

# О ЕДИНСТВЕ МЕХАНИЗМА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ МНОГООБРАЗИИ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ ДВИЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

*В. П. Воротилин\**

*Институт прикладной механики Российской академии наук  
125040, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 ноября 2024 г.,  
после переработки 21 ноября 2024 г.  
Принята к публикации 3 декабря 2024 г.

На основе представлений о механизме динамического взаимодействия внешнего ламинарного потока с возмущенной границей турбулентной струи как о процессе формирования отрывных вихрей на границе струи (в работах [1–4], разработанных для простейшей линейной структуры движения струи) проведено исследование гидродинамики турбулентных струй с учетом многообразия физических условий, определяющих картину турбулентных течений подобного типа.

DOI: 10.31857/S0044451025040145

## 1. ВВЕДЕНИЕ

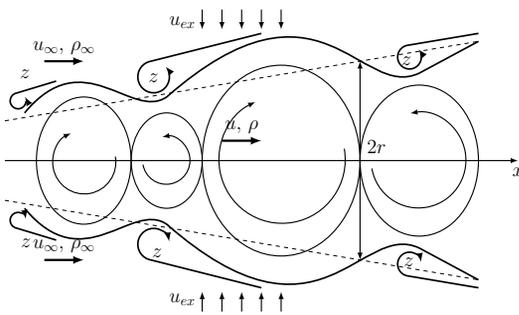
Наличие в турбулентных струях резко очерченной границы раздела между внешней ламинарной средой и областью внутри турбулентной струи позволяет наглядно описать механизмы воздействия внешних условий на течение турбулентных струй и, как пример, рассматриваемых далее эффектов турбулентности и сносящих потоков внешней среды. Граница струи как реальный физический объект исследования, помимо общих проблем описания динамики смешения веществ и завихрения внешнего потока, представляет интерес с точки зрения физики происходящих на ней физико-химических процессов, в частности горения и излучения смешиваемых реагентов [1]. В существующих теоретических методах описания турбулентных струй отмеченные задачи не ставятся и не решаются, поскольку в своих построениях не оперируют понятием физической границы турбулентной струи. Точнее, в рамках классической теории [5–11], основанной на модели турбулентной вязкости, существование такой границы как наблюдаемой характеристики течения не отрицается, но в расчетах она задается условно как расстояние от оси струи, на котором локальное значе-

ние скорости струи отличается от скорости внешнего потока на произвольно задаваемую малую величину, и таким образом, трактуясь как формальное математическое понятие, теряет физический смысл реально наблюдаемой границы струи.

Важность понимания и формулировки условий на границе турбулентного потока с внешним ламинарным течением в монографии [12] подчеркнута фразой: «Точный вид условий на границе с внутренней областью турбулентного течения, которым должно удовлетворять решение, до сих пор неизвестен». При этом для объяснения механизма вовлечения внешней среды в объем турбулентной струи использовалась гипотеза вязкого надслоя [13–16], в котором происходит завихрение и захват внешней среды, но скорость захвата по аналогии с вязким подслоем у стенок канала определяется воздействием крупномасштабных структур внутри потока. Искусственный характер этой гипотезы, не учитывающей пульсаций границы струи (в каналах они гасятся твердой стенкой и поэтому там наличие вязкого подслоя есть важный фактор течения), и невозможность на ее основе получить количественные оценки скорости захвата оставляют указанную проблему нерешенной.

Отметим, что представления о крупномасштабных вихревых структурах и данные эксперимента, косвенно подтверждающие факт их существования, появились наряду с описанием общей кар-

\* E-mail: VPVorotilin@yandex.ru



**Рис. 1.** Иллюстративная схема структуры турбулентной струи, движущейся в параллельном потоке внешней среды со скоростью  $u_\infty$  и плотностью  $\rho_\infty$ . Здесь  $u_{ex}$  — скорость вовлечения (эжекции) жидкости из внешней среды,  $z$  — зоны отрывного течения, в которых происходит захват внешнего потока

тины турбулентного потока [10]. В попытках проникнуть в понимание сути законов механизма турбулентности структура турбулентной струи, согласно результатам экспериментов, в работе [11] представлена как цепочка крупномасштабных вихрей. Вариант подобной структуры для простейшего случая движения струи со скоростью и плотностью вдоль оси в параллельном потоке внешней среды представлен на рис. 1. Механизм развития и взаимодействия совокупности турбулентных вихрей в [17] описан на основе решений уравнений гидродинамики. Но в данном исследовании подобные вихри вводятся только для подтверждения наличия крупномасштабных возмущений границы струи и обоснования идеи их отрывного обтекания внешним потоком. Их конкретные геометрические свойства, динамика возникновения, взаимодействия и разрушения остаются вне рамок необходимых условий для разработки предлагаемой теории.

