ЖЭТФ, 2025, том 167, вып. 5, стр. 680–684

ПРОВЕРКА ТЕОРИЙ ГРАВИТАЦИИ В РЕЖИМЕ ОПИСАНИЯ УСКОРЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ: РАДИУС РАЗВОРОТА

О. И. Зенин [a], *С. О. Алексеев* [a,b*]

[a] *Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[b] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 декабря 2024 г.,
после переработки 13 декабря 2024 г.
Принята к публикации 13 декабря 2024 г.

На основании определения радиуса разворота и того факт, что в настоящее время наилучшее согласие с наблюдательными данными на внегалактических масштабах дает применение общей теорией относительности с космологической постоянной, рассмотрено поведение на этих масштабах сферически-симметричных решений моделей Хорндески и Двали – Габададзе – Поратти. Таким образом, условия на радиус разворота вместе с астрономическими данными для скоплений галактик позволяют выявлять дополнительные ограничения на параметры расширенных теорий гравитации.

DOI: 10.31857/S0044451025050062

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день полностью признанной и проверенной экспериментально теорией гравитации является общая теория относительности (ОТО), которая позволяет объяснять такие наблюдаемые явления, как динамика тесных двойных систем, гравитационные волны [1], прямые изображения черных дыр (ЧД) [2,3]. При этом для учета ускоренного расширения Вселенной в лагранжиан теории необходимо вводить дополнительную величину — космологическую постоянную. Для объяснения природы и происхождения этой космологической постоянной разрабатываются теории гравитации, расширяющие ОТО различными способами: поля различной природы, скалярно-тензорная гравитация, поправки высших порядков по кривизне, модели вида «мир на бране». Таким образом, появляется запрос на проверку поведения этих расширенных теорий на различных пространственно-временных масштабах [4], в том числе на больших расстояниях. Для этого можно рассмотреть гипотетическую поверхность вдали от скоплений, на которой действие внутренних сил притяжения уравновешивается ускоренным расширением Вселенной: радиус разворота [5]. Так как величину этого радиуса разворота можно, с одной стороны, оценить из астрономических данных (основанных на теории ΛCDM), а с другой — вычислить, условия на радиус разворота — уравнение и неравенство — можно использовать для оценки поведения расширенных теорий гравитации на масштабах скоплений галактик (где вклад ускоренного расширения Вселенной уже значителен). Изначально эта идея была апробирована на модели Старобинского с исчезающей космологической постоянной [6], потом рассмотрение было расширено на метрики, в которых $g_{11} \neq -g_{00}^{-1}$ [7], а затем и на другие теории [8], используемые при моделировании теней черных дыр (см., например, [9]).

Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен методу нахождения радиуса разворота, разд. 3 — обсуждению поведения различных версий моделей Хорндески и Двали – Габададзе – Поратти (DGP) на внегалактических масштабах, разд. 4 содержит обсуждение и выводы.

* E-mail: alexeyev@physics.msu.ru

2. УСЛОВИЯ НА РАДИУС РАЗВОРОТА

В работе [8] обсуждается, как получить гравитационный потенциал на удаленном расстоянии от центра для сферически-симметричной метрики произвольного вида. В случае теории гравитации с метрикой

$$ds^2 = = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \quad (1)$$

в которой $|B(r)| \neq |A(r)|^{-1}$, потенциал ϕ имеет вид

$$\phi = \frac{c^2}{2}B^{-1}(r)(1 - A^{-1}(r)). \quad (2)$$

Условие на радиус разворота — гипотетическую поверхность вдали от скоплений, на которой действие внутренних сил притяжения уравновешивается ускоренным расширением Вселенной, т. е. находящуюся в равновесии — это максимум гравитационного потенциала, следовательно,

$$\frac{d\phi}{dr} = 0, \qquad \frac{d^2\phi}{dr^2} < 0. \quad (3)$$

Перепишем метрику (1) для модели ΛCDM в системе единиц СИ:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \qquad B^{-1}(r) = A(r), \quad (4)$$

