) на волновые числа $f$ и $k$ и толщину $d$ пластины коэффициент $\lambda$ также положителен. Поэтому первое уравнение (26) относится к эллиптическому типу, а значит, соответствует краевой задаче. Условие $\lambda = 0$ определяет границу между областями с разной эволюцией намагниченности. При $\mu > 0$, $\lambda < 0$ первое уравнение (26) принадлежит гиперболическому типу и описывает волновые процессы. Смена режима распространения магнитных возбуждений возможна при переходе к тонким пленкам. Ферромагнитная пленка считается тонкой, когда ее толщина порядка или меньше обменной длины $l_{ex}$. В тонкой пленке поверхностные спиновые волны проникают на глубину порядка толщины пленки и начинают играть важную роль в распределении намагниченности вдоль нормали к пленке. Это усложняет граничные условия [37, 38] и технику построения упрощенных нелинейных моделей типа Дэви–Стюартсона. Обсуждение нелинейной динамики тонких пленок выходит за рамки данной работы.

Для анализа решений модели (26) полезно перейти к безразмерным переменными и упростить коэффициенты в уравнении для потенциала $u^{(1,0)}$. Пусть $A_0$ — характерная амплитуда волн намагниченности, $r_0$ — пространственный масштаб их изменения в плоскости пластины:

$$A_0 = O(M_0\,\varepsilon), \quad r_0 = O([k\,\varepsilon]^{-1}).$$

После масштабных преобразований

$$\Psi = A_0 \tilde{\Psi}, \quad u^{(1,0)} = \beta A_0^2 r_0 \, \tilde{u}^{(1,0)},$$

$$\tilde{Y} = Y/r_0, \quad \tilde{z} = z/r_0, \quad \tilde{\tau} = \omega_H \tau$$

получим

$$\begin{gathered} i\,\partial_\tau \Psi + \lambda_0\, \partial_Z^2 \Psi + \mu_0\, \partial_Y^2 \Psi + \rho_0\, \Psi|\Psi|^2 + \\ +\delta_0\, \partial_Z u^{(1,0)} \Psi = 0, \qquad (32) \\ \sigma \partial_Y^2 u^{(1,0)} + \partial_Z^2 u^{(1,0)} + \partial_Z |\Psi|^2 = 0. \end{gathered}$$

Здесь

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\omega_H\, r_0^2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\omega_H\, r_0^2},$$

$$\rho_0 = \frac{\rho\, A_0^2}{\omega_H}, \quad \delta_0 = \frac{\delta \beta A_0^2}{\omega_H}.$$

Знак «тильда» над новыми переменными далее опускаем.

## 4. ПЛОСКИЕ СОЛИТОНЫ И НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР

Упрощенная модель (32) имеет решение в форме нелинейной монохроматической волны:

$$\Psi = \Phi \, \exp[i\,(\mathbf{p}\,\mathbf{r} - \omega\,\tau)], \quad \partial_z u^{(1,0)} = -\Phi^2, \qquad (33)$$

с частотой, зависящей от амплитуды $\Phi = \mathrm{const}$:

$$\omega(\mathbf{p}) = \omega_0(\mathbf{p}) - \Phi^2(\rho_0 - \delta_0), \;\; \omega_0(\mathbf{p}) = \mu_0 p_y^2 + \lambda_0 p_z^2,$$

где $\mathbf{p} = (p_y, p_z)$ — волновой вектор, $\mathbf{r} = (Y, Z)$ — пространственные координаты.

