ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 1 (7), стр. 61–67

РЕЗОНАНСЫ С МОНОТОННЫМИ И НЕМОНОТОННЫМИ РЕШЕНИЯМИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМО-СИСТЕМЕ ПАРКЕРА

Ф. А. Азизов [a], ***Е. В. Юшков*** [b,c*], ***Д. Д. Соколов*** [b,d]

[a] *Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в г. Баку AZ1143, Баку, Азербайджан*

[b] *Московский государственноый университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики 119991, Москва, Россия*

[c] *Институт космических исследований Российской академии наук 117997, Москва, Россия*

[d] *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук 108840, Троицк, Россия*

Поступила в редакцию 1 марта 2025 г.,
после переработки 14 апреля 2025 г.
Принята к публикации 15 апреля 2025 г.

Проведено численное исследование параметрического резонанса вблизи переходной области линейной динамо-системы Паркера. Показано, что реакция системы на периодическое изменение динамо-параметра имеет как общие, так и отличные черты с классическим параметрическим резонансом для уравнения гармонических колебаний. Так, в локализованной частотной области, например, вблизи удвоенной частоты, также может наблюдаться усиление скорости генерации, однако при этом в околорезонансной области может происходить не сдвиг частоты, как в классическом случае, а ее расщепление с последующим появлением биений и не увеличением, а наоборот, существенным подавлением скорости генерации. Однако наиболее ярким из обнаруженных отличий оказалась возможность возникновения нового типа резонанса — резонанса на фоне исходно монотонного решения. Этот резонанс можно объяснить наличием у модели Паркера не одной, а нескольких собственных решений с близкими скоростями генерации. В этом случае резонанс с гармоникой, растущей медленнее, чем монотонное решение, может усилить ее и сделать основной, переводя на время резонанса монотонное решение системы в периодически осциллирующее.

DOI: 10.31857/S0044451025070077

1. ВВЕДЕНИЕ

Параметрическим резонансом обычно называют отклик динамической системы на периодическое изменение параметров, при котором амплитуда осциллирующего во времени решения начинает экспоненциально нарастать. Свойства такого поведения хорошо знакомы из примера возникновения резонанса в уравнении гармонических колебаний на частоте периодического возбуждения Ω, равной удвоенной собственной частоте системы ω [1]. Однако в случае динамо-систем, описывающих формирование среднего магнитного поля в турбулентных проводящих средах, даже в самой простой линейной постановке экспоненциально нарастающее решение может присутствовать само по себе, без параметрического возбуждения [2]. Таким образом, свойства резонансов в таких системах могут существенно отличаться от классической картины. Исследование этих отличий и составляет предмет интереса настоящей работы.

В современной теории динамо существует множество динамо-моделей, описывающих формирование средних магнитных полей тех или иных астрофизических систем [3]. Но так как нашей задачей является выделение некоторых отличительных особенностей резонансов в динамо-системах, то в рамках настоящей работы мы рассматриваем простейшую и, пожалуй, наиболее известную модель сфери-

[*] E-mail: yushkov.msu@mail.ru

ческого динамо [4]. Эта модель, предложенная Паркером в 50-х годах [5], описывает генерацию магнитного поля в тонком сферическом слое при наличии дифференциального вращения и зеркальной асимметрии течения. В зависимости от параметров она может демонстрировать как осциллирующее поведение поля по типу солнечного, при котором полоидальное поле трансформируется в тороидальное и обратно, так и монотонное поведение, соответствующее, например, магнитному полю Земли, хотя и здесь присутствуют различные точки зрения [6, 7].

Резонансы в звездных и планетарных системах обращали на себя внимание, конечно, и ранее, так как периодическое воздействие на параметры, может быть обеспечено в них, например, планетарным или спутниковым влиянием [8]. В маломодовом приближении модели Паркера, при котором она сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, резонансы исследовались в работах [9, 10]. Эти исследования показали, что такого типа «резонансы» могут существенно отличаться от классического гармонического резонанса наличием, например, широкой нелокализованной области усиления скорости генерации, возможностью появления биений или резонансного подавления скорости генерации. Конечно, маломодовое приближение — это достаточно грубое упрощение, продемонстрировавшее отличия от классического представления о резонансе, но требующее проверки на исходных более сложных динамо-моделях. Тем более, помимо прочего, маломодовые результаты показали, что наличие или отсутствие узкого резонансного пика может зависеть от выбора различных типов диффузии. В более общей модели Паркера, где не требуется раскладывать решение по тому или иному числу мод, диффузионные слагаемые однозначно определяются вторыми частными производными и позволяют исключить свободу в их выборе. Поэтому исследование резонанса в оригинальной паркеровской, пусть даже простой, модели представляется необходимым и важным вопросом.