где $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/с^2·кг — гравитационная постоянная, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме, $\Lambda = 1.1 \cdot 10^{-52}$ м$^{-2}$ — современное значение космологической постоянной из ΛCDM-модели [10,11]. Производная гравитационного потенциала, на радиусе разворота равная нулю, примет вид

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{\Lambda c^2 r}{3} = 0. \quad (5)$$

Из (5) получаем выражение для радиуса разворота r_t в ОТО:

$$r_t = \left(\frac{3GM}{\Lambda c^2}\right)^{1/3}. \quad (6)$$

Таким образом, при анализе поведения расширенных теорий гравитации на внегалактических масштабах теперь мы можем считать r_t, наряду с космологической постоянной Λ, известной величиной.

3. ОГРАНИЧЕНИЯ НА МОДЕЛИ ХОРНДЕСКИ И DGP

В настоящее время лучшим способом учета ускоренного расширения Вселенной на внегалактических масштабах признано добавление в лагранжиан дополнительного члена — космологической постоянной. Большинство современных расширенных теорий гравитации поступают аналогичным образом, включая дополнительную постоянную. Лишь некоторые модели рассматривают конструкции более общего вида, лишь генерирующие деситтеровскую асимптотику, но не включающие Λ-член явным образом. Это, например, теория Хорндески [12,13] или модели вида «мир на бране» [14], ярким представителем которого является модель DGP [15].

3.1. Модель Хорндески, случай 1

Рассмотрим метрику для теории Хорндески, которая определяется формулой (29) из работы [16]. Пренебрегая быстро убывающими членами, представим ее как

$$A(r) = B^{-1}(r) = = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{2\alpha_4}{r^2} - \frac{8\alpha_5\eta}{5r^3} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (7)$$

где α_5, α_4 и η — параметры теории, описывающие в представленном случае перенормировку массы и космологической постоянной. Уравнение на радиус разворота примет вид

$$\frac{d\phi}{dr} = = \frac{GM}{r_t^2} + \frac{2\alpha_4 c^2}{r_t^3} + \frac{12\alpha_5\eta c^2}{5r_t^4} - \frac{\Lambda}{3}c^2 r_t = 0. \quad (8)$$

Добавляем условие на вторую производную

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = = -\frac{2GM}{r_t^3} - \frac{6\alpha_4 c^2}{r_t^4} - \frac{48\alpha_5\eta c^2}{5r_t^5} - \frac{\Lambda}{3}c^2 < 0. \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) не являются независимыми, поэтому итоговое соотношение на параметры выглядит следующим образом:

$$3GMr_t^2 + 8\alpha_4 c^2 r_t + 12\alpha_5\eta c^2 > 0. \quad (10)$$

Попробуем получить новые оценки на эти величины. С учетом результатов гравитационно-волновой астрономии (событие GW200115) было показано (формула (39) из работы [16]), что

$$|\alpha_5\eta| \leq 2070^{565}_{659} km^3.$$

Комбинируя это ограничение с (10), можно получить ограничение на значения α_4:

$$\alpha_4 > -\frac{3GMr_t}{8c^2} - \frac{3\alpha_5\eta}{2r_t}. \tag{11}$$

Используя зависимость радиуса разворота от массы и ограничения на $\alpha_5\eta$, можно оценить численное значение α_4. Берем для оценки выражение для радиуса разворота в ОТО (6), рассматривая нижний ($M = 10^{11}M_\odot$) и верхний ($M = 10^{15}M_\odot$) пределы значений массы:

$$\begin{aligned} &\alpha_4(M = 10^{11}M_\odot) > -8.8 \cdot 10^{35}, \\ &\alpha_4(M = 10^{15}M_\odot) > -1.9 \cdot 10^{41}. \end{aligned} \tag{12}$$

Используем формулу (42) из работы [16] — выражение для фонового скалярного поля в виде

$$\phi_0 = \ln\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_5}\right).$$

В качестве нулевого приближения применим оценку значения поля, полученную при анализе роли модели Хорндески в излучении двойной системы с пульсаром и сведенную к полю модели Бранса–Дикке (формула (92) из работы [20]):

$$\phi_0 < 0.00004.$$

То есть, зная ограничения на $\alpha_5\eta$ и α_4, мы можем получить пределы для η:

$$\begin{aligned} &\eta(M = 10^{11}M_\odot) < 2.26 \cdot 10^{-24}, \\ &\eta(M = 10^{15}M_\odot) < 1.06 \cdot 10^{-29}. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, на основе анализа, проведенного с учетом событий гравитационно-волновой астрономии и дополненного наблюдательными данными на внегалактических масштабах, удается конкретизировать допустимые диапазоны значений параметров теории, ранее бывших просто свободными.

3.2. Модель Хорндески, случай 2

Рассмотрим еще одну метрику теории Хорндески, которая определяется формулой (3) из работы [17] (эта метрика также обсуждалась в [18]):

$$\begin{aligned} A(r) = B^{-1}(r) &= \\ &= 1 + \frac{r^2}{2\alpha}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\alpha GM}{c^2r^3}}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

где α — параметр исследуемой теории. Производная гравитационного потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{c^2r}{2\alpha} - \frac{c^2r}{2\alpha}\sqrt{1 + \frac{8\alpha GM}{c^2r^3}} - \\ &- \frac{3GM}{r^2\sqrt{1 + \frac{8\alpha GM}{c^2r^3}}} \approx \\ &\approx -\frac{5GM}{r^2} + \frac{12\alpha G^2M^2}{c^2r^5} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Вторая производная имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} \approx \frac{10GM}{r^3} - \frac{60\alpha G^2M^2}{c^2r^6} < 0. \tag{16}$$

В итоге можно получить выражение для радиуса разворота

$$r_t = \left(\frac{12\alpha GM}{5c^2}\right)^{1/3}. \tag{17}$$

Из выражения для второй производной видно, что условие на радиус разворота удовлетворяется при любом значении α (получается тождественное выражение $12/5 < 6$). В работе [18] это ограничение было более строгим: $\alpha \leq M$, таким образом, в данном случае анализ поведения на внегалактических масштабах лишь подтверждает ограничения, сделанные ранее.

3.3. Модель DGP

Рассмотрим теорию DGP и метрику, которая определяется формулой (37) из работы [19] (вторая ветвь):

$$\begin{aligned} A(r) = B^{-1}(r) &= \\ &= 1 - \frac{2GM}{c^2r} - \frac{r^2}{2r_c^2} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{q^4r_c^2}{5r^3}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$r_c = M_{(4)}^2/2M_{(5)}^3$$

— отношение четырех- и пятимерной масс, q — приливной заряд, характеризующий вклад от дополнительных измерений. Снова строим гравитационный потенциал, приравнивая к нулю его первую производную:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{c^2r}{2r_c^2} - \frac{c^2q^2}{r^3} + \frac{3c^2q^4r_c^2}{10r^4} = 0. \tag{19}$$

Вторая производная имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{2GM}{r^3} - \frac{c^2}{2r_c^2} + \frac{3c^2q^2}{r^4} - \frac{6c^2q^4r_c^2}{5r^5} < 0. \tag{20}$$