Малая модуляция решения (33) имеет вид

$$\Phi = (\Phi + \chi)\, \exp[i\,(\mathbf{p}\,\mathbf{r} - \omega\,\tau)], \quad |\Phi| \gg |\chi|,$$

$$\chi = c_1 \, \exp[i\,(\tilde{\mathbf{p}}\,\mathbf{r} - \Omega\,\tau)] + c_2\, \exp[-i\,(\tilde{\mathbf{p}}\,\mathbf{r} - \Omega^*\,\tau)],$$

где $\tilde{\mathbf{p}}$ — вещественный волновой вектор возмущения. Для частоты модуляций $\Omega$ получаем нелинейное дисперсионное соотношение:

$$[\Omega + \omega_0(\mathbf{p}) - \omega_0(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}})][\Omega - \omega_0(\mathbf{p}) - \omega_0(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})] -$$

$$- \Phi^2(\rho_0 - \delta_0)[2\,\omega_0(\mathbf{p}) - \omega_0(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}) - \omega_0(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})] = 0.$$

Инкремент нестабильности $|\mathrm{Im}\Omega|$ волны (33) носит пороговый характер по амплитуде волны $\Phi$. Обсудим два предельных случая.

Для длинноволновых модуляций $\tilde{\mathbf{p}} \ll \mathbf{p}$ получаем

$$(\Omega - \mathbf{v}_g\, \tilde{\mathbf{p}})^2 \approx \omega_0(\tilde{\mathbf{p}})\, [\omega_0(\tilde{\mathbf{p}}) - 2\Phi^2(\delta_0 - \rho_0)], \qquad (34)$$

где $\mathbf{v}_g \approx \partial\omega_0(\tilde{\mathbf{p}})/\partial\tilde{\mathbf{p}}$. Поскольку $\omega_0(\tilde{\mathbf{p}}) > 0$, из (34) заключаем, что при $\delta_0 > \rho_0$ и амплитуде плоской волны (33), превышающей пороговое значение $\Phi^2 > \omega_0(\tilde{\mathbf{p}})/[2\,(\delta_0 - \rho_0)]$, развивается неустойчивость. Растущие возмущения отделяются от волны и уносятся прочь с групповой скоростью $\mathbf{v}_g$.

В другом предельном случае при $|\tilde{\mathbf{p}}| \gg |\mathbf{p}| \approx 0$ частота $\Omega$ определяется выражением

$$\Omega^2 \approx \omega_0(\tilde{\mathbf{p}})\, [\omega_0(\tilde{\mathbf{p}}) - 2\Phi^2(\rho_0 - \delta_0)]. \qquad (35)$$

Формула (35) предсказывает модуляционную неустойчивость слабопериодической волны (33) при условиях

$$\rho_0 > \delta_0, \quad \Phi^2 > \omega_0(\tilde{\mathbf{p}})/[2\,(\rho_0 - \delta_0)].$$

Растущие коротковолновые модуляции $|\tilde{\mathbf{p}}| \gg |\mathbf{p}| \approx 0$ приводят к разбиению слабопериодического распределения намагниченности (33) на сгустки, которые в ходе дальнейшей эволюции образуют нелинейные когерентные структуры. Таковыми могут быть нестационарные объекты типа слабозатухающих кавитонов [43] и двумерных буллетов или стационарные квазиодномерные солитоны.

Хотя модель (26) неинтегрируема методом обратной задачи рассеяния, некоторые из ее солитоноподобных состояний можно построить методом Хироты [44]. Следуя [42], положим

$$\Psi = \frac{G}{F}, \quad u^{(1,0)} = -2\,\partial_Z \ln F, \qquad (36)$$

где $F$ и $G$ — соответственно вещественная и комплексная функции переменных $\tau$, $Y$, $Z$. Уравнения для их вычисления сводятся к билинейным соотношениям:

$$\begin{aligned} &(\sigma D_Y^2 + D_Z^2) F \cdot F = |G|^2, \\ &[iD_\tau + \mu_0 D_Y^2 + \lambda_0 D_Z^2] G \cdot F = 0, \qquad (37) \\ &[\mu_0 D_Y^2 + (\lambda_0 + \delta_0) D_Z^2] F \cdot F - \rho_0 |G|^2 = 0, \end{aligned}$$

