

ЖИДКОСТЬ ЛАТТИНЖЕРА С ПРИТЯЖЕНИЕМ И ОДНОЙ ПРИМЕСЬЮ: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

*В. В. Афонин**

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 9 июня 2022 г.,
после переработки 29 августа 2022 г.
Принята к публикации 29 августа 2022 г.

Изучается точное решение для задачи рассеяния одномерных притягивающихся фермионов на точечной примеси, существующее в модели Кейна–Фишера при параметре Латтинжера равном 2. Получено выражение для частотной зависимости коэффициента отражения фермионов от примеси, показывающее невозможность экстраполяции ответов для относительно слабого фермион-фермионного взаимодействия в область констант связи порядка единицы.

DOI: 10.31857/S0044451023020104
EDN: OQVINH

1. ВВЕДЕНИЕ

История изучения одномерных систем со взаимодействующими носителями началась с работ Томонаго [1] еще в 1950-х годах. Первоначально такие системы рассматривались как простейшие модели для сильновзаимодействующих фермионов в релятивистских теориях [2, 3]. Интерес теоретиков к одномерным системам в этом случае стимулировался тем, что они являлись простейшими моделями с «невыветанием» частиц. Позднее, по мере совершенствования технологий, изучение транспортных свойств одномерных каналов получило и экспериментальный интерес в физике твердого тела. Прогресс в теории, описывающей транспортные свойства баллистических каналов, в значительной степени был обусловлен тем, что задача в этом случае является точно решаемой. Одновременно с этим стало понятно, что примесное рассеяние кардинально меняет картину транспортных явлений в одномерных проводниках. Простейшей моделью с примесным рассеянием является баллистический канал с имплантированной точечной примесью. В рамках имеющихся на сегодня представлений такая задача уже не может быть решена точно. Для ее решения

требуется использовать подходы, развитые при построении теории элементарных частиц. Можно сказать, что теория одномерных сильно взаимодействующих фермионов является одной из немногих задач теоретической физики, интересных с точки зрения как теории поля, так и физики твердого тела.

К настоящему времени достигнуто хорошее понимание явлений, происходящих в чистых одномерных каналах. Этого нельзя сказать о каналах с примесями. Даже в простейшей задаче с одной точечной и упругой примесью подавляющее большинство работ относится к случаю слабого фермион-фермионного ($e-e$) взаимодействия:

$$\nu \ln(\mathcal{M}/|\omega|) \leq 1, \quad \ln(\mathcal{M}/|\omega|) \gg 1, \quad (1)$$

где \mathcal{M} — параметр ультрафиолетового обрезания, ω — частота внешнего поля, $\nu = 1/v_c - 1$, а $v_c = \sqrt{1 + V_0/\pi} < 1$ — перенормированная скорость Ферми. В физике твердого тела вместо перенормированной скорости v_c часто используется параметр Латтинжера (K), равный $1/v_c$. (Рассматривается простейшая из возможных задач: однокомпонентные притягивающиеся фермионы и точечное $e-e$ -взаимодействие ($V_{e-e} = V_0\delta(x-y)$). Все скорости измеряются в единицах скорости Ферми, $\hbar = 1$.)

В низшем порядке по параметру (1) (область теории возмущений) поправки к кондактансу в латтинжеровской жидкости (LL) впервые были вычислены в работах [4, 5]. Позднее, в рамках ренормгруппового (РГ) подхода, тоже предполагающего

* E-mail: vasilii.afonin@mail.ioffe.ru

выполнение условий (1), были получены выражения для кондактанса, учитывающие вклады порядка $\nu^n \ln^{n-m} (M/|\omega|)$, $m = 0, 1, 2$ [6–8]. Случай сильного ($\nu \sim 1$) e - e взаимодействия обсуждался

- для отталкивающихся фермионов: работы [4, 9], в которых было рассмотрено точное решение для LL с отталкиванием и одной точечной примесью, существующее при $v_c = 2$, и цикл работ, использующих термодинамический анзац Бете (см. [10] и ссылки в ней);
- для LL с притяжением: в работе [11] было получено выражение для первой поправки к $|\mathcal{R}_\omega|^2$, справедливое при $|R_0|^2 \rightarrow 0$ и $\nu \leq 1/2$ (R_0 — затравочный коэффициент отражения фермионов от примеси, а \mathcal{R}_ω — с учетом e - e взаимодействия).

В процитированных выше статьях был применен разный подход к решению этой задачи. В работах [7, 11] проводилась шивка решений нелинеаризованного уравнения Шредингера в точке расположения примеси. Необходимость такого подхода диктуется тем, что на масштабе точечной примеси ($\sim 1/p_F$) разделение полной волновой функции фермиона на волновую функцию правого (Ψ_R) и левого (Ψ_L) фермионов невозможно. При таком способе вычислений автоматически учитывается существование после рассеяния носителя на примеси как отраженной, так и прошедшей волн. В работах [4, 5, 9] примесное рассеяние описывалось с помощью туннельного гамильтониана [12]: в уже линеаризованное уравнение Шредингера вводилось слагаемое, описывающее переход правых фермионов в левые и не содержащее прошедшую волну. (Далее мы будем называть такой подход гамильтонианом Кейна–Фишера; КФ-гамильтониан.) Получающийся в первом подходе эффективный гамильтониан, в котором в качестве полевой переменной была взята фаза рассеяния фермионов на примеси, качественно отличается от КФ-гамильтониана. Он нелокален и содержит бесконечное количество слагаемых. Соответственно, система уравнений Гелл-Мана–Лоу в этом случае оказывается бесконечной [8, 11]. Это не помешало доказать перенормируемость теории, сформулировать РГ-подход так, чтобы наблюдаемые величины зависели в каждом порядке по t только от t констант связи и решить все эти системы уравнений. Однако оба этих подхода приводили к одним и тем же частотным зависимостям в наблюдаемых величинах при $\nu \ll 1$. Отличие ответов для кондактанса в работах [8] и [7], начиная с двухпетлевого при-

ближения ($m = 1$), возникало не от разницы в подходах, а от неприменимости анзаца Андерсона, использованного в [7]. В такой ситуации важно сравнить результаты, следующие из нелокального и КФ-гамильтонианов, и при $\nu \sim 1$. Это представляется интересным еще и потому, что одним из предсказаний работы [11] является то, что для притягивающихся фермионов в точке $\nu = 1/2$ инфракрасная расходимость в выражении для $|\mathcal{R}_\omega|^2$ должна смениться на ультрафиолетовую, и при более сильном взаимодействии кондактанс должен быть пропорциональным $|\omega|$. (А не $|\omega|^{2\nu}$, как это следовало бы из экстраполяции ответов для слабого e - e взаимодействия в область $\nu \sim 1$.) Сравнение результатов оказывается возможным потому, что гамильтониан КФ является точно решаемым и при $v_c = 1/2$ [13]. (Дуальность теорий с отталкиванием ($v_c = 2$) и притяжением ($v_c = 1/2$) для гамильтонианов КФ не доказана, и они не переходят друг в друга при замене $v_c \leftrightarrow 1/v_c$ [13].) Кроме того, новое точное решение задачи в области сильного e - e взаимодействия всегда представляет самостоятельный интерес.

Результаты вычислений, сделанных в этой работе, подтверждают выводы статьи [11]: при $v_c = 1/2$ выражение для кондактанса оказывается пропорциональным $|\omega|$ и в модели Кейна–Фишера, т.е. не совпадает с экстраполяцией ответа для случая слабого e - e взаимодействия в область $\nu \sim 1$. (Последняя привела бы к зависимости $|\omega|^2$.) Как и в подходе с нелокальным гамильтонианом, это получается из-за существования ультрафиолетовой расходимости в выражении для кондактанса. Сам факт существования такой расходимости сразу гарантирует уменьшение степени частоты в выражении для кондактанса, так как ответ зависит только от двух величин с размерностью энергии: M и ω . Поэтому появление расходимости, связанной с ультрафиолетовым обрезанием, по размерным соображениям означает уменьшение степени частоты. Появляющийся при этом расходящийся множитель должен быть спрятан в перенормированную (за счет сильного взаимодействия в ультрафиолетовой области) амплитуду рассеяния носителей на примеси. С физической точки зрения понижение степени частоты связано с тем, что на временах $t \leq 1/M$ энергия фермиона плохо определена, так что говорить о законе сохранения энергии при рассеянии на упругой примеси в такой ситуации не представляