

СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ФОНОНАМ В СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННОМ БОРОМ СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ АЛМАЗЕ

В. А. Кукушкин^{a,b}, Ю. В. Кукушкин^b*

^a *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грекова
Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

^b *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603022, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 10 декабря 2024 г.,
после переработки 24 января 2025 г.
Принята к публикации 3 февраля 2025 г.

Найдена скорость передачи энергии от элементарных возбуждений фононам (т.е. кристаллической решетке) в сильно легированном бором сверхпроводящем алмазе. Вычисления проведены с помощью методов квантовой теории поля при ненулевых температурах с использованием температурных функций Грина и техники Мацубары. В результате показано, что эта скорость ограничивает допустимую амплитуду переменных электрических полей в сверхпроводящем алмазе величинами порядка 10 В/см, при превышении которых произойдет разогрев элементарных возбуждений до температур выше критической, т.е. разрушение сверхпроводящего состояния.

DOI: 10.31857/S0044451025050098

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхпроводимость была открыта и традиционно исследовалась в металлах, на основе которых и было создано большинство используемых сегодня сверхпроводящих устройств. С металлами во многом схожи высоколегированные полупроводники, в которых вследствие высокой концентрации легирующей примеси значительная часть примесных атомов ионизируется и происходит фазовый переход в состояние с металлическим типом проводимости, так называемый переход изолятор–металл [1]. В результате этого перехода концентрация свободных носителей заряда остается высокой [2] даже при низких температурах, необходимых для наблюдения сверхпроводимости. Для них возможность сверхпроводимости была теоретически предсказана в 1950–1960 годах [3–6]. Экспериментально она была открыта для самолегированных GeTe [7], SnTe [8] и отожеженного SrTiO₃ [9]. Они оказались сверхпроводниками

второго рода [10] с температурой перехода между 50 и 500 мК. Однако сверхпроводящие полупроводники не продемонстрировали каких-либо практических преимуществ по сравнению с металлами, и поэтому их дальнейшее исследование не вызывало большого интереса.

Такая ситуация сохранялась до 2004 г., когда была открыта сверхпроводимость в таком «необычном» полупроводнике, как алмаз (при сильном легировании акцепторной примесью бора до концентрации порядка и более 10^{21} см⁻³, когда в нем значительная часть атомов примеси ионизируется и создает дырки в валентную зону, т.е. происходит переход изолятор–металл) [11]. Он тоже оказался сверхпроводником второго рода [12] с критической температурой T_c около нескольких кельвинов. Вследствие уникальных, во многом рекордных по сравнению с другими веществами свойств этого материала (химической и радиационной стойкости, высоких механической прочности и теплопроводности и др.) [13], это открытие вызвало большой интерес с точки зрения возможных приложений и положило начало интенсивному исследованию сверхпроводящего алмаза [14].

* E-mail: vakuk@ipfran.ru

Высокая теплопроводность алмаза может обусловить его преимущество перед другими сверхпроводящими материалами при создании электронных и оптоэлектронных устройств. Оно связано с тем, что высокая теплопроводность позволяет более эффективно отводить тепло, выделяющееся при воздействии на него переменного электромагнитного поля за счет разогрева элементарных возбуждений, всегда имеющих в нем при конечной температуре. В результате может оказаться, что алмаз можно поддерживать при температуре ниже критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние даже при высокой интенсивности падающего на него излучения. Однако эта теплопроводность (порядка $0.1 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$ при температурах в районе критической [15]) обусловлена в основном фононами. Теплопроводность же дырок даже при необходимой для сверхпроводящего перехода высокой их концентрации порядка 10^{21} см^{-3} значительно ниже (что доказывается практической независимостью теплопроводности алмаза от концентрации дырок, даже когда последняя существенно превышает 10^{21} см^{-3} [16]). Поэтому для использования высокой теплопроводности алмаза необходима достаточно быстрая передача энергии от элементарных возбуждений фононам. Именно скорость этой передачи может лимитировать скорость охлаждения элементарных возбуждений и, как следствие, предельные интенсивности воздействующих на алмаз электромагнитных полей, еще не вызывающих разрушения его сверхпроводимости из-за нагрева.

Данная работа посвящена вычислению скорости передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в сверхпроводящем алмазе. Для этого в следующем разделе для нее выведена общая формула, на основе которой в третьем разделе эта скорость рассчитана как функция температур элементарных возбуждений и фононов. В заключительном разделе подведены итоги работы.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ФОНОНАМ С ПОМОЩЬЮ ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ МАЦУБАРИ

Найти скорость передачи энергии от элементарных возбуждений фононам можно путем вычисления мнимых частей энергий этих возбуждений, т. е. их затухания за счет их взаимодействия с фононами. При нулевой температуре это затухание было вычислено в [17] путем нахождения полюсов функции Грина дырок в фурье-представлении. В слу-

чае отличных от нуля температур, который и представляет интерес для вычисления скорости передачи энергии от элементарных возбуждений фононам, для этого нужно найти полюсы запаздывающей функции Грина дырок [18]. Последняя при конечных температурах строится как аналитическое продолжение с дискретных точек мнимой положительной полуоси частот, в которых она совпадает с температурной функцией Грина дырок при соответствующих дискретных положительных частотах. Нахождение последней может быть в принципе выполнено с помощью диаграммной техники Мацубары. Однако проведение соответствующих вычислений связано со значительными математическими трудностями.