Для ответа на вопрос о влиянии периодического изменения параметров на поведение динамосистемы нами был выбран путь численного эксперимента. Использование асимптотического анализа в маломодовом случае показало, что его точность невелика и требует знания аналитического решения при отсутствии параметрического возмущения, что в случае системы Паркера в частных производных представляется трудно реализуемым.

Забегая вперед, скажем, что численное исследование в целом подтвердило выводы работ с маломодовыми приближениями, особенно в плане появления биений и резонансного подавления скорости генерации. Однако было обнаружено и неизвестное ранее отличие от классического случая, заключающее в определенного рода резонансе с монотонным решением. Конечно, это явление сложно назвать резонансом в традиционном смысле, однако в определенном диапазоне возбуждающих частот возмущения скорость роста монотонного динамо-решения может существенно возрасти, при этом само решение трансформируется в осциллирующее, а при выходе из резонансной области возвращается обратно в монотонное. Демонстрируя это явление, мы предлагаем объяснение его на маломодовом языке. Обсуждение вопроса о трактовке и важности данного результата в прикладных задачах теории динамо требует, очевидно, дополнительного изучения в рамках астрономии. В рамках данной работы мы ограничиваемся лишь линейным приближением, не рассматривая обратного влияния генерируемого магнитного поля на поле скорости. Такие нелинейные эффекты, как, например, отвечающие за нелинейное подавление источников генерации, требуют отдельного изучения.

2. МОДЕЛЬ ПАРКЕРА

В работе используется классическая динамомодель, которая является следствием уравнения среднего поля — усредненного уравнения магнитной индукции, записанного в сферической системе координат. Предполагая азимутальную симметрию крупномасштабной структуры и пренебрегая радиальной зависимостью в тонком сферическом слое, для тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля

$$\mathbf{B} = B(t,\theta)\mathbf{e}_\varphi + R\,\mathrm{rot}(A(t,\theta)\mathbf{e}_\varphi) \tag{1}$$

можно получить систему уравнений в частных производных, записанную в безразмерном виде:

$$\dot{A} = R_\alpha B + A_{\theta\theta}, \tag{2}$$

$$\dot{B} = R_\omega \sin(\theta) A_\theta + B_{\theta\theta}. \tag{3}$$

Здесь точки в левой части уравнений соответствуют производным по времени, измеряемому в единицах R^2/β, R — радиус сферического слоя, а β — коэффициент турбулентной диффузии. Функции $R_\alpha = R\alpha(\theta)/\beta$ и $R_\omega = -R^3\Omega_r/\beta$ отвечают за гидродинамическую спиральность α и дифференциальное вращение. Для использования одного параметра вместо двух, мы обезразмериваем функцию $A(t,\theta)$ на постоянную часть R_α таким образом,

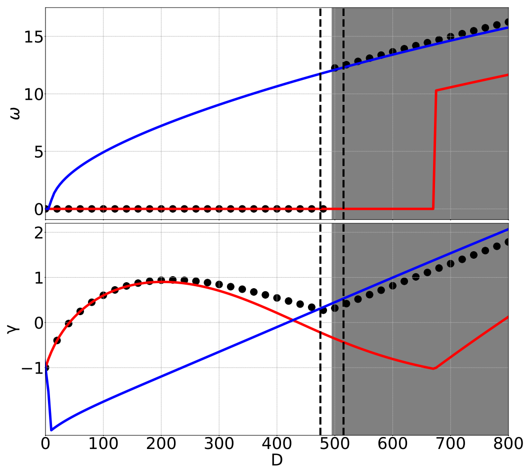

Рис. 1. Графики зависимости частоты ω (верхняя панель) и скорости γ (нижняя панель) генерации от динамо-числа D при отсутствии параметрического возбуждения. Черные точки соответствуют решениям модели Паркера, красные и синие линии – маломодовому приближению для дипольной и квадрупольной структур соответственно. Белая область монотонных решений, серая область периодических осцилляций, вертикальные штриховые линии соответствуют динамо-числам $D = 475$ и $D = 515$

чтобы в уравнении для A осталась только функциональная часть $R_\alpha(\theta) = \cos\theta\sin^2\theta$, а уравнение для B включало в себя единый параметр, пропорциональный произведению $R_\alpha R_\omega$ и называемый динамо-числом D. Другими словами, далее мы моделируем поведение системы

$$\dot{A} = \cos\theta\sin^2(\theta)B + A_{\theta\theta}, \tag{4}$$

$$\dot{B} = D(1 + \varepsilon\sin\Omega t)\sin(\theta)A_\theta + B_{\theta\theta}, \tag{5}$$

в динамо-число которой периодически вносится возмущение с частотой Ω и относительной амплитудой ε. При этом мы не акцентируем внимание на том, что конкретно является причиной такого изменения: приливные силы, ударно-релаксационные процессы, результаты обратного влияния осциллирующего магнитного поля на гидродинамические параметры или что-то другое [11].

Рассматриваемая модель была постулирована в работе Паркера [5], позже она была выведена из уравнений среднего поля Штеенбека – Краузе – Рэдлера [12]. Формальная процедура этого вывода представлена, например, в [13].

Очевидно, что у используемой модели есть ряд дискуссионных моментов, например, конкретный вид функции гидродинамической спиральности $R_\alpha(\theta)$ — ее распределение по широтам. Наш выбор здесь обусловлен необходимостью смены знака спиральности при переходе через экватор, убыванием вблизи полюсов, а также возможностью простого сведения моделируемой системы к ее маломодовому аналогу. При таком выборе функции $R_\alpha(\theta)$ разложение решения по модам является традиционным и соответствующим описанию в предыдущих работах авторов [10]. Функции B и A раскладываются соответственно по четным и нечетным относительно экватора гармоникам, так что из-за наличия ротора в представлении (1) четности у них оказываются различными: для удобства решения с нечетными B относительно экватора далее мы будем характеризовать дипольной структурой, а с четными B — квадрупольной. При таком разложении диффузия из-за наличия второй производной очевидно оказывается более существенной для более старших гармоник. Поэтому, начиная с некоторого порядка моды, мы ограничиваемся всего тремя — гармоники становятся пренебрежимо малыми. Маломодовое разложение является удобным инструментом для трактовки и сравнения получаемых результатов с результатами прошлых работ. Поэтому, проанализировав влияние количества мод разложения и конкретного вида функции спиральности на получаемые результаты и не найдя существенных отличий, мы ограничиваемся описанным выше выбором.

Второй дискуссионный вопрос, связанный с моделью, относится к радиальной компоненте диффузии. Традиционно [14] она учитывается путем добавления в правую часть уравнений (4), (5) слагаемых типа $-\mu A$ и $-\mu B$ соответственно. Добавление этих слагаемых эквивалентно умножению решения системы без них на $\exp(-\mu t)$. Поскольку в рамках настоящей работы нас не интересует влияние на решение начальных данных, а интересует именно скорость роста решения, коэффициент μ выбирается равным нулю. В случае необходимости его учета от вещественной части найденной скорости генерации просто необходимо вычесть это значение μ. В следующем разделе мы подробно описываем численный эксперимент, целью которого является решение системы (4), (5) при разных D и Ω и нахождение экспоненциальной скорости роста и частоты осцилляций решения системы, которые оказываются не зависящими от начальных условий.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для реконструкции решения модели Паркера (4), (5) использовался классический метод конечных разностей с неявной схемой Эйлера [15]. Для этого система сводилась к матричному виду

$$\mathbf{u}(t+\tau) = (E - \tau M)^{-1}\mathbf{u}(t), \tag{6}$$

где M — матрица системы с конечными разностями, E — единичная матрица, τ — шаг по времени, $\mathbf{u}(t)$ — столбец решений в момент времени t, и решалась далее с использованием языка Python (NumPy, SciPy).