где $D_\tau$, $D_Y$, $D_Z$ — операторы Хироты:

$$D_\tau^p\, D_Y^m D_Z^n\, G \cdot F =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau'}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial Y'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial Z'}\right)^n \times$$

$$\times\, G(\tau, Y, Z) F(\tau', Y', Z')|_{\tau=\tau',\, Y=Y',\, Z=Z'}.$$

Для нахождения односолитонного решения положим

$$\begin{aligned} &F = 1 + L \exp(\Phi + \Phi^*), \\ &G = \exp\Phi, \qquad (38) \\ &\Phi = p\,Y + q\,Z + s\,\tau + \Phi_0, \end{aligned}$$

где $L$ — вещественный, $p$, $q$, $s$, $\Phi_0$ — комплексные параметры. Далее вещественную и мнимую части каждого из параметров конкретизируем нижним индексом. Например, $p = p_R + i\, p_I$. Тогда после простых вычислений получаем

$$8L = \sigma p_R^2 + q_R^2, \quad -is = \mu_0 p^2 + \lambda_0 q^2.$$

Выбор чисел $p$, $q$ подчинен ограничению

$$\rho_0 = 8\, L\, [\mu_0 p_R^2 + (\lambda_0 + \delta_0) q_R^2]. \tag{39}$$

Односолитонное возбуждение (36), (38) представляет композицию двух плоских солитонов, а именно, в форме кинка для магнитостатического потенциала

$$u^{(1,0)} = -2\, q_R\, [1 + \mathrm{th}(\theta - \theta_0)] \tag{40}$$

и пульсирующего «светлого» солитона для поля намагниченности

$$\Psi = [2\, (\sigma p_R^2 + q_R^2)]^{1/2} \frac{e^{i\varphi}}{\mathrm{ch}(\theta - \theta_0)}. \tag{41}$$

Здесь

$$\theta = p_R Y + q_R Z + s_R\, \tau + \Phi_{0R},$$
$$\varphi = p_I Y + q_I Z + s_I \tau + \Phi_{0I},$$
$$\theta_0 = \frac{1}{2} \ln \left[ 8\, (\sigma p_R^2 + q_R^2) \right].$$

Магнитостатическое поле $\mathbf{h}$ локализовано вблизи центра солитона, совпадающего с прямой $\theta(Y, Z, \tau) = \theta_0$, движущейся в плоскости $yz$.

Двухсолитонное состояние будем искать в виде [42]

$$\begin{aligned} F = {} & 1 + L_1 \exp(\Phi_1 + \Phi_1^*) + L_2 \exp(\Phi_2 + \Phi_2^*) + \\ & + (L_3 + iL_4) \exp(\Phi_1 + \Phi_2^*) + \\ & + (L_3 - iL_4) \exp(\Phi_1^* + \Phi_2) + \\ & + L_5 \exp(\Phi_1 + \Phi_1^* + \Phi_2 + \Phi_2^*), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} G = {} & \exp \Phi_1 + \exp \Phi_2 + \\ & + (M_1 + iM_2) \exp(\Phi_1 + \Phi_1^* + \Phi_2) + \\ & + (M_3 + iM_4) \exp(\Phi_2 + \Phi_2^* + \Phi_1), \end{aligned}$$

где $\Phi_j = p_j Y + q_j Z + s_j \tau + \Phi_{0j}$; $p_j$, $q_j$, $s_j$, $\Phi_{0j}$ — комплексные параметры. Решение уравнений (32) в форме (42) существует лишь при «жестких» ограничениях на параметры модели и солитонов:

$$\frac{\mu_0}{\rho_0} = \sigma, \quad \frac{\lambda_0 + \delta_0}{\rho_0} = 1,$$
$$q_{1R}\, p_{2R} - q_{2R}\, p_{1R} = 0,$$
$$p_{1R}\, (q_{1I} - q_{2I}) - q_{1R}\, (p_{1I} - p_{2I}) = 0.$$