Поэтому представляется интересным другой способ нахождения скорости передачи энергии от элементарных возбуждений фононам, а именно, вычисление при конечных температурах мнимых частей не самих энергий элементарных возбуждений, а мнимых частей энергий фононов, т. е. их затухания за счет взаимодействия с элементарными возбуждениями. Это можно сделать описанным выше способом, в котором вместо функций Грина дырок надо говорить о функциях Грина фононов, т. е. фактически определить не учтенное в [18, 19] влияние сверхпроводящих свойств дырок на характеристики фононов. При этом для температурных функций Грина дырок, которые необходимы для проведения таких вычислений, можно взять простые выражения, которые получаются в хорошо известной модели Абрикосова и Горькова [18] с двухчастичной дельта-функциональной потенциальной энергией их взаимного притяжения.

Отметим, что мнимые части у энергий фононов могут появляться и за счет их отражения от границы высоколегированного бором и нелегированного слоев алмаза (первый обычно представляет собой осажденную из газовой фазы пленку, которая и переходит в сверхпроводящее состояние, а второй — подложку, на которую эта пленка осаждается). Однако вследствие близости постоянных кристаллических решеток высоколегированного и нелегированного слоев (их разница составляет всего 0.1% [20]) и масс атомов бора и углерода характеристики фононов в них близки, и поэтому соответствующий коэффициент отражения от их границы мал. Кроме того, это отражение могло бы оказать существенное влияние на характеристики фононов и тем самым на их взаимодействие с дырками, лишь если соответствующая длина свободного пробега оказалась бы меньше тепловой длины волны фононов при температуре

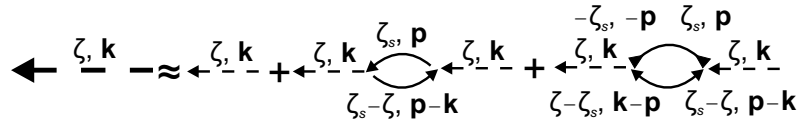


Рис. 1. Диаграмма первого порядка по квадрату энергии дырочно-фононного взаимодействия w^2 для поправки к температурной гриновской функции фононов за счет их взаимодействия с дырками в сильно легированном бором алмазном сверхпроводнике. Толстая штриховая линия — фурье-образ точной температурной функции Грина фононов со знаком минус, $-\mathcal{D}(\zeta, \mathbf{k})$; тонкая штриховая линия — фурье-образ температурной функции Грина свободных фононов со знаком минус, $-\mathcal{D}_0(\zeta, \mathbf{k})$; тонкие сплошные линии с одинарными стрелками — фурье-образы температурных функций Грина дырок со знаком минус, $-\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$ и $-\mathcal{G}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k})$; тонкие сплошные линии с двумя входящими и двумя выходящими стрелками — фурье-образы аномальных температурных функций Грина дырок со знаком минус, $-\bar{\mathcal{F}}(\zeta_s, \mathbf{p})$ и $-\mathcal{F}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k})$ соответственно; каждой вершине сопоставляется множитель $-w/\rho$; в каждой вершине выполняется закон сохранения дискретных частот и квазиимпульсов, по оставшимся неопределенными после учета этого закона дискретным частотам выполняется суммирование $\sum_{s=-\infty}^{\infty}$, а по квазиимпульсам — интегрирование $\int_{-\infty}^{\infty} d^3p/(2\pi)^3$

порядка T_c , т. е. примерно 100 нм. Однако поскольку эта длина свободного пробега заведомо превышает толщину осажденной из газовой фазы высоколегированной алмазной пленки, для пленок с толщинами более 100 нм пренебрежение отражением фононов от их границ с нелегированными подложками является допустимым.

Выполнение этой программы начнем с вычисления с помощью диаграммной техники Мацубары поправки к температурной функции Грина фононов, возникающей за счет их взаимодействия с элементарными возбуждениями. Вследствие малости критической температуры сверхпроводящего перехода и, соответственно, масштаба всех энергий, будем рассматривать только акустические фононы, энергия которых $u\mathbf{k}$ линейно зависит от величины их квазиимпульса $\mathbf{k}$ с коэффициентом пропорциональности u , который есть их скорость (в промежуточных вычислениях используем систему единиц с постоянной Планка $\hbar = 1$). Фурье-образ температурной функции Грина свободных фононов равен (как легко получить исходя из определений температурных гриновских функций [18])

$$\mathcal{D}_0(\zeta, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2u} \left(\frac{1}{i\zeta - uk} - \frac{1}{i\zeta + uk} \right). \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность алмаза, дискретная частота ζ принимает любые кратные $2\pi k_B T$ значения, k_B — постоянная Больцмана, T — температура системы.

Отличие фурье-образа $\mathcal{D}(\zeta, \mathbf{k})$ температурной функции Грина фононов, взаимодействующих с элементарными возбуждениями, от $\mathcal{D}_0(\zeta, \mathbf{k})$ в первом порядке по w^2 — квадрату характерной энергии дырочно-фононного взаимодействия — дается формулой (отвечающей диаграмме на рис. 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\zeta, \mathbf{k}) - \mathcal{D}_0(\zeta, \mathbf{k}) &\approx \frac{18w^2}{\rho^2} [\mathcal{D}_0(\zeta, \mathbf{k})]^2 k_B T \times \\ &\times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) \mathcal{G}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k}) + \\ &+ \bar{\mathcal{F}}(\zeta_s, \mathbf{p}) \mathcal{F}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k})] \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь дискретная частота $\zeta_s = (2s + 1)\pi k_B T$, где s — любое целое число, учтен множитель -1 , возникающий из-за фермионных петель (т. е. замкнутых последовательностей сплошных линий) на диаграмме рис. 1 [18], $\mathbf{p}$ — квазиимпульс элементарного возбуждения,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) &= - \left(\frac{u_{\mathbf{p}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - i\zeta_s} - \frac{v_{\mathbf{p}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}} + i\zeta_s} \right), \quad (3) \\ \mathcal{G}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k}) &= \\ &= - \left[\frac{u_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - i(\zeta_s - \zeta)} - \frac{v_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + i(\zeta_s - \zeta)} \right] \end{aligned}$$

— температурная функция Грина дырок [18], величины $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ (энергия элементарного возбуждения), $u_{\mathbf{p}}^2$ и $v_{\mathbf{p}}^2$ положительны, зависят только от модуля вектора $\mathbf{p}$ и при $|p - p_F| \ll p_F$ даются формулами

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\Delta|^2 + v_F^2(p - p_F)^2}, \quad (4)$$

где $|\Delta|^2$ — квадрат щели в зависимости $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ от $\mathbf{p}$, p_F — ферми-импульс дырок, связанный с их концентрацией n_h формулой $p_F = (\pi^2 \hbar^3 n_h)^{1/3}$ (в обычных единицах) с учетом трех двукратно вырожденных по спину подзон тяжелых, легких и отщепленных за счет спин-орбитального взаимодействия ды-

рок (энергия отщепления 6 мэВ [15] пренебрежимо мала по сравнению с ферми-энергией и поэтому в дальнейшем учитываться не будет), эффективные массы дырок в этих подзонах для нижеследующих оценок будут считаться одинаковыми и равными m , $v_F = p_F/m$ — скорость дырок на ферми-поверхности,

$$\begin{cases} u_{\mathbf{p}}^2 \\ v_{\mathbf{p}}^2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{v_F(p - p_F)}{\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right], \quad (5)$$

функции

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(\zeta_s, \mathbf{p}) &= \frac{\Delta^*}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - i\zeta_s} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}} + i\zeta_s} \right), \\ \mathcal{F}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k}) &= -\frac{\Delta}{2\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - i(\zeta_s - \zeta)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + i(\zeta_s - \zeta)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

— аномальные температурные функции Грина дырок [18], верхний индекс «*» означает комплексное сопряжение. Хотя интегрирование по импульсам элементарных возбуждений ведется в бесконечных пределах, при рассматриваемых низких температурах определяющий вклад в этот интеграл вносит область $|p - p_F| \ll p_F$, где верны используемые формулы (4) и (5). Коэффициент 18 в (2) появляется из-за суммирования по трем двукратно вырожденным по спину подзонам тяжелых, легких и отщепленных за счет спин-орбитального взаимодействия дырок валентной зоны алмаза, которое проводится следующим образом. Как известно [18], опущенная в (3) и (6) спиновая зависимость дается двумерным символом Кронекера

$$\delta_{\alpha\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α и α' пробегает значения от 1 до 2 для нормальных температурных функций Грина дырок (3), а для аномальных температурных функций Грина дырок (6) — антисимметричным единичным спинором второго ранга

$$g_{\alpha\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

взятым со знаком плюс для $\mathcal{F}$ и минус для $\overline{\mathcal{F}}$. Зависимость же от номера подзоны как нормальных, так и аномальных функций Грина (также опущен-

ная в (3) и (6)) описывается трехмерным символом Кронекера

$$\delta_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где β и β' пробегает значения от 1 до 3. Гамильтониан дырочно-фононного взаимодействия сохраняет спин дырок, но не сохраняет номер подзоны, к которой они относятся. Поэтому в каждой вершине диаграммы на рис. 1 выполняется закон сохранения спина, т.е. один из спиновых индексов входящей функции Грина должен равняться одному из спиновых индексов выходящей функции Грина. Но закон сохранения номера подзоны не выполняется, так что соответствующие индексы входящей и выходящей функций Грина друг другу равняться не должны. Вследствие этого в каждой вершине проводится суммирование по паре спиновых индексов — по одному от каждой (нормальной или аномальной) входящей и выходящей функции Грина, — что дает множитель 2. Также в каждой вершине проводится суммирование по номерам подзон, но независимо для входящих и выходящих функций Грина, что дает множитель 9.

Из (2) легко получить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1}(\zeta, \mathbf{k}) - \mathcal{D}_0^{-1}(\zeta, \mathbf{k}) &\approx -\frac{18w^2}{\rho^2} k_B T \times \\ &\times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) \mathcal{G}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k}) + \\ &+ \overline{\mathcal{F}}(\zeta_s, \mathbf{p}) \mathcal{F}(\zeta_s - \zeta, \mathbf{p} - \mathbf{k})] \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

При рассматриваемых малых $k \ll p$, обозначая через θ угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$, имеем $|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \approx p - k \cos \theta$.

Возникающие в (7) произведения типа

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - i\zeta_s} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - i(\zeta_s - \zeta)}$$

тождественно представляются как

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i\zeta} \left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - i\zeta_s} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - i(\zeta_s - \zeta)} \right],$$

после чего суммирование по s осуществляется с помощью формулы [18]

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i\pi(2s+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

Далее, используя известные равенства [18]

$$\mathcal{D}_R(i\zeta_s, \mathbf{k}) = \mathcal{D}(\zeta_s, \mathbf{k}),$$

$$\mathcal{D}_{R0}(i\zeta_s, \mathbf{k}) = \mathcal{D}_0(\zeta_s, \mathbf{k}),$$

$$\zeta_s > 0,$$

где нижний индекс «R» отмечает фурье-образы запаздывающих функции Грина при конечных температурах, и выполняя аналитическое продолжение $\mathcal{D}_R(i\zeta_s, \mathbf{k})$ и $\mathcal{D}_{R0}(i\zeta_s, \mathbf{k})$ с дискретных точек положительной мнимой полуоси частот на всю комплексную плоскость частот ω , т. е. заменяя в них $i\zeta_s$ на ω и при этом деформируя контур интегрирования по d^3p в комплексной плоскости так, чтобы получаемые функции менялись непрерывно при изменении знака $\text{Im}\omega$ с положительного на отрицательный, получаем, что при действительных и положительных ω

$$\mathcal{D}_{R0}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2u} \left(\frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk + i0} \right), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}[\mathcal{D}_R^{-1}(\omega, \mathbf{k}) - \mathcal{D}_{R0}^{-1}(\omega, \mathbf{k})] \approx & \frac{9\pi w^2}{\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(u_{\mathbf{p}}^2 v_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{|\Delta|^2}{4\varepsilon_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \right) \left[\text{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{2k_B T} \right) + \text{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}{2k_B T} \right) \right] \times \right. \\ & \times \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - \omega) + \left(u_{\mathbf{p}}^2 u_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2 v_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^2 - \frac{|\Delta|^2}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \right) \times \\ & \times \left[\text{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{2k_B T} \right) - \text{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}{2k_B T} \right) \right] \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega) \left. \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где δ — дельта-функция. При получении (9) в одном из слагаемых проведена замена переменной интегрирования $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} + \mathbf{k}$ и учтена зависимость $\varepsilon_{\mathbf{p}}$, $u_{\mathbf{p}}^2$ и $v_{\mathbf{p}}^2$ только от модуля вектора $\mathbf{p}$, а также опущены слагаемые, пропорциональные $\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega)$ и поэтому равные нулю при положительной ω .

Вблизи значения $\omega = uk$ величина

$$-\rho k \text{Im} [\mathcal{D}_R^{-1}(\omega, \mathbf{k}) - \mathcal{D}_{R0}^{-1}(\omega, \mathbf{k})] / (2u)$$

дает мнимую (являющуюся отрицательной) часть полюса запаздывающей функции Грина $\mathcal{D}_R(\omega, \mathbf{k})$, т. е. мнимую часть энергии фонона, по модулю равную обратному времени его жизни $\tau_{\mathbf{k}}^{-1}$ (при используемой системе единиц с $\hbar = 1$) в состоянии с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ за счет его поглощения элементарными возбуждениями. Первое слагаемое в фигурных скобках в (9) отвечает за поглощение фонона с рождением двух элементарных возбуждений (законы сохранения энергии и квазиимпульса при этом выражаются равенством $uk = \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}$, которое, вследствие $\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}$, отвечает обращению в нуль аргумента дельта-функции, которой это слагаемое пропорционально). Поэтому оно становится отличным от нуля лишь при $uk > 2|\Delta|$, т. е. когда энергия фонона достаточна для разрыва куперовской пары дырок. Это

слагаемое остается ненулевым при всех T , в том числе и при $T = 0$, когда при отсутствии сверхпроводимости (т. е. при $\Delta = 0$) оно переходит в известное выражение для мнимой части энергии фонона в нормальном проводнике [18, 19], $-9w^2 p_F^2 k / (4\pi \hbar^2 \rho v_F^2)$ (в обычных единицах). Лишний множитель 9 по сравнению с формулой в [18] возникает из-за наличия в валентной зоне алмаза трех дырочных подзон, а лишний множитель 18 по сравнению с формулой в [19] — по этой же причине, а также из-за неучета в [19] двукратного вырождения электронных состояний по проекциям спина. Второе слагаемое в фигурных скобках в (9) отвечает за поглощение фонона уже существующим элементарным возбуждением (законы сохранения энергии и квазиимпульса при этом выражаются равенством $\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + uk = \varepsilon_{\mathbf{p}}$, которое также отвечает обращению в нуль аргумента дельта-функции, которой это слагаемое пропорционально). Поэтому, в отличие от первого слагаемого в фигурных скобках в (9), оно не равно нулю при любой энергии фонона, но становится нулевым для всех энергий фононов при $T = 0$, когда элементарные возбуждения отсутствуют.

Конечно, в мнимую часть энергии фонона (а следовательно, и в $\tau_{\mathbf{k}}^{-1}$) дают вклад и процессы его рассеяния на элементарных возбуждениях, при которых он сохраняется, но переходит в состояние с другим квазиимпульсом $\mathbf{k}$. Однако вероятности таких процессов пропорциональны второй степени квадрата энергии дырочно-фононного взаимодействия w^2 (в отличие от вероятностей рассмотренных процессов поглощения фононов элементарными возбуждениями, пропорциональных первой степени w^2) и поэтому ввиду слабости дырочно-фононного взаимодействия в алмазе могут не учитываться.

Число фононов, уходящих в единицу времени из состояния с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ за счет поглощения элементарными возбуждениями, пропорционально их числу $n_{\mathbf{k}}$ в этом состоянии и, очевидно, равно $\tau_{\mathbf{k}}^{-1} n_{\mathbf{k}}$. Число фононов, приходящих в единицу времени в состояние с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ за счет их излучения элементарными возбуждениями, как известно [18], пропорционально $n_{\mathbf{k}} + 1$. В равновесном состоянии, когда средние числа заполнения фононных состояний даются распределением Бозе – Эйнштейна

$$n_{\mathbf{k}}(T) = 1 / \{ \exp [uk / (k_B T)] - 1 \}$$

с нулевым химическим потенциалом [18], согласно принципу детального равновесия оно должно компенсировать число фононов, уходящих в единицу времени из этого состояния за счет поглощения эле-

ментарными возбуждениями. Поэтому число фоонов, приходящих в единицу времени в состояние с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ за счет их излучения элементарными возбуждениями, определяется формулой

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1}(n_{\mathbf{k}} + 1)n_{\mathbf{k}}(T)/[n_{\mathbf{k}}(T) + 1].$$

В результате скорость передачи энергии от элементарных возбуждений фоонам в состоянии с данным $\mathbf{k}$ дается, очевидно, формулой

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1}uk[n_{\mathbf{k}}(T) - n_{\mathbf{k}}]/[n_{\mathbf{k}}(T) + 1],$$

а скорость $d\varepsilon/dt$ передачи энергии от элементарных возбуждений фоонам во всех состояниях в единичном объеме (ε — плотность энергии элементарных возбуждений, t — время) — суммированием этой формулы по этим состояниям, т.е. ее суммой по типам акустических фоонов и интегралом по области разрешенных квазиимпульсов $\mathbf{k}$ этих фоонов. Хотя размеры этой области порядка дебаевского квазиимпульса

$$k_D = \hbar(6\pi^2\rho/m_C)^{1/3}$$

(в обычных единицах, m_C — масса атома углерода при естественном изотопическом составе), который больше p_F , так что используемое приближение $k \ll p_F$ в большей ее части нарушается, основной вклад в этот интеграл дают фоонные состояния с малыми k , где оно справедливо.

Будем считать, что средние числа заполнения фоонных состояний, $n_{\mathbf{k}}$, определяются распределением Бозе–Эйнштейна с нулевым химическим потенциалом и с температурой фоонов T_0 (т.е. температурой кристаллической решетки), не равной температуре дырок T , т.е. положим $n_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}(T_0)$.