Сначала в широком диапазоне изменения динамо-числа были вычислены скорости генерации и собственные частоты (шаг по безразмерному времени $\tau = 10^{-3}$, счет шел до конечного времени $T = 200$). Была проведена проверка выбора начальных условий, которая показала, что независимо от них решение выходит на собственную функцию с максимальной скоростью роста. Однако для этого может потребоваться много времени, особенно если не угадать четность относительно экватора наиболее быстро растущего решения. По этой причине начальные условия для функций A и B выбирались как собственные векторы из маломодовой системы, которая решалась как эволюционная система, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений (в точности как в более ранних работах авторов [9]).

Скорость роста и частота осцилляций рассчитывались по динамике функции $A(t,\theta)$ при фиксированной широте. Поскольку результаты не зависели от выбора точки, выбор был остановлен на $\theta = \pi/4$. Для получения скорости генерации γ находились максимальные значения в осцилляциях на графике логарифма $|A|$ во второй половине временной шкалы $[T/2, T]$, далее методом наименьших квадратов из библиотеки NumPy находилась γ. Для областей без осцилляций применялся тот же метод, только без поиска максимумов осцилляций. Для вычисления частот рассчитывалось преобразование Фурье от $A(t,\pi/4)\exp(-\gamma t)$ и бралась частота максимального спектрального пика.

Результаты расчета задачи без параметрического возбуждения представлены на рис. 1. На верхней и нижней панелях черными точками изображены вычисленные частоты и скорости генерации при положительных значения $D \in [0, 800]$. Четко видна белая область монотонного решения при малых D и серая область решения с осцилляциями при больших D. Красные и синие линии соответствуют маломодовым приближениям, состоящим из трех гармоник: синие для нечетных относительно экватора A и соответственно для четных B, т. е. квадрупольной структуре, красные — наоборот, дипольной структуре. Другими словами, синие соответствуют разложению $A = a_1 \sin 2\theta + a_2 \sin 4\theta + a_3 \sin 6\theta$, а красные $A = a_1 \sin\theta + a_2 \sin 3\theta + a_3 \sin 5\theta$. Видно, что несмотря на малое количество мод совпадение неплохое, хотя и не абсолютно точное, а именно, немного сдвинута переходная область смены монотонного решения на осциллирующее. Вертикальные штриховые линии показывают значения динамо-чисел ($D = 475$ и $D = 515$), о которых подробно пойдет речь далее.

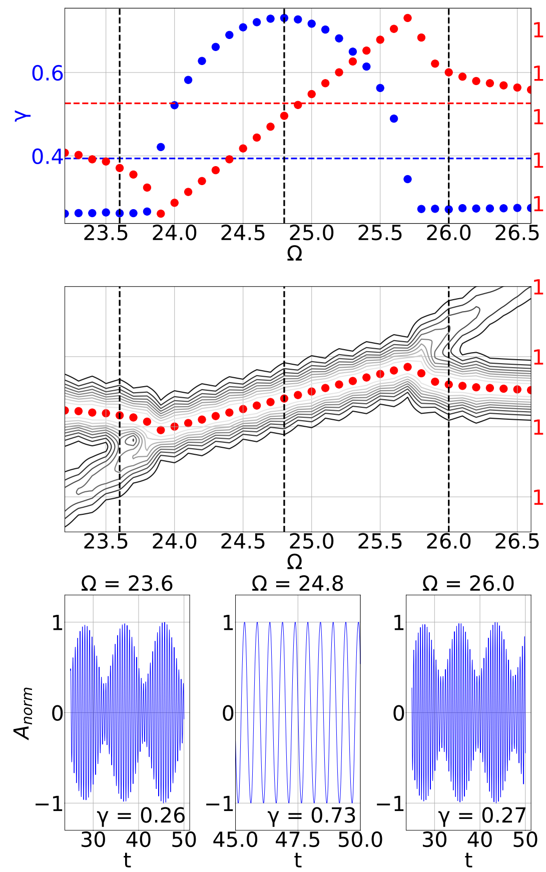

Рис. 2. Осциллирующее решение при $D = 515$. На верхней панели графики зависимости частоты ω (красные точки) и скорости γ (синие точки) генерации от частоты параметрического возбуждения Ω. На средней панели спектральная карта динамического поведения системы, на которой красными точками выделены положения максимального спектрального пика. На нижней панели зависимости от времени нормированной на максимальное значение функции $A(t,\pi/4)\exp(-\gamma t)$ на частотах возбуждения, указанных выше вертикальными штриховыми линиями