## 2. ГИДРОДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Как альтернатива гипотезе вязкого надслоя в работах [2–4, 13] при описании движения турбулентных струй использованы представления о динамическом взаимодействии внешнего ламинарного потока с возмущенной границей области турбулентного течения. Отметим некоторые из полученных в них результатов, необходимых для обобщений теории с учетом турбулентности внешнего потока. Реальная (физически наблюдаемая) граница струи, усредненное положение которой на рис. 1 отмечено штриховыми линиями, формируется под воздействием хао-

тических пульсаций турбулентных вихрей в ее внутренней области. Исходя из того факта, что внешняя среда и турбулентная струя с учетом представленной на рисунке ее наглядной структуры, это два пространственно различных потока, их динамическое взаимодействие можно представить как силу трения  $F_{fr}$ , действующую на разделяющей их границе. Поскольку при турбулентном движении молекулярная вязкость роли не играет, из соображений размерности следует, что эта сила может быть пропорциональна только квадрату разности скоростей движения внешней среды и средней скорости струи  $u$ :

$$F_{fr} = \gamma \rho_\infty (u_\infty - u)^2, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — некоторая константа. Вывод о том, что закон трения квадратичен по скорости, означает, что обтекание возмущенной границы струи внешним потоком должно происходить с образованием отрывных вихрей. По смыслу деления всей области течения на внешнюю безвихревую среду и собственно струю указанные отрывные вихри должны остаться в составе струи, играя для нее роль источника турбулентных пульсаций. Поэтому и импульс, при трении отдаваемый им струей (иначе силу трения  $F_{fr}$ ), также должен возвратиться струе вместе с захваченными вихрями. Поскольку вихри получают от струи импульс, пропорциональный разности скоростей  $u_\infty - u$ , поток возвращаемого импульса запишется в виде

$$j = \rho_\infty v_c |u_\infty - u|,$$

где  $v_c$  — скорость захвата в объем струи образующихся вихрей. Из условия равенства потоков  $j$  и  $F_{fr}$  для  $v_c$  следует выражение

$$v_c = \gamma |u_\infty - u|.$$

Как было отмечено выше, в литературе общепринятым объяснением механизма захвата является гипотеза вязкого надслоя. Обширный обзор работ вместе с результатами новых данных эксперимента и на их основе попытки обоснования этой гипотезы представлены в [3]. Не вдаваясь в детали рассуждений этой и множества упомянутых в ней других исследований, отметим их главное смысловое отличие от понимания механизма турбулентности данной статьи. Суть его в том, что в этих работах процесс захвата внешней среды рассматривался как следствие хаотических турбулентных пульсаций в окрестности границы турбулентной струи с внешним течением. Иначе говоря, процесс захвата внешней среды вторичен по отношению к наблюдаемому хаосу турбулентных пульсаций, в то время как в предлагаемой

теории захват внешней среды описан как первопричина этих пульсаций.

В уравнении баланса масс произведение  $v_c \rho_\infty$  задает источник массы турбулентной струи, и таким образом струя формируется как реальный физический объект исследования с разнообразием воздействия внешних условий, его описывающих. Одним из встречающихся на практике механизмов подобного воздействия является турбулентность внешней среды.

### 3. ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНЕШНЕГО ТЕЧЕНИЯ

Особенностью движения струй, характерной для реальных условий эксперимента, является наличие турбулентности в обтекающей струю спутном потоке. Так, в ссылках на эксперимент [8–11] отношение интенсивности турбулентных пульсаций внешнего потока  $u_{*t}$  к его скорости оценивался величиной  $\xi_t = u_{*t}/u_\infty$ , равной 3–6%. Влияние внешней турбулентности будет заключаться в стимуляции процесса вихреобразования на ее границах. Сила трения на образование дополнительных вихрей запишется по аналогии с выражением для  $F_{fr}$  (1) как

$$F_{add} \approx \rho_\infty u_{*t} |u_\infty - u|.$$

Каждый из источников силы  $F_{fr}$  и  $F_{add}$  является результатом действия независимых случайных процессов образования отрывных вихрей на границах струи, и поэтому их совместный результат суммируется:  $F_\Sigma = F_{fr} + F_{add}$ . Для струи указанные вихри играют роль источника турбулентных пульсаций. Отсюда с учетом приведенных рассуждений о механизме поведения отрывных вихрей обобщенное выражение для скорости захвата вихрей  $v_c$  примет вид

$$v_c = \gamma |u_\infty - u| + u_{*t}. \tag{2}$$

Введенное понятие скорости захвата не следует смешивать со скоростью натекания внешней среды на струю  $u_{ex}$ . Последняя задается уравнением материального баланса, ее знак может быть больше нуля (при торможении) и меньше (при ускорении). Это кинематическая характеристика струйных течений свойственна любым режимам течения и поэтому не несет в себе информации о механизме формирования турбулентности, но ошибочно трактуется как источник массы турбулентной жидкости [5–11].

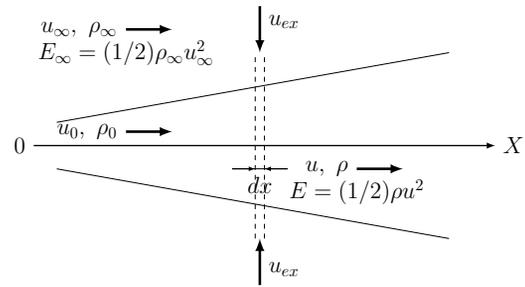


Рис. 2. Схема движения турбулентной струи в параллельном потоке внешней среды

### 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

Рассматривается истечение круглой струи с начальной плотностью  $\rho_0$  и скоростью  $u_0$  в направлении оси  $x$  из отверстия радиуса  $r_0$  в сечении  $x = 0$  в параллельный поток внешней среды со скоростью  $u_\infty$  и плотностью  $\rho_\infty$  (для полноты описания с добавлением действия силы тяжести вдоль оси  $x$ ).

Текущие скорость  $u$  и плотность  $\rho$  струи вследствие перемешивания поперек потока принимаются постоянными по сечению струи радиуса  $r$ . Интегральные уравнения баланса массы, импульса и состава с искомыми  $\rho$ ,  $u$ ,  $r$  и  $u_{ex}$  для рассматриваемого варианта несжимаемой жидкости выводятся, как показано на рис. 2, путем суммирования соответствующих потоков между двумя нормальными к оси струи плоскостями, разделенными расстоянием  $dx \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} d[(\rho_\infty u_\infty - \rho u)r^2]/dx - 2r\rho_\infty u_{ex} &= 0, \\ d[\rho u(u - u_\infty)r^2]/dx &= (\rho_\infty - \rho)r^2/Gr^2, \\ \rho &= \rho_\infty - (\rho_\infty - 1)/ur^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $Gr = u_0/(gr_0)^{1/2}$  — число Фруда, и все переменные представлены в безразмерном виде с использованием параметров  $u_0$ ,  $r_0$  и  $\rho_0$  в качестве характерных масштабов скорости, длины и плотности. Первым уравнением полученной системы — уравнением баланса масс — задается скорость натекания  $u_{ex}$  внешней среды на струю. Как отмечено выше, это кинематическая характеристика течения, обусловленная торможением или ускорением течения струи. Второе уравнение — для продольной компоненты импульса — записано с учетом подстановки в него  $u_{ex}$  из первого и с добавлением силы тяжести вдоль оси  $x$  для полноты описания. Третье — уравнение состава — получено из условия, что вещество струи в

ее начальном сечении по ходу движения ее не покидает. Недостающее уравнение для искомым  $\rho$ ,  $u$ ,  $u_{ex}$  и  $r$  задается как уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости:

$$d(\rho ur^2)/dx = 2\rho_\infty v_c r, \quad (4)$$

в котором ее источником является описанный выше процесс завихрения и захвата массы внешней среды. С учетом полученного уравнения скорость натекающего  $u_{ex}$  преобразуется к виду

$$u_{ex} = u_\infty dr/dx - v_c.$$

Подчеркнем, что знак  $u_{ex}$  в зависимости от значения  $u_\infty$  может быть больше или меньше нуля, в то время как  $v_c$ , выводимое из условия динамического взаимодействия турбулентной струи с внешней средой, имеет смысл скорости порождения турбулентной жидкости, величина которой по определению всегда строго большая нуля.

