ЖЭТФ, 2025, том 167, вып. 1, стр. 45–48

ОТСКОК В НЕМИНИМАЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

С. О. Алексеев [a,b*], *А. В. Немтинова* [c**], *О. И. Зенин* [b***], *А. А. Байдерин* [b]

[a] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[b] *Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[c] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина 620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 22 августа 2023 г.,
после переработки 13 сентября 2024 г.
Принята к публикации 14 сентября 2024 г.

Установлены необходимые условия реализации «отскока» масштабного фактора в начальный момент Вселенной для более широкого диапазона значений параметров. Этот факт представляется существенным как при дальнейшем построении теории квантовой гравитации, так и для рассмотрения последующей космологической эволюции на основании данной модели.

DOI: 10.31857/S0044451025010031

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общая теория относительности (ОТО) с высокой точностью объясняет почти весь массив астрономических данных. При этом, уже начиная с самых первых космологических решений [1], уравнения Эйнштейна должны в обязательном порядке содержать правую часть — тензор энергии-импульса. Один из подходов состоит в том, что весь массив современных астрофизических данных хорошо описывается уравнениями ОТО, и именно для объяснения физической природы правой части и её источника создаются теории гравитации, расширяющие ОТО различными способами [2–6].

Одним из перспективных направлений расширения ОТО явились скалярно-тензорные теории гравитации, в которых, как следует из названия, в дополнение к геометрическим членам и инвариантам кривизны в рассмотрение включены физические поля. Для решения проблемы увеличения порядка дифференциальных уравнений поля сконструированы теории, в которых высшие степени взаимно сокращаются, и наиболее общим примером такого подхода стала модель Хорндески [7,8]. Несмотря на значительное ограничение модели Хорндески из данных гравитационно-волновой астрономии [9, 10], интерес к ней (и теориям, созданным на ее основе и проходящим тест GW170817) не ослабевает. На ее основе также создаются модели несингулярной космологии, в которых в начальный момент времени отсутствует сингулярность, заменяемая на «отскок» масштабного фактора [11, 12]. Подход представляется перспективным, и в рамках теории Хорндески рассматривались модели, названные «Fab Four», в которых сами поправки, без дополнительных подгоночных параметров типа Λ-члена, обеспечивают ускоренное расширение Вселенной [13, 14]. Несингулярные космологические решения в рамках Fab Four, как примера скалярно-тензорной теории менее сложной структуры, чем теория Хорндески в общем виде, также обсуждались ранее [15].

Идея добавления квантово-полевых поправок в модели гравитации [16] позволяет, например, ограничить размер нелокальностей в теориях гравита-

* E-mail: salexeyev@gmail.com
** E-mail: nemtinova14@mail.ru
*** E-mail: dkiiiabu4@gmail.com

ции в квантовом пределе [17]. Этот же подход был применен к модели Fab Four [18], и дополнительный учет квантово-полевых поправок приводит в том числе и к тому, что скорость распространения гравитационных волн теперь соответствует экспериментальному результату гравитационно-волновой астрономии. Все это говорит о перспективности рассмотрения скалярно-тензорных моделей. Поэтому нами рассмотрена неминимальная эффективная модель скалярно-тензорной гравитации с полевыми членами третьего и четвертого порядков, образованная суммированием однопетлевых взаимодействий [19] в виде

$$S = \int \sqrt{-g}\left[\left(\frac{2}{\kappa^2} + \alpha\phi^2\right) R + \kappa^2 \beta G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{3!}\lambda\phi^3 - \frac{1}{4!} g\phi^4 \right] d^4x, \qquad (1)$$

где $\kappa^2 = 32\pi G$, G — постоянная Ньютона, ϕ — новое скалярное поле, R — скалярная кривизна, α и β — безразмерные постоянные, λ — кубическая скалярная связь с размерностью массы, g — безразмерная скалярная связь четвертого порядка, $G_{\mu\nu}$ — тензор Эйнштейна ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$). Несмотря на «расширенность», эта модель все еще гораздо проще, чем стандартная версия теории Хорндески или DHOST, что повышает интерес к ней и ее возможности объяснения темной энергии и процессов в ранней Вселенной. Для дальнейшего анализа применимости обсуждаемой модели к моделированию эволюции ранней Вселенной необходимо изучить ее предсказания для реализации отскока и генезиса [20], и настоящая статья посвящена первому шагу в этом направлении — исследованию условий существования отскока. Здесь необходимо отметить, что отсутствие начальной сингулярности в космологической модели значительно повышает интерес к ней. В качестве примера напомним о поиске пространств параметров, при которых реализуется «отскок» [21] в гравитации с поправками второго порядка по кривизне — модели с членом Гаусса – Бонне [22,23] — одного из кандидатов на роль квазиклассического предела струнной гравитации [24]. Более того, отскок проявляется уже на уровне простого добавления скалярного поля — модели Бранса – Дикке [25]. Таким образом, наличие в космологическом решении рассматриваемой теории несингулярной асимптотики является дополнительным аргументом в пользу перспективности рассматриваемой теории, и, в качестве первого шага изучения сильных и слабых сторон теории (1), мы и исследуем этот вопрос. Поскольку ранее были предложены дополнительные ограничения на параметры теории для прохождения астрономических тестов (мы приводим их в конце разд. 3) [19], представляется интересным сравнить эти ограничения на пространство параметров, налагаемые требованием наличия «отскока».

Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен получению уравнений поля в теории, предложенной в [19], в разд. 3 исследованы ограничения на пространство параметров, налагаемые требованием наличия «отскока», разд. 4 содержит обсуждение полученных результатов и выводы.

2. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Уравнения Клейна – Гордона получаются варьированием действия (1) по скалярному полю. Следуя [26], имеем

$$- \frac{1}{2!}\lambda\phi^2 - \frac{1}{3!} g\phi^3 + \Box\phi + \\ + 2\alpha\phi R - 2\kappa^2\beta G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0. \qquad (2)$$

Варьируем по метрическому тензору и вводим эффективную гравитационную постоянную $G_{eff}(\phi)$, зависящую только от скалярного поля, так что

$$\frac{2}{\kappa^2} + \alpha\phi^2 = \frac{1}{16\pi G_{eff}(\phi)}. \qquad (3)$$

В результате уравнение Эйнштейна примет вид

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G_{eff}} G_{\mu\nu} - (\nabla_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Box)\,\alpha\phi^2 - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \\ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{3!}\lambda\phi^3 + \frac{1}{4!} g\phi^4\right) - \\ - \kappa^2\beta\Bigg(- \nabla_\lambda\nabla_\mu\phi\nabla^\lambda\nabla_\nu\phi + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi - \\ - R_{\alpha\mu\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - \frac{1}{2}\Big[\nabla_\mu\phi G_{\nu\lambda}\nabla^\lambda\phi + \\ + \nabla_\nu\phi G_{\mu\lambda}\nabla^\lambda\phi\Big] - \frac{1}{2}\Big[\nabla_\mu\phi R_{\nu\lambda}\nabla^\lambda\phi + \\ + \nabla_\nu\phi R_{\mu\lambda}\nabla^\lambda\phi\Big] + g_{\mu\nu}\Big[R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \\ - \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{\alpha\beta}\phi)^2\Big]\Bigg) = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \qquad (4)$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \qquad (5)$$

L_m — лагранжиан материи.

3. КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ С «ОТСКОКОМ»

Аналогично [22, 23] рассмотрим изотропное (фридмановское) космологическое решение вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{6}$$

где и масштабный фактор a, и скалярное поле ϕ из действия (1) зависят только от временной координаты t.

Для исследования поведения в точке отскока рассмотрим систему (2)–(4). В точке отскока масштабный фактор должен быть положительным и конечным, т. е. $a = \text{const} > 0$. При этом для обеспечения минимума масштабного фактора именно в точке отскока и для того, чтобы избежать космологической сингулярности $a = 0$ в любой другой точке, необходимо, чтобы $\dot{a} = 0$ и $\ddot{a} > 0$. С учетом этого уравнения Эйнштейна в точке отскока можно переписать как

$$\frac{3}{4}\dot{\phi}^2 = -\frac{1}{12}\lambda\phi^3 - \frac{1}{48}g\phi^4, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}-2\frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{2}{\kappa^2} + \alpha\phi^2\right) - 2\alpha\phi\ddot{\phi} + \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 - \\ -5\kappa^2\beta\frac{\ddot{a}}{a}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{12}\lambda\phi^3 + \frac{1}{48}g\phi^4 = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

а уравнение Клейна – Гордона – Фока (2) примет вид

$$\ddot{a} = \frac{a}{12\alpha\phi}\left(\ddot{\phi} - \frac{1}{2}\lambda\phi^2 - \frac{1}{6}g\phi^3\right). \tag{9}$$

Если рассматривать случай, в котором роль тензора энергии-импульса играет скалярное поле, его отсутствие будет означать отсутствие нетривиального космологического решения: $\phi = 0 \Rightarrow a = 0$. Так как последнее и есть избегаемая нами космологическая сингулярность, для гарантии ее отсутствия вводим дополнительное условие $\dot{\phi} = 0$, а также $\phi = \text{const} > 0$ и $\ddot{\phi} > 0$. Тогда из уравнения (7) получаем уравнение для скалярного поля:

$$\phi = -4\frac{\lambda}{g}.$$

Из уравнений (8) и (19) получаем выражение для второй производной скалярного поля:

$$\ddot{\phi} = -\frac{\lambda}{36\alpha}\left(\frac{\frac{1}{\alpha\kappa^2} + 8\frac{\lambda^2}{g^2}}{1 + \frac{1}{12\alpha} + \frac{g^2}{96\kappa^2\alpha^2\lambda^2}}\right).$$

Итоговая система неравенств (с учетом подстановки в (19) уравнений (7) и (8)) имеет вид

$$\phi = -4\frac{\lambda}{g} > 0, \tag{10}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{\lambda}{36\alpha}\left(\frac{\frac{1}{\alpha\kappa^2} + 8\frac{\lambda^2}{g^2}}{1 + \frac{1}{12\alpha} + \frac{g^2}{96\kappa^2\alpha^2\lambda^2}}\right) > 0, \tag{11}$$

$$a > 0, \tag{12}$$

$$\ddot{a} = \frac{ag}{1728\alpha^2}\left(\frac{\frac{1}{\alpha\kappa^2} + 8\frac{\lambda^2}{g^2}}{1 + \frac{1}{12\alpha} + \frac{g^2}{96\kappa^2\alpha^2\lambda^2}}\right) + \frac{a\lambda^2}{18\alpha g} > 0. \tag{13}$$

Из (10) получаем, что λ и g должны быть разных знаков. Также следует сказать, что необходимое условие стабильности модели это $g > 0$ (иначе потенциал скалярного поля будет не ограничен снизу и модель будет нестабильна). Из следующего неравенства (11) видно, что если $\lambda < 0$, то $\alpha > 0$. Остается последнее неравенство (13), которое автоматически выполняется из условий (10)–(12). Также можно рассмотреть случай $\alpha < 0$. Из (13) получаем

$$\left(\frac{\frac{1}{\alpha\kappa^2} + 8\frac{\lambda^2}{g^2}}{1 + \frac{1}{12\alpha} + \frac{g^2}{96\kappa^2\alpha^2\lambda^2}}\right) > -\frac{1728\alpha\lambda^2}{18g^2} > 0.$$

Из этого следует, что выражение в скобках будет больше нуля. В итоге условие (11) также выполняется в случае, если $\lambda > 0$ и $g < 0$. Однако это условие противоречит необходимому условию стабильности модели. Поэтому эти условия не подходят для данной задачи.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В неминимальной эффективной модели скалярно-тензорной гравитации с полевыми членами третьего и четвертого порядков, образованной суммированием однопетлевых взаимодействий [19], реализация решения типа «отскок» возможна. Необходимые условия реализации решения типа «отскок» следующие: параметры $\lambda < 0$, $g > 0$ и $\alpha > 0$. Ранее похожая модель исследовалась в [27], где $\alpha = 0$, отсутствует скалярное поле ϕ, но присутствует космологическая постоянная Λ, обеспечивая тот же эффект. Решение типа «отскок» реализуется в случае $\Lambda = 0$ (однако у нас невозможен случай $\lambda = g = 0$), $\rho = 0$ (в нашем случае аналогично объемная плотность равна нулю), $a_0 > 0$ (в нашем случае масштабный фактор $a > 0$) и $\beta < 0$ (это не противоречит нашим условиям). Следовательно, наши результаты частично совпадают с полученными ранее для более простой версии обсуждаемой модели, за исключением равенства нулю космологической постоянной и параметра α (в более простой версии теории он изначально равен нулю).

Таким образом, в обсуждаемой модели скалярно-тензорной гравитации, вместо начальной сингулярности, возможен «отскок» даже в самой простой конфигурации, причем при соблюдении изначальных ограничений на нее. Значит, эта модель, имея более простую структуру, чем большинство скалярно-тензорных моделей на основе теории Хорндески, решая проблему начальной сингулярности, с одной стороны, помогает приблизиться к построению квантовой теории гравитации, а с другой, имеет шанс на реализацию отскока и генезиса.

Финансирование. Работа О.И.З. финансировалась за счет средств Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант 22-2-2-11-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes (О кривизне пространства)*, Z. Phys. **10**, 377 (1922).

2. С. О. Алексеев, Е. А. Памятных, А. В. Урсулов и др., *Общая теория относительности: Введение. Современное развитие и приложения*, URSS Москва (2022).

3. S. Capozziello and M. De Laurentis, Phys. Rep. **509**, 167 (2011).

4. E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso, L. Gualtieri, and P. Pani, Class. Quant. Grav. **32**, 243001 (2015).

5. L. Barack et al., Class. Quant. Grav. **36**, 143001 (2019).

6. S. Alexeyev and V. Prokopov, Universe **8**, 283 (2022).

7. G. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).

8. T. Kobayashi, Rept. Prog. Phys. **82**, 086901 (2019).

9. J. Ezquiaga and M. Zumalacarregui, Phys. Rev. Lett. **119**, 251304 (2017).

10. P. Creminelli and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **119**, 251302 (2017).

11. A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980); Adv. Ser. Astrophys. Cosmol. **3**, 130 (1987).

12. Y. Ageeva, P. Petrov, and V. Rubakov, Phys. Rev. D **104**, 063530 (2021).

13. C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, Phys. Rev. Lett. **108**, 051101 (2012).

14. E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, JCAP **12**, 026 (2012).

15. I. Torres, J. C. Fabris, and O. F. Piattella, Phys. Lett. B **798**, 135003 (2019).

16. X. Calmet, D. Croon, and C. Fritz, Eur. Phys. J. C **75**, 605 (2015).

17. S. Alexeyev, X. Calmet, and B. Latosh, Phys. Lett. B **776**, 111 (2018).

18. B. Latosh, Eur. Phys. J. C **78**, 991 (2018).

19. B. Latosh, Eur. Phys. J. C **80**, 845 (2020).

20. S. Mironov, V. Rubakov, and V. Volkova, Phys. Rev. D **100**, 083521 (2019).

21. S. Alexeyev, A. Toporensky, and V. Ustiansky, Class. Quant. Grav. **17**, 2243 (2000).

22. С. О. Алексеев, К. А. Ранну, ЖЭТФ **141**, 463 (2012).

23. S. Alexeyev and M. Senduk, Universe **6**, 25 (2020).

24. P. K. Townsend and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D **19**, 3592 (1979).

25. И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, С. О. Алексеев, Д. А. Третьякова, УФН **184**, 379 (2014).

26. T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511 (2011).

27. S. Sushkov and R. Galeev, Phys. Rev. D **108**, 044028 (2023).