Скорости и частоты генераций в случае параметрического воздействия рассчитывались аналогично, в широких диапазонах Ω, ε и D. Для ускорения численного счета временной шаг выбирался равным $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$, при этом для областей с четким резонансом счет шел до $T = 60$, а для областей с его отсутствием и переходных областей — до $T = 300$. Результаты, которые показаны далее, были получены для $\varepsilon = 0.3$ и для двух динамо-чисел, соответствующих монотонному и немонотонному решениям. При этом демонстрируемая картина является достаточно типовой и, на наш взгляд, достаточно четко обрисовывает различия между динамо-резонансом и классическим случаем.

На рис. 2 приведена картина типичного динамо-резонанса при больших $D = 515$. На верхней панели представлены зависимости скорости γ (синие точки) и частоты ω (красные точки) генерации от частоты параметрического возбуждения Ω. Красные и синие горизонтальные линии соответствуют частоте и скорости невозмущенного решения. Хорошо видно, что вблизи удвоенной собственной частоты ($\Omega = 24.8$) наблюдается яркий резонансный пик с увеличение скорости генерации почти в два раза, от $\gamma = 0.4$ до $\gamma = 0.73$. Интересно, что вблизи резонансной области наблюдается ситуация с двумя характерными чертами, обнаруженными и в маломодовых решениях: во-первых, наблюдается существенное понижение скорости генерации вплоть до $\gamma = 0.26$, а во-вторых, появление биений — при этом в области максимального резонанса биения отсутствуют и наблюдается не расщепление частоты, а только сдвиг. Для лучшего понимания на средней панели для различных возбуждающих частот представлена спектральная картина решения, в которой видны и область появления биений, и область их отсутствия. На самых нижних панелях представлены динамические решения $A(t, \pi/4)\exp(-\gamma t)$, нормированные на максимальное значение и соответствующие трем частотам, обозначенным вертикальными штриховыми прямыми на верхней и средней панелях. Заметим при этом, что рис. 2 не только показывает динамику резонанса в динамо-системе, но и демонстрирует точность вычисления соответствующих скоростей генерации.

Другая особенность резонанса, отличная от классического случая, представлена на рис. 3 для малых $D = 475$. Верхняя и нижняя панели соответствуют аналогичным панелям на рис. 2, с учетом того, что без параметрического возбуждения решение является монотонным, т. е. нет собственной частоты (красной штриховой горизонтальной линии). Несмотря на это, четко видно, что существует резонансная область, в которой скорость генерации увеличивается примерно в два раза от $\gamma = 0.3$ до $\gamma = 0.54$. Более того, в этой резонансной области появляется частота осцилляций (красные точки). Как видно на нижних панелях с нормирован-