Последние два из приведенных условий отличаются от найденных в работе [42]. Вещественные параметры $L_s$, $M_s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ определяются формулами

$$8L_\alpha\, (\sigma p_R^2 + q_R^2)^2 = 1, \quad \alpha = 1, 2;$$
$$2(L_3 + iL_4)[(p_1 + p_2^*)^2 \sigma + (q_1 + q_2^*)^2] = 1,$$
$$M_1 - iM_2 = 2L_1(L_3 + iL_4)[(p_1^* - p_2^*)^2 \sigma + (q_1^* - q_2^*)^2],$$
$$L_5 = L_1 L_2 \left| \frac{(p_1 - p_2)^2 \sigma + (q_1 - q_2)^2}{(p_1^* + p_2)^2 \sigma + (q_1^* + q_2)^2} \right|^2.$$

Обсудим возможность формирования пространственно локализованных распределений намагниченности в пленке с асимптотическими условиями

$$\Psi(\mathbf{r}, t), \;\; \partial_{\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{r}, t) \to 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \to \infty, \tag{43}$$

где $\mathbf{r} = (Y, Z)$. Для этого перепишем систему (32) в форме интегродифференциального нелинейного уравнения Шредингера:

$$\begin{aligned} & i\, \partial_\tau \Psi + \lambda_0\, \partial_Z^2 \Psi + \mu_0\, \partial_Y^2 \Psi + \rho_0\, |\Psi|^2 \Psi - \\ & - \delta_0 \Psi \int \partial_Z^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2\, d^2\mathbf{r}' = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

При переходе от (32) к (44) мы учли, что функция Грина уравнения

$$(\partial_Z^2 + \sigma\, \partial_Y^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

зависит от разности координат,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\,\pi} \ln \left[ (Y - Y')^2 \sigma^{-1} + (Z - Z')^2 \right]^{1/2},$$

и воспользовались условиями (43) при интегрировании по частям.

Нелокальное уравнение (44) имеет два интеграла движения. А именно, число спиновых отклонений [45]

$$N = \int |\Psi|^2 d^2\mathbf{r}$$

и гамильтониан

$$\begin{aligned} H = \int d^2\mathbf{r} \Bigg[ & \mu_0 |\partial_Y \Psi|^2 + \lambda_0 |\partial_Z \Psi|^2 - \frac{\rho_0 |\Psi|^4}{2} + \\ & + \frac{\delta_0 |\Psi|^2}{2} \int \partial_Z^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2\, d^2\mathbf{r}' \Bigg]. \end{aligned}$$

Число $N$ сохраняется, поскольку уравнение (44) инвариантно по отношению к преобразованиям вида

$$\Psi \to \Psi \exp(i\,\chi), \quad \Psi^* \to \Psi^* \exp(-i\,\chi),$$

где $\chi$ — вещественный параметр. Сохранение $H$ связано с инвариантностью относительно сдвигов во времени.

Покажем, что модель (44) исключает образование стационарных локализованных конфигураций волнового поля. Утверждение основано на теореме Хобарта–Деррика [46, 47] и аналогично приведенному в [48] для внутренних гравитационных волн в атмосфере.

Пусть

$$\Psi = \Phi(\mathbf{r}) \exp(i\,\nu^2\tau)$$

— локализованное решение уравнения (44), которое является стационарной точкой гамильтониана $H$ при фиксированном числе спиновых отклонений $N$. Иными словами, поле $\Phi(\mathbf{r})$ является экстремалью вариационной задачи $\delta S(\Phi) = 0$ для функционала

$$S = H + \nu^2 N.$$

Такая задача равносильна решению уравнения

$$-\nu^2\Phi + \lambda_0\partial_Z^2\Phi + \mu_0\partial_Y^2\Phi + \rho_0|\Phi|^2\Phi - \\ - \delta_0\Phi \int \partial_Z^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,|\Phi(\mathbf{r}',t)|^2\, d^2\mathbf{r}' = 0. \quad (45)$$