Выполняя интегрирование дельта-функций по $\mathbf{k}$ и суммируя по трем типам (продольный и два поперечных) акустических фоонов (скорости которых обозначим u_j , $j = 1, 2, 3$, а характерные энергии их взаимодействия с дырками для оценок примем одинаковыми и равными w), приходим к итоговой формуле (которую запишем в обычных единицах) для скорости передачи энергии от элементарных возбуждений фоонам в единичном объеме:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{9w^2}{2\rho} \sum_{j=1}^3 \int \int \left\{ \left[u_{\mathbf{p}}^2 v_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_j}^2 + \frac{|\Delta|^2}{4\varepsilon_{\mathbf{p}}(u_j k_j - \varepsilon_{\mathbf{p}})} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{2k_B T} \right) + \operatorname{th} \left(\frac{u_j k_j - \varepsilon_{\mathbf{p}}}{2k_B T} \right) \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \frac{1}{u_j + v_F^2(p - p_F - k_j \cos \theta) \cos \theta / (u_j k_j - \varepsilon_{\mathbf{p}})} + \\ + \left[u_{\mathbf{p}}^2 u_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_j}^2 + v_{\mathbf{p}}^2 v_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_j}^2 - \frac{|\Delta|^2}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}} - u_j k_j)} \right] \times \\ \times \left[\operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{2k_B T} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} - u_j k_j}{2k_B T} \right) \right] \times \\ \times \frac{1}{u_j - v_F^2(p - p_F - k_j \cos \theta) \cos \theta / (\varepsilon_{\mathbf{p}} - u_j k_j)} \Big\} \times \\ \times \frac{n_{\mathbf{k}_j}(T) - n_{\mathbf{k}_j}(T_0)}{n_{\mathbf{k}_j}(T) + 1} k_j^4 p_F^2 \frac{d \cos \theta dp}{(2\pi)^3 \hbar^7}, \quad (10) \end{aligned}$$

где в первом слагаемом в фигурных скобках интегрирование по $\cos \theta$ выполняется в пределах от $-u_j/v_F$ до u_j/v_F , а по p — от 0 до ∞ , а во втором — по $\cos \theta$ в пределах от -1 до $u_j \varepsilon_{\mathbf{p}} / (v_F^2(p - p_F))$, а по p — от 0 до

$$p_F - \frac{|\Delta|}{v_F} \sqrt{\frac{1}{v_F^2/u_j^2 - 1}}$$

и по $\cos \theta$ в пределах от $u_j \varepsilon_{\mathbf{p}} / (v_F^2(p - p_F))$ до 1, а по p — от

$$p_F + \frac{|\Delta|}{v_F} \sqrt{\frac{1}{v_F^2/u_j^2 - 1}}$$

до ∞ ,

$$k_j = 2 \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} u_j - v_F^2(p - p_F) \cos \theta}{u_j^2 - v_F^2 \cos^2 \theta},$$

причем должно выполняться неравенство $k_j < k_D$, иначе k_j выходит из области разрешенных квазиимпульсов фоонов и интегрирование по соответствующим $\cos \theta$ и p вестись не должно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Будем считать, что энергия дырочно-фоонного взаимодействия $w = 8$ эВ [21], плотность алмаза $\rho = 3.5$ г/см³ [15], концентрация дырок n_h имеет характерное для сверхпроводящего алмаза значение 10^{21} см⁻³ (при этом концентрация акцепторной примеси атомов бора может быть и значительно выше вследствие их неполной активации), эффективная масса дырок $m = 0.75m_e$ [15], где m_e — масса свободного электрона, скорости акустических фоонов равны $u_1 = 1.8 \cdot 10^6$ см/с для продольной ветви и $u_2 = 1.2 \cdot 10^6$ см/с и $u_3 = 1.3 \cdot 10^6$ см/с для поперечных ветвей [15]. Критическую температуру сверхпроводящего перехода в алмазе T_c возьмем равной 5 К [14], для моделирования зависимости щели $|\Delta|$ в выражении для энергии элементарного возбуждения

ε_p от температуры будем использовать стандартную теорию Бардина – Купера – Шриффера с двухдырочным притягивательным взаимодействием [18], согласно которой при $T < |\Delta_0|/(2.27k_B)$

$$|\Delta| \approx |\Delta_0| \left\{ 1 - \sqrt{2\pi k_B T / |\Delta_0|} \exp[-|\Delta_0|/(k_B T)] \right\},$$

а при $|\Delta_0|/(2.27k_B) < T < T_c$

$$|\Delta| \approx 3.06 k_B T_c \sqrt{1 - T/T_c},$$

где $|\Delta_0| = k_B T_c / 0.57$ — значение щели при нулевой температуре, коэффициент 2.27 выбран из условия непрерывного перехода одной из этих зависимостей в другую при $T = |\Delta_0|/(2.27k_B)$.

Зависимость скорости передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме сверхпроводящего алмаза от температуры фононов (т. е. температуры кристаллической решетки) показана на рис. 2. Видно, что эта скорость быстро убывает с приближением (снизу) температуры фононов T_0 к температуре элементарных возбуждений T и становится отрицательной (что отвечает передачи энергии от фононов элементарным возбуждениям) при $T_0 > T$.

Сравним теперь скорость передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме со скоростью нагрева элементарных возбуждений в единице объема внешним переменным электрическим полем $\mathbf{E}$ и из условия равенства этих скоростей найдем величину $\mathbf{E}$, при которой еще не будет происходить перегрева элементарных возбуждений и, как следствие, выхода алмаза из сверхпроводящего состояния. Для этого будем считать, что температура элементарных возбуждений $T \lesssim T_c$. Тогда свойства сверхпроводника близки к свойствам нормального материала, и для выделяющейся в единице его объема в единицу времени вследствие омической диссипации энергии справедлива оценка $\mu q n_h \overline{\mathbf{E}^2}$. Здесь μ — подвижность дырок в нормальном материале, при рассматриваемых высоких концентрациях легирующей примеси бора и произошедшем фазовом переходе в состояние с металлическим типом проводимости примерно равная $3.6 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ [22], q — заряд дырки, равный элементарному заряду, черта сверху означает усреднение по периоду колебаний поля. При этом считается, что квант энергии электромагнитного поля не превышает удвоенной ширины щели $2|\Delta|$ в зависимости энергии элементарных возбуждений от их квазиимпульса и поэтому разрушения куперовских пар дырок этим полем не происходит. При принятых выше параметрах и температурах элементарных возбуждений T ,

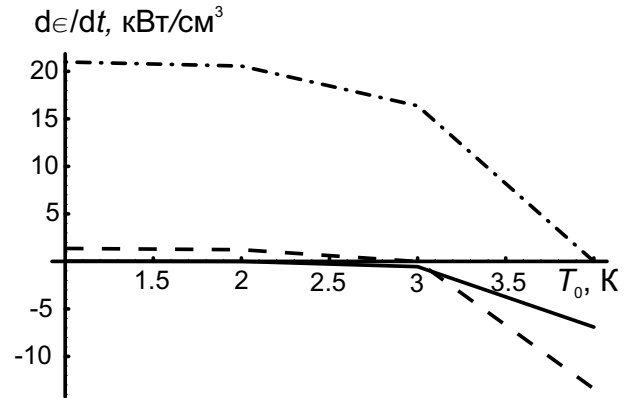


Рис. 2. Зависимость скорости $d\varepsilon/dt$ передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме сверхпроводящего алмаза от температуры фононов T_0 при температурах элементарных возбуждений $T = 2 \text{ К}$ (сплошная кривая), 3 К (штриховая кривая), 4 К (штрихпунктирная кривая)

не слишком близких к T_c , так что $T_c - T \lesssim T_c$, это означает, что частота поля не должна превышать примерно 0.36 ТГц . В то же время указанная выше подвижность отвечает времени релаксации квазиимпульсов дырок около 1.5 фс , что много меньше периода изменения поля. Поэтому средняя скорость дырок (а следовательно, и плотность создаваемого ими электрического тока) будет адиабатически отслеживать изменение электрического поля, что оправдывает приведенную выше оценку для скорости омической диссипации энергии в единице объема. Приравняв последнюю скорости $d\varepsilon/dt$ передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме сверхпроводящего алмаза и пользуясь рис. 2, легко видеть, что, например, при температуре фононов (т. е. кристаллической решетки) 2 К температура элементарных возбуждений будет равна 4 К (т. е. в 2 раза большему значению, уже близкому к критической температуре $T_c = 5 \text{ К}$) при амплитуде напряженности электрического поля всего 8.5 В/см . Таким образом, передача энергии элементарных возбуждений фононам налагает жесткое ограничение на интенсивность электромагнитных полей, которыми можно воздействовать на сверхпроводящий алмаз, не вызывая при этом сильного разогрева элементарных возбуждений в нем и, как следствие, его выхода из сверхпроводящего состояния.

В заключение этого раздела необходимо отметить, что в проведенных выше вычислениях не учитываются эффекты, связанные с малостью длины свободного пробега дырок в сильно легированном

бором алмазе по сравнению с длиной волны теплового фонона при температурах порядка T_c [23]. Учет этих эффектов в нашей модели может быть осуществлен путем введения вместо используемой постоянной энергии дырочно-фононного взаимодействия $w = 8$ эВ, определенной в [21] для слабо легированных бором алмазных образцов с концентрациями атомов бора порядка 10^{16} см $^{-3}$, новой величины, зависящей от температуры и степени легирования алмаза. Согласно [23], в сильно легированном бором алмазе при температурах порядка T_c эта новая величина может существенно отличаться от используемой нами w . Для ее нахождения необходимо пересчитать вычисленную выше скорость $d\varepsilon/dt$ передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме во время релаксации энергии элементарных возбуждений и сравнить его с результатами эксперимента [23]. Для этого при температуре дырок T , стремящейся к температуре фононов T_0 (причем все равно, с какой стороны), нужно разделить на $d\varepsilon/dt$ разность соответствующих плотностей энергий элементарных возбуждений,

$$6 \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_{\mathbf{p}}(T)n_{\mathbf{p}}(T) - \varepsilon_{\mathbf{p}}(T_0)n_{\mathbf{p}}(T_0)] d^3p / (2\pi\hbar)^3$$