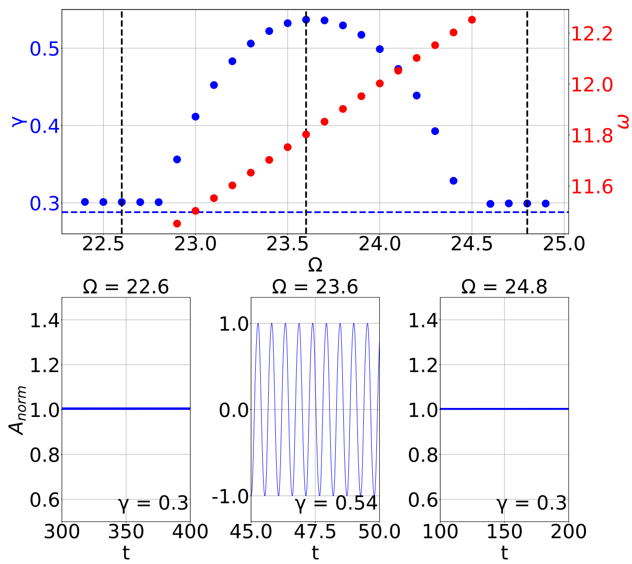

Рис. 3. Монотонное решение при $D = 475$. На верхней панели графики зависимости частоты ω (красные точки) и скорости γ (синие точки) генерации от частоты параметрического возбуждения Ω. На нижней панели зависимости от времени нормированной на максимальное значение функции $A(t, \pi/4)\exp(-\gamma t)$ на частотах возбуждения, указанных выше вертикальными штриховыми линиями. Четко видна трансформация монотонного решения в осциллирующее при заходе в резонансную область

ной динамикой $A(t, \pi/4)\exp(-\gamma t)$, при заходе в резонансную область скорость роста решения увеличивается и из монотонного оно трансформируется в осциллирующее.

Аналога такой ситуации в случае классического резонанса нет, но его можно объяснить с помощью маломодового приближения и именно с классической точки зрения. Так, рис. 1 показывает, что при малых динамо-числах в области монотонного решения могут присутствовать дипольные и квадрупольные моды с близкими скоростями генерации. При малых динамо-числах монотонная мода имеет большую скорость роста и является доминирующей, однако резонанс происходит через взаимодействие с осциллирующей модой с меньшей скоростью роста. Если оказывается так, что при резонансе ее скорость становится больше скорости роста монотонного решения, то монотонное решение трансформируется в осциллирующее. При выходе из резонансной области происходит возврат к исходному монотонному поведению. Конечно, такое объяснение является лишь качественным, так как для динамо-системы Паркера в частных производных разбиение на четно-нечетные моды в явном виде не вводится и мы анализируем просто ее собственную функцию. Однако оно дает хорошие результаты и при достаточной интенсивности резонанса в большом диапазоне динамо-чисел, где монотонные и немонотонные моды достаточно близки друг к другу, действительно наблюдаются такого типа резонансы с исходно монотонными решениями.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе исследовано явление параметрического резонанса в линейной динамо-системе Паркера. Несмотря на то что модель выбрана достаточно простой, в процессе численного моделирования обнаружен ряд классических и неклассических эффектов. Кратко их можно сформулировать следующим образом.

1. Для осциллирующих решений динамо-модели Паркера параметрический резонанс наблюдается вблизи удвоенной собственной частоты системы, при этом зависимости частотного сдвига и усиления экспоненциального роста от характеристик параметрического воздействия ведут себе аналогично классическому резонансу для уравнения гармонических осцилляций.

2. С другой стороны, в околорезонансной области отклик динамо-системы на периодическое возмущение может обладать свойствами, совсем не похожими на свойства классического резонанса: так, численные результаты демонстрируют возможность расщепления частоты осцилляций, появления биений и одновременное снижение скорости экспоненциального роста — своего рода «околорезонансное» подавление, обнаруженное ранее в маломодовых динамо-моделях.

3. Наконец, самый неожиданный эффект, отсутствовавший в проводимых ранее маломодовых исследованиях, проявил себя как наличие резонансной области для исходно монотонного решения. На основании того, что при заходе в такую резонансную область монотонное решение трансформируется в осциллирующее, а при выходе — обратно в монотонное, мы объясняем его резонансным взаимодействием с осциллирующей гармоникой, меньшей по скорости роста, чем монотонное решение.

Отметим, что одной из особенностей нашего численного эксперимента является примитивность используемой модели сферического динамо. Это связано как с исключением азимутальной/радиальной зависимости, т. е. с рассмотрением очень тонкого слоя с вращательной симметрией, так и со специальным выбором функции гидродинамической спиральности, не говоря уже о рассмотрении исключительно линейного случая, не учитывающего обратного влияния магнитного поля на поле скорости. Такое упрощение, конечно, ограничивает возможность прямых аналогий с поведением магнитных полей небесных тел, но позволяет надеяться, что обнаруженные эффекты вполне могут встречаться в реальных динамо-системах, а не являются следствием специфических модельных предположений.

Что касается резонансного усиления, то этот эффект классический и неоднократно обсуждался ранее, однако мы обнаружили и неклассические эффекты. Во-первых, околорезонансные биения могут приводить к тому, что звездные циклы могут не столько возбуждаться периодическим планетарным взаимодействием, сколько модулироваться, образуя чередующиеся максимумы и минимумы звездной активности. Для того чтобы наблюдались биения, не требуется четкой кратности периодов — как раз при четкой краткости их нет, а проявляются они в достаточно широком частотном диапазоне около резонансного пика, поэтому могут приводить к модуляции не только моночастотным, но и квазихаотическим возбуждением в конвективной оболочке [16]. Во-вторых, подавление скорости генерации в околорезонансной области может приводить к тому, что динамо-генерация может подавляться возникающими резонансными взаимодействиями. Такое подавление может приводить как к разрушению крупномасштабной магнитной структуры, временному прекращению генерации, так и к образованию локальных состояний устойчивости, в которых стабилизируется динамо-механизм. Кроме того, резонансы с монотонными решениями вполне могли бы служить причиной временной или постоянной трансформации/инверсии магнитной структуры из дипольной в квадрупольную и обратно. Однако эти эффекты, включая результаты нелинейного взаимодействия, приводящего к насыщению генерации, выходят за рамки данной работы и требуют специального рассмотрения.

Наконец, еще раз заметим, что в данной работе параметрическим резонансом называется отклик системы Паркера, приводящий к увеличению экспоненциального роста решения данной системы в локализованном диапазоне частот периодического изменения динамо-числа [17]. Для динамо-чисел, при которых решение системы осциллирует и без параметрического возбуждения, отклик системы на параметрическое изменение динамо-числа практически не отличается от классического параметрического резонанса в уравнении гармонических колебаний, поэтому мы считаем что термин «параметрический резонанс» более-менее оправдан. Биение и подавление скорости генерации наблюдаются в непосредственной близости от резонансной локализованной области, поэтому мы и называем ее «околорезонансной». Для монотонных решений мы объясняем трансформацию монотонного решения в осциллирующее (также в некоторой локализованной области частот параметрического возбуждения) аналогичным резонансом, но с осциллирующей «модой» системы Паркера меньшей скорости роста. Мы согласны, что для этого явления можно было бы придумать другой термин, избежав общепринятой терминологии, но в данном случае мы решили ограничиться им.

Благодарности. Авторы выражают благодарность руководству филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Баку (Азербайджан) за поддержку научной работы студента 4 курса Ф. А. Азизова.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-000 69).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Механика*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2004).
2. Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва (2006).
3. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН **106**, 431 (1972).
4. P. Charbonneau, Living Rev. Sol. Phys. **17**, 4 (2020).
5. E. N. Parker, Astrophys. J. **122**, 293 (1955).
6. B. A. Buffett, Science **288**.5473, 2007 (2000).
7. J. Wicht and S. Sanchez, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **113**(1-2), 2 (2019).
8. F. Stefani, A. Giesecke, and T. Weier, Sol. Phys. **294**(5), 60 (2019).
9. А. Ю. Серенкова, Д. Д. Соколов, Е. В. Юшков, ЖЭТФ **163**, 514 (2023).
10. D. D. Sokoloff, A. Yu. Serenkova, and E. V. Yushkov, ComBAO **69**, 231 (2022).
11. B. L. Smorodin and M. Lücke, Phys. Rev. E **79**, 026315 (2009).
12. F. Krause and K.-H. Radler, *Mean-Field Magneto-Hydrodynamics and Dynamo Theory*, Elsevier, Amsterdam (2016).
13. D. Sokoloff, E. Nesme-Ribes, and M. Fioc, Lect. Notes Phys. **458**, 213 (1995).
14. S. M. Tarbeeva, V. B. Semikoz, D. D. Sokoloff, Ast. Rep. **55**, 456 (2011).
15. Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, Москва (1978).
16. B. L. Smorodin and N. N. Kartavykh, Microgravity Sci. Technol. **32**, 423 (2020).
17. D. Schmitt and G. Rüdiger, Astron. Astrophys. **264**, 1 (1992).