Умножим уравнение (45) на $\Phi^*$ и проинтегрируем результат по плоскости пластины. С учетом (43) получим

$$\nu^2 N + I_1 + I_2 = 0, \quad (46)$$

где

$$I_1 = \int d^2\mathbf{r}\,[\mu_0|\partial_Y\Phi|^2 + \lambda_0|\partial_Z\Phi|^2],$$

$$I_2 = \int d^2\mathbf{r}\left[\delta_0|\Phi|^2\int \partial_Z^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,|\Phi(\mathbf{r}',t)|^2\, d^2\mathbf{r}' - \rho_0|\Phi|^4\right].$$

В тех же обозначениях имеем

$$H = I_1 + I_2/2. \quad (47)$$

Следуя аргументам Деррика [47], рассмотрим простую вариацию поля $\Phi(\mathbf{r}) \to \Phi(\beta\,\mathbf{r})$ с положительным параметром $\beta$, полученную масштабным преобразованием экстремалей $\Phi(\mathbf{r})$. Тогда выражение для $S$ преобразуется к виду $S_\beta = S(\Phi(\beta\,\mathbf{r}))$. Поскольку преобразование $\Phi(\mathbf{r}) \to \Phi(\beta\,\mathbf{r})$ является допустимой вариацией поля со стационарной точкой $\beta = 1$, выполняется необходимое условие экстремума:

$$\left.\frac{dS_\beta}{d\beta}\right|_{\beta=1} = 0\,. \quad (48)$$

После подстановки $\Phi(\mathbf{r}) \to \Phi(\beta\,\mathbf{r})$ и замены переменной интегрирования $\beta\,\mathbf{r} \to \boldsymbol{\rho}$ получим выражение для $S_\beta$ в виде полинома по $\beta$:

$$S_\beta = I_1 + \frac{I_2}{2\,\beta^2} + \frac{\nu^2 N}{\beta^2}.$$

Следовательно, условие (48) дает связь

$$I_2 + 2\nu^2 N = 0. \quad (49)$$

Комбинируя формулы (46), (47), (49), находим значение $H$:

$$H = I_1 + I_2/2 = 0.$$

Таким образом, гамильтониан любого стационарного решения должен быть равен нулю. Отсюда следует общий вывод: любое двумерное локализованное начальное распределение волнового поля в пленке с $H \neq 0$ никогда не достигнет стационарного состояния. В ходе эволюции оно либо расплывается, либо коллапсирует.

Численные расчеты, выполненные для уравнений, близких к предложенной модели (32), подтверждают [26], что локализованные начальные возмущения поля $\Psi$ малой амплитуды расплываются с течением времени. В то же время, когда интеграл движения начального распределения поля $\Psi$ без узлов превышает некоторое пороговое значение, происходит сужение заданного импульса и резкий всплеск его амплитуды, т. е. наблюдается критический коллапс волнового пакета. При учете диссипации энергии коллапс подавляется.

Экспериментальные результаты [13, 14] демонстрируют пространственно-временную фокусировку вытянутого монохроматического импульса объемных магнитостатических волн в широких ЖИГ-волноводах и образование сильно локализованных двумерных волновых пакетов с почти круговым сечением — буллетов (спин-волновых пуль), коллапс которых стабилизируется диссипацией. Каждая спин-волновая пуля распространяется на определенное расстояние, мало меняя свои размеры (но постоянно теряя энергию и понижая амплитуду из-за диссипации). Затем в некоторой точке она начинает расплываться в пространстве, так как ее амплитуда уже недостаточна для самофокусировки. Подчеркнем, что буллет не является устойчивым двумерным солитоном огибающей. Это квазиустойчивый самофокусирующийся волновой пакет, коллапс которого остановлен диссипацией.