### 5. АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ПОЛУЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Качественные особенности течения турбулентной струи можно описать для характерных режимов течения. Так, для предела  $Fr \rightarrow \infty$ , т. е. без учета сил плавучести, интегрируя второе уравнение системы (3) с условиями

$$u|_{x=0} = r|_{x=0} = 1,$$

находим

$$\rho ur^2 = (1 - u_\infty)/(u - u_\infty), \quad (5)$$

а уравнение (4) при введении обозначения  $z_0 = (1 - u_\infty)/\rho_\infty$  преобразуется к виду

$$du/dx = -(2/z_0)(u - u_\infty)^2(v_c r), \quad (6)$$

где радиус струи  $r$  с учетом формул (3) и (5) для  $\rho$  задается выражением

$$ur^2 = 1 - 1/\rho_\infty + z_0/(u - u_\infty).$$

Уравнение (6) позволяет проследить развитие картины течения турбулентной струи на всем пути ее движения. Наглядную оценку переменных  $u$  и  $r$  с учетом многообразия внешних условий течения можно получить для предела  $x \rightarrow \infty$ . Уравнение (6) после подстановки в него выражений для  $u$  и  $r$  в этом пределе как

$$u = u_\infty(1 + cx^{-\alpha}), \quad r^2 = z_0(x^\alpha/u_\infty c),$$

где  $\alpha > 0$  и  $c$  — искомые константы, примет вид

$$(\alpha z_0/(u_\infty c))x^{\alpha-1} = 2(\gamma cx^{-\alpha} + u_{*t})(z_0/u_\infty c)^{1/2}x^{\alpha/2}.$$

Приравняв нулю сумму членов при одинаковых степенях  $x$ , для величин  $\alpha$ ,  $c$  и переменных  $u$  и  $r$  в зависимости от параметра внешней турбулентности  $u_{*t}$  получаем следующие оценки.

1. В отсутствие внешней турбулентности, т. е. при  $u_{*t} = 0$ :

$$\alpha = 2/3, \quad c = (z_0/(9u_\infty \gamma^2))^{1/3},$$

$$r = (3\gamma z_0/u_\infty)^{1/3}x^{1/3}, \quad u = u_\infty(1 + cx^{-2/3}).$$

2. При наличии внешней турбулентности, иначе при  $u_{*t} > 0$ :

$$\alpha = 2, \quad c = (z_0/u_\infty)/u_{*t}^2,$$

$$r = u_{*t}x, \quad u = u_\infty(1 + cx^{-2}).$$

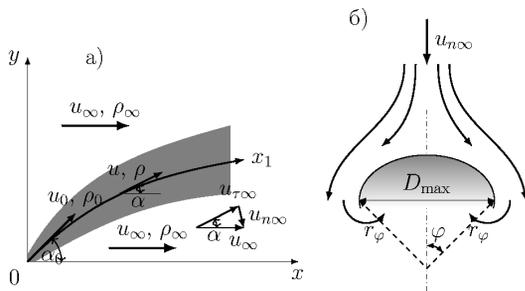
3. Для случая  $u_{*t} = 0$  и  $u_\infty = 0$  получаем классический вариант:

$$r = \gamma x, \quad u = 1/(\gamma \rho_\infty^{1/2} x).$$

Характер асимптотической зависимости искомым  $r$  и  $u$  от  $x$  в найденных соотношениях согласуется с результатами теории на основе общих соображений размерности [8]. Это дает основание учитывать полученные результаты в качестве теоретической основы при дальнейшем исследовании турбулентных струй с усложняющимися факторами течения, в частности для рассматриваемой далее турбулентной струи в сносящем потоке внешнего газа.