Считая радиус разворота r_t и массу M известными, можно получить дополнительное ограничение на параметры теории:

$$\frac{3}{2}c^2 r_c^2 q^4 - 5c^2 r_t q^2 + 3GMr_t^2 > 0. \qquad (21)$$

Тем самым получено, фактически, соотношение между q и r_c. Подставляя сюда значения для радиуса разворота из ОТО (6), получаем биквадратное уравнение относительно q. Используя условия существования решения и подставляя граничное значение $\acute{q} < 10^{-17}$, получаем ограничение

$$r_c < 3.3 \cdot 10^{14},$$

что означает, что на больших расстояниях в данной модели вместе с деситтеровской асимптотикой, как и предсказано в [19], реализуется расходящийся режим $r_c \to \infty$. Заметим, что полученная величина имеет почти тот же порядок величины, что и радиус Вайнштейна, определяемый по формуле (40) из работы [19]. Таким образом, наш анализ в данном случае снова подтверждает ограничения на параметры теории, сделанные ранее.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе предложен подход, который при проверке предсказаний поведения расширенной теории гравитации на внегалактических масштабах позволяет наложить дополнительные ограничения на параметры теории. Ввиду недостаточности астрономических данных приходится использовать формулы для ОТО с космологической постоянной, что, естественно, понижает точность оценки. Так, для модели Хорндески в первом варианте [16] удалось получить оценки для параметра, считавшегося ранее свободным и оценивавшегося только в комбинации с другими, для модели Хорндески во втором варианте [17] удалось подтвердить значения параметров, полученные ранее, а для модели DGP [19] для обсуждаемого решения показана реализация сценария, в котором на больших расстояниях (за пределами радиуса Вайнштейна) мир эффективно многомерен. В рассмотренные модели космологическая постоянная явным образом не входит, но на внегалактических масштабах решение сводятся к деситтеровской асимптотике. Предложенный метод в ряде случаев позволяет наложить дополнительные ограничения на теории, давая возможность использовать его в дальнейшем в системе тестов для расширенных теорий гравитации (в рамках развития параметризованного постньютоновского формализма) [4] на различных пространственно-временных масштабах для наложения ограничений на параметры теории.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-22-00073.

ЛИТЕРАТУРА

1. LIGO Scientific and VIRGO Collaborations: R. Poggiani et al., PoS MULTIF2023 021 (2024).

2. The Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef et al., Astrophys. J. Lett. **930**, L13 (2022).

3. The Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef et al., Astrophys. J. Lett. **875**, L5, (2019).

4. S. Alexeyev and V. Prokopov, Universe **8**, 283 (2022).

5. A. D. Chernin, N. V. Emelyanov, and I. D. Karachentsev, Mon.Not.Royal Astron.Soc. **449**, 2069 (2015).

6. С. О. Алексеев, Б. Н. Латош, В. А. Ечеистов, ЖЭТФ **152**, 127 (2017).

7. S. Alexeyev and K. Kovalkov, Int. J. Mod. Phys. A **35**, 204057 (2020).

8. А. В. Немтинова, С. О. Алексеев, *Ограничение моделей гравитации на масштабах скоплений галактик,* Физика космоса: Труды 50-й студ. научн. конф., Екатеринбург, (2023), ISBN 978-5-7996-3700-2.

9. С. О. Алексеев, О. И. Зенин, А. А. Байдерин, *Моделирование теней черных дыр в расширенных теориях гравитации: учет вращения и связанные эффекты*, ЖЭТФ **167**, 477 (2025).

10. J. D. Barrow and D. J. Shaw, Int. J. Mod. Phys. D **20**, 2875 (2011).

11. Particle Data Group, https://pdg.lbl.gov/

12. G. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).

13. T. Kobayashi, Rept. Prog. Phys. **82**, 086901 (2019).

14. Е. Е. Боос, В. Е. Буничев, И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков, ЭЧАЯ **43**, 1 (2012).

15. G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000).

16. E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoeur, Phys. Rev. D **108**, 024019 (2023).

17. A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, N. Lecoeur, and T. Nakas, Phys. Rev. D **109**, 024032 (2024).

18. H. Huang, J. Kunz, and D. Mitra, JCAP **05**, 07 (2024).

19. R. Gannouji, Eur. Phys. C **78**, 318 (2018).

20. P. Dyadina, N. Avdeev, and S. Alexeyev, Mon. Not. Royal Astr. Soc. **483**, 947 (2019).