С помощью бриллюэновской спектроскопии в пленках ЖИГ удалось наблюдать лобовые столкновения двумерных буллетов и квазиодномерных солитонов [49, 50]. Плоские солитоны огибающей спиновых волн, появляющиеся в результате баланса эффектов дисперсии и нелинейности, сохраняют свою форму после столкновений с другими солитонами. Напротив, квазистабильные двумерные спин-волновые пули, образованные сочетанием эффектов дисперсии, дифракции, нелинейности и диссипации, практически полностью разрушаются при лобовых столкновениях друг с другом. После столкновения двух буллетов образуется результирующий спин-волновой пакет, который вначале катастрофически коллапсирует, а затем расплывается.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для ферромагнитных пластин (пленок) с толщиной больше или порядка обменной длины развит специальный вариант редуктивной теории возмущений, с помощью которого построена двумерная модель нелинейной динамики трехмерных обменно-дипольных волновых пакетов. Выполнен линейный анализ устойчивости квазиодномерной нелинейной монохроматической волны, которая является точным решением полученной модели. Когда волновой вектор возмущений мал по сравнению с волновым вектором нелинейной волны, растущие неустойчивости отщепляются и удаляются от нее. В противоположном пределе развивается модуляционная неустойчивость слабопериодического начального волнового поля. В обоих случаях соответствующие нестабильности носят пороговый характер по амплитуде нелинейной волны. Показано, что развитие модуляционной неустойчивости квазиодномерных волн допускает формирование стационарных плоских солитонов. Указаны условия существования таких солитонов и методом Хироты найдены соответствующие аналитические решения. В то же время в рамках предложенной модели установлено, что пространственно локализованные начальные импульсы волнового поля не образуют долгоживущих волновых структур. Численное моделирование близких моделей свидетельствует о том, что локализованные начальные импульсы малой амплитуды расплываются со временем, а для волновых пакетов большой амплитуды характерен критический коллапс.

Предложенная двумерная модель корректно учитывает локальное обменное и дальнодействующее нелокальное магнитостатическое взаимодействия, а также размерное квантование намагниченности по толщине пленки. Поэтому она полезна для эффективного аналитического описания и численного моделирования реальной нелинейной динамики ферромагнитных пленок.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования России (тема «Квант», № 122021000038-7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Remoissenet, *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*, Springer-Verlag, Berlin (1999).
2. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawall, *Optical Solitons: From Fiber to Photonic Crystals*, Academic, New York (2003).
3. C. Sulem and P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer-Verlag, New York, AMS, Vol. 139 (1999).
4. B. A. Kalinikos and A. B. Ustinov, Phys. Solid State **64**, 193 (2013).
5. B. A. Kalinikos, N. G. Kovshikov, and A. N. Slavin, Sov. Phys. JETP Lett. **38**, 413 (1983).
6. B. A. Kalinikos, N. G. Kovshikov, and A. N. Slavin, Sov. Tech. Phys. Lett. **10**, 936 (1984).
7. B. A. Kalinikos, N. G. Kovshikov, and A. N. Slavin, Sov. Phys. JETP **67**, 303 (1988).
8. K. Tai, A. Hasegava, and A. Tomita, Phys. Rev. Lett. **56**, 135 (1986).
9. M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia (1981).
10. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzáles, *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates. Theory and Experiment*, Springer-Verlag, Berlin (2008).
11. A. Scott, *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures*, Oxford Univ. Press (2003).
12. M. Bauer, C. Mathieu, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, P. A. Kolodin, S. Sure, H. Dötsch, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A. N. Slavin, Phys. Rev. B **56**, R8483 (1997).
13. M. Bauer, O. Büttner, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A. N. Slavin, Phys. Rev. Lett. **81**, 3769 (1998).
14. O. Büttner, M. Bauer, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, Yu. S. Kivshar, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A. N. Slavin, Phys. Rev. B **61**, 11576 (2000).
15. Y. Silberberg, Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).