### 6. ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

Рассматривается вариант истечения турбулентной струи, когда ее направление на выходе в поток внешней среды, как показано на рис. 3, образуют с ним угол  $\alpha_0 > 0$ . Внешний поток оказывает двойное воздействие на структуру и характер течения струи. Под динамическим напором его нормальной к оси струи составляющей скорости происходит отклонение траектории струи в направление его течения, а создаваемая им разность давлений между передней и кормовой частями обтекаемой струи приводит к деформации профиля поперечного сечения струи, принимающего форму, близкую к сегменту круга [11].



**Рис. 3.** Схема движения турбулентной струи в сносящем потоке газа: а — сечение струи в плоскости симметрии ее движения  $xy$ . Струя вытекает под углом  $\alpha_0$  к направлению внешнего потока, движущегося вдоль оси  $x$ ; начальные данные струи и внешнего потока те же, что и для схемы на рис. 2;  $u_{\tau\infty}$  и  $u_{n\infty}$  — проекции  $u_\infty$  вдоль струи и перпендикулярно к ней;  $x_1$  — криволинейная координата траектории струи; б — профиль поперечного сечения струи в форме сегмента с углом раствора  $\varphi$  и радиусом  $r_\varphi$

Поскольку струя это реальный объект исследования, воздействие на него внешних условий можно описывать с заранее заданной той или иной упрощенной структурой его геометрических параметров. В данном варианте теории использовано понятие круглой струи радиуса  $r$  и параметров  $S = \pi r^2$ ,  $\Pi = 2\pi r$  и  $D_{max} = 2r$ .

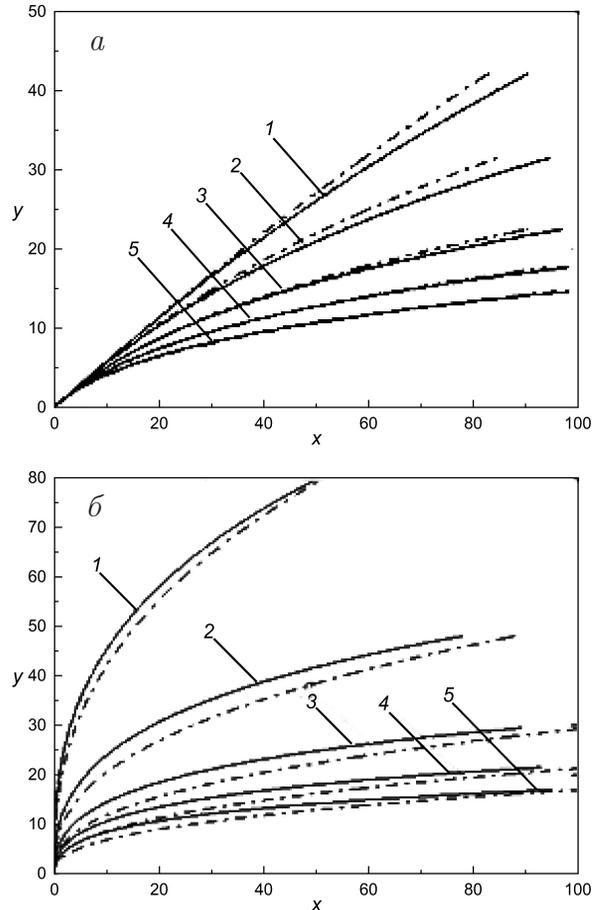
### 6.1. Вывод уравнений движения турбулентной струи

В системе координат  $xy$  касательная к траектории образует угол  $\alpha$  с осью  $x$ . С учетом записи равенства  $dx/dy = \text{tg } \alpha \equiv 1/t$  уравнения траектории с использованием криволинейной координаты  $x_1$  предстанут в виде

$$dx/dx_1 = t/(1+t^2)^{1/2},$$

$$dy/dx_1 = 1/(1+t^2)^{1/2}.$$

Как и в предыдущем варианте струйного потока, текущие плотность и скорость струи из-за турбулентного перемешивания принимаются постоянными по поперечному сечению струи. Уравнения баланса масс, компоненты импульса вдоль оси  $x_1$  и уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости, подобное уравнению (4), в котором вместо  $u_\infty$  взята ее проекция  $u_{\tau\infty} = u_\infty \cos \alpha$  на направление оси  $x_1$ , выводятся, как и ранее, для прямой струи