(в обычных единицах). При этом зависимость энергии элементарных возбуждений от температуры возникает вследствие зависимости от температуры квадрата щели $|\Delta|^2$ в определяющей их формуле (4). Величины

$$n_{\mathbf{p}}(T) = 1 / \{ \exp[\varepsilon_{\mathbf{p}}(T)/(k_B T)] + 1 \}$$

— средние числа заполнения состояний элементарных возбуждений, даваемые фермиевской функцией распределения с равным нулю химическим потенциалом, а множитель 6 учитывает двукратное вырождение элементарных возбуждений по проекциям спина и наличие 3-х содержащих элементарные возбуждения дырочных подзон в валентной зоне алмаза). Вычисления показывают, что получаемые таким образом времена релаксации энергии элементарных возбуждений будут порядка измеренных в [23] микросекундных времен при примерно в 2 раза меньших энергиях дырочно-фононного взаимодействия по сравнению с использованной нами величиной $w = 8$ эВ. Поэтому полученная выше оценка для скорости $d\varepsilon/dt$ передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме и, соответственно, для амплитуд электромагнитных полей,

которыми можно воздействовать на сверхпроводящий алмаз, не вызывая при этом сильного разогрева элементарных возбуждений в нем и, как следствие, его выхода из сверхпроводящего состояния, является оценкой сверху и реальные значения этих амплитуд могут быть еще меньше.

Что касается сравнения температурной зависимости вычисленного таким образом времени релаксации энергии элементарных возбуждений с пропорциональной $1/T^2$ экспериментальной зависимостью [23], то необходимо отметить, что энергия элементарных возбуждений не равна, строго говоря, сумме их индивидуальных энергий $\varepsilon_{\mathbf{p}}$, как это предполагалось при выполненном пересчете скорости $d\varepsilon/dt$ передачи энергии от элементарных возбуждений фононам в единичном объеме во время релаксации энергии элементарных возбуждений. Это связано с наличием энергии взаимодействия элементарных возбуждений, которая может быть того же порядка величины, что и сумма их индивидуальных энергий. Поэтому вычисленное указанным выше способом время релаксации энергии элементарных возбуждений является оценкой и не может использоваться для установления детального хода его температурной зависимости, необходимого для ее сравнения с результатами эксперимента [23].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что слабость дырочно-фононного взаимодействия в сильно легированном акцепторной примесью бора сверхпроводящем алмазе (ковалентном диэлектрике) и, как следствие, медленность передачи энергии от элементарных возбуждений фононам (т. е. кристаллической решетке) приводят к тому, что довольно слабые переменные электрические поля с амплитудами порядка и более 10 В/см могут вызвать нагрев элементарных возбуждений до температур выше критической и, как следствие, разрушение его сверхпроводящего состояния. Данный вывод может оказаться полезным при разработке сверхпроводящих алмазных электронных устройств.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-12-00309, <https://rscf.ru/project/22-12-00309>.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Imada, A. Fujimori, and Y. Tokura, Rev. Mod. Phys. **70**, 1039 (1998).

2. P. P. Edwards and M. J. Sienko, Phys. Rev. B **17**, 2575 (1978).
3. D. Pines, Phys. Rev. **109**, 280 (1958).
4. M. L. Cohen, Phys. Rev. **134**, A511 (1964).
5. M. L. Cohen, Rev. Mod. Phys. **37**, 240 (1964).
6. M. L. Cohen, in *Superconductivity*, ed. by R. D. Parks, Marcel Dekker, New York (1964), Vol. 1, p. 615.
7. R. A. Hein, J. W. Gibson, R. Mazelsky et al., Phys. Rev. Lett. **12**, 320 (1964).
8. R. A. Hein, J. W. Gibson, R. S. Allgaier et al., in *Low Temperature Physics*, ed. by J. G. Daunt, D. O. Edwards, F. J. Milford et al., Plenum Press, New York (1965), LT9, p. 604.
9. J. F. Schooley, W. R. Hosler, and M. L. Cohen, Phys. Rev. Lett. **12**, 474 (1964).
10. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
11. E. A. Ekimov, V. A. Sidorov, E. D. Bauer et al., Nature **428**, 542 (2004).
12. B. Sacépé, C. Chapelier, C. Marcenat et al., Phys. Status Solidi A **203**, 3315 (2006).
13. A. M. Stoneham, in *Physics and Applications of CVD Diamond*, ed. by S. Koizumi, C. Nebel, and M. Nesladek, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2008), p. 1.
14. E. Bustarret, in *Physics and Applications of CVD Diamond*, ed. by S. Koizumi, C. Nebel, and M. Nesladek, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2008), p. 329.
15. O. Madelung, *Semiconductors: Data Handbook*, Springer, Berlin (2004).
16. S. Sakane, T. Ishibe, Y. Yukawa et al., Diam. Rel. Mater. **140** (A), 110410 (2023).
17. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 966 (1960).
18. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2*, Физматлит, Москва (2002).
19. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438 (1958).
20. V.V. Brazhkin, E.A. Ekimov, A.G. Lyapin et al., Phys. Rev. B **74**, 140502(R) (2006).
21. J. Pernot, P. N. Volpe, F. Omnès et al., Phys. Rev. B **81**, 205203 (2010).
22. G. Chicot, A. Fiori, P. N. Volpe et al., J. Appl. Phys. **116**, 083702 (2014).
23. A. Kardakova, A. Shishkin, A. Semenov et al., Phys. Rev. B **93**, 064506 (2016).