**16**. A. A. Serga, S. O. Demokritov, and B. Hillebrands, Phys. Rev. Lett. **92**, 117203 (2004).

**17**. В. Г. Лукомский, УФЖ **23**, 134 (1978).

**18**. А. К. Звездин, А. Ф. Попков, ЖЭТФ **84**, 606 (1983) [A. K. Zvezdin and A. F. Popkov, JETP **57**, 350 (1983)].

**19**. V. V. Kiselev, A. P. Tankeev, and A. V. Kobelev, Phys. Met. Metallogr. **82**, 458 (1996).

**20**. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).

**21**. M. Borich, V. V. Smagin, and A. P. Tankeev, Phys. Met. Metallogr. **103**, 118 (2007).

**22**. V. V. Smagin, M. Borich, and A. P. Tankeev, Phys. Met. Metallogr. **100**, 529 (2005).

**23**. A. Davey and K. Stewartson, Proc. Roy. Soc. London A **338**, 101 (1974).

**24**. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980) [S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method*, Plenum, New York (1984)].

**25**. B. G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions: Inverse Spectral Transform Method*, World Sci. Publ. Co. (1993).

**26**. H. Leblond, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 7907 (1999).

**27**. R. E. De Wames and T. Wolfram, J. Appl. Phys. **41**, 987 (1970).

**28**. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967) [A. I. Akhiezer, V. G. Baryachtar, and S. V. Peletminskii, *Spin Waves*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1968)].

**29**. В. В. Ганн, ФТТ **8**, 3167 (1966) [V. V. Gann, Sov. Phys. Solid State **8**, 2537 (1967)].

**30**. Л. В. Михайловская, Р. Г. Хлебопрос, ФТТ **11**, 2854 (1969).

**31**. Л. В. Михайловская, Р. Г. Хлебопрос, ФТТ **16**, 77 (1974).

**32**. Б. Н. Филиппов, ФММ **32**, 911 (1971) [B. N. Filippov, Phys. Met. Metallogr. **32**, 12 (1971)].

**33**. Б. Н. Филиппов, И. Г. Титяков, ФММ **35**, 28 (1973) [B. N. Filippov and I. G. Tityakov, Phys. Met. Metallogr. **35**, 21 (1973)].

**34**. Б. А. Калиникос, Изв. вузов. Физика **25**(8), 42 (1981) [B. A. Kalinikos, Sov. Phys. J. **24**, 718 (1981)].

**35**. R. W. Damon and J. R. Eshbach, J. Phys. Chem. Solids **19**, 308 (1961).

**36**. E. B. Sonin, Phys. Rev. B **95**, 144432 (2017).

**37**. G. Li, C. Sun., T. Nattermann, and V. L. Pokrovskii, Phys. Rev. B **98**, 014436 (2018).

**38**. G. Li and V. Pokrovsky, Ann. Phys. **460**, 169572 (2024).

**39**. А. Найфе, *Методы возмущений*, Мир, Москва (1976) [A. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Wiley Intersci., New York (1973)].

**40**. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988) [R. K. Dodd, Y. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Pr. (1984)].

**41**. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1972) [A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Vol. 1,2, N. Y. Graylock Press, Rochester (1957)].

**42**. G. Huang, V. V. Konotop, H. Tam, and B. Hu, Phys. Rev. E **64**, 056619 (2001).

**43**. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972) [V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972)].

**44**. Р. Хирота, *Прямые методы интегрирования в теории солитонов*, в кн. *Солитоны*, под ред. Р. Буллера, Ф. Кодри, Мир, Москва (1983), с. 175–192.

**45**. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).

**46**. R. H. Hobart, Proc. Phys. Soc. **82**, 201 (1963).

**47**. G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).

**48**. V. M. Lashkin and O. K. Cheremnykh, Phys. Rev. E **110**, 024216 (2024).

**49**. O. Büttner, M. Bauer, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, M. P. Kostylev, B. A. Kalinikos, and A. N. Slavin, Phys. Rev. Lett. **82**, 4320 (1999).

**50**. A. N. Slavin, O. Büttner, M. Bauer, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, M. P. Kostylev, B. A. Kalinikos, V. V. Grimalsky, and Yu. Rapoport, Chaos **13**, 693 (2003).