**Рис. 4.** Кривые траекторий струи метана, выходящей во внешний поток: а — под углом  $\alpha_0 = 30^\circ$ , б — под прямым углом  $\alpha_0 = 90^\circ$ , и последовательно возрастающих значениях относительной скорости сносящего потока  $u_\infty/u_0$ : 1 — 0.02; 2 — 0.05; 3 — 0.1; 4 — 0.15; 5 — 0.2; штрихпунктиры — эмпирические корреляции из [11]

при суммировании потоков этих величин через сечения  $x_1$  и  $x_1 + dx_1$ , нормальные к траектории струи:

$$d(\rho u r^2)/dx_1 - \rho_\infty u_{\tau\infty} (dr^2/dx_1) - 2\rho_\infty u_{ex} r = 0,$$

$$d(\rho u^2 r^2)/dx_1 - u_{\tau\infty} d(\rho u r^2)/dx_1 = 0,$$

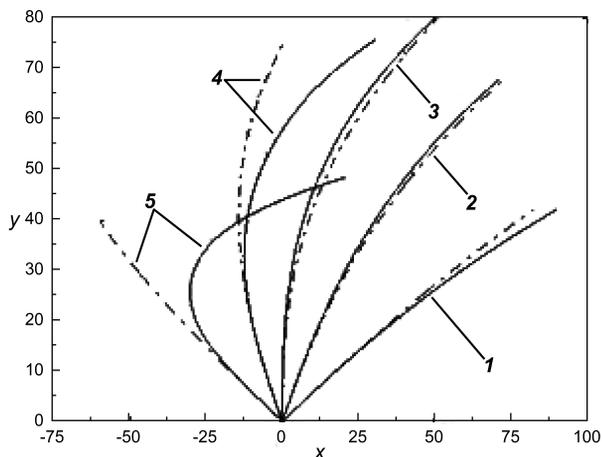
$$d(\rho u r^2)/dx_1 = 2\gamma\rho_\infty (|u - u_{\tau\infty}| + \xi_t u_{\tau\infty}) r.$$

Уравнение для нормальной к оси  $x_1$  компоненты импульса, фактически задающее дополнительное уравнение для траектории струи, выводится из условия равенства силы трения при отрывном обтекании струи по нормали к ней:

$$F_{fr} = (1/2)\gamma_{fr}\rho_\infty u_{n\infty}^2 (D_{max} dx_1),$$

возникающей при искривлении траектории центростремительной силы

$$F_c = \rho u^2 (S dx_1)/R,$$



**Рис. 5.** Кривые траекторий струи метана при различных углах выхода к направлению внешнего сносящего потока  $\alpha_0$ : 1 —  $30^\circ$ ; 2 —  $60^\circ$ ; 3 —  $90^\circ$ ; 4 —  $120^\circ$ ; 5 —  $150^\circ$  и скорости сносящего потока  $u_\infty/u_0 = 0.02$ ; штрихпунктиры — эмпирические корреляции из [11]

где  $R$  — радиус кривизны траектории струи:

$$R = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / |d^2y/dx^2| \equiv (1 + t^2) / (dt/dx_1),$$

$u_{n\infty} = u_\infty \sin \alpha$ ,  $\gamma_{fr}$  — коэффициент трения:

$$\rho u^2 r^2 (dt/dx_1) = \gamma_{fr} \rho_\infty u_\infty^2 r,$$

и начальными условиями в точке  $x_1 = 0$ . В соответствии с принятой схемой истечения струи эти условия запишем в виде

$$u = 1, \rho = 1, S = \pi, x = y = 0, t = \text{ctg } \alpha_0.$$

### 6.2. Расчеты и сравнение с экспериментом

Полученные соотношения и уравнения содержат множество параметров, определяющих общие условия движения струи в сносящем потоке. Из условий последующего сравнения с имеющимися экспериментальными данными приняты условия  $\rho_\infty = 1$  и  $u_{*t} = 0$ , т. е. без влияния внешней турбулентности, а варьируются параметры: угол  $\alpha_0$  между начальным направлением струи и скоростью внешнего потока газа  $u_\infty$ , начальная скорость  $u_0$ , скорость  $u_\infty$ , плотность  $\rho_\infty$  внешней среды, интенсивность мелкомасштабных пульсаций внешней среды  $u_{*t}$ . Теория содержит константы  $\gamma$ ,  $\gamma_{fr}$ , по своему физическому смыслу не зависящие от перечисленных выше параметров движения, и поэтому рассматриваются как универсальные константы. Значение константы  $\gamma$  принято равным 0.11 (оно получается при

усреднении классического профиля скорости однородной затопленной струи [11] по ее поперечному сечению и имеет смысл полугла ее расширения). Значение коэффициента трения поперечного обтекания струи принято равным 0.75. Напомним, что при турбулентном обтекании круглого цилиндра величина  $\gamma_{fr} \approx 0.6-0.8$  [6]. В данном разделе приводятся результаты расчета траекторий турбулентной струи в сносящем потоке для различных комбинаций значений независимых параметров течения, дающие наглядное представление о влиянии этих параметров на геометрические характеристики струйного потока. Для сравнения с экспериментом на рис. 4, 5 приведены расчеты по эмпирическим зависимостям Шандорова, взятым из [11].

### 7. ВЫВОДЫ

1. В отличие от ранее разрабатывавшихся полумпирических моделей движения турбулентных струй учтена их главная особенность — наличие четкой границы раздела между струей и внешней ламинарной средой.

2. Предложен альтернативный существующим представлениям механизм вовлечения внешней среды в объем турбулентного потока. В его основе лежала идея образования турбулентных вихрей на границах струи как единственного источника массы и энергии турбулентных пульсаций потока.

3. Получено выражение для скорости захвата внешней среды с учетом эффектов внешней турбулентности и соответствующее уравнение баланса массы турбулентной жидкости, замкнувшее систему уравнений, описывающих параметры турбулентных струй в зависимости от множества внешних условий ее распространения — скорости и плотности внешней среды, силы тяжести (для плавучих струй), внешней турбулентности.

4. Фактор границы как источника турбулентности дал основание описывать искомые параметры струи (скорость  $u$  и плотность  $\rho$ ) в форме однородных по сечению струи распределений.

5. Проведено исследование особых режимов движения струй в различных сочетаниях независимых параметров, подтвердившее физическую непротиворечивость результатов расчета и логическую обоснованность исходных допущений предложенной теории.

6. Результаты расчета качественно и количественно описывают классические эксперименты, подтверждая тем самым справедливость принятых допущений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Воротилин, *О механизме движения и диффузионного горения турбулентных струй*, ЖЭТФ **153**, 313 (2018).
2. В. П. Воротилин, *О механизме турбулентных течений со сдвигом*, ЖЭТФ **156**, 176 (2019).
3. В. П. Воротилин, *О механизме турбулентных течений со сдвигом. Часть 2. Турбулентный пограничный слой*, ЖЭТФ **160**, 587 (2021).
4. В. П. Воротилин, *Гидродинамика турбулентного слоя смешения*, ЖЭТФ **162**, 985 (2022).
5. И. О. Хинце, *Турбулентность*, Физматгиз, Москва (1963).
6. Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, Наука, Москва (1969).
7. А. С. Гиневский, *Теория турбулентных струй и следов*, Машиностроение, Москва (1969).
8. А. Д. Рейнольдс, *Турбулентные течения в инженерных приложениях*, Энергия, Москва (1979).
9. П. Брэдшоу, Т. Себеси, Г. Г. Фернгольд и др., *Турбулентность*, под ред. П. Брэдшоу, Машиностроение, Москва (1980).
10. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).
11. Т. А. Абрамович, С. Ю. Гиршович и др., *Теория турбулентных струй*, Наука, Москва (1984).
12. *Турбулентность: принципы и применение*, под ред. У. Фроста, Т. Моулдена, Мир, Москва (1980).
13. S. Corrsin and A. L. Kistler, *Free-Stream Boundaries of Turbulent Flows*, NASA Rept. № 1244 (1955).
14. *Методы расчета турбулентных течений*, под ред. В. Кольмана, Мир, Москва (1984).
15. K. Chauhan, J. Philip, C. M. Silva, N. Hutchins, and I. Marusic, *J. Fluid Mech.* **742**, 119 (2014).
16. W. Tomoaki, *J. Fluid Mech.* **988**, 242 (2024).
17. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Двумерная турбулентность в ограниченной ячейке*, ЖЭТФ **166**, 110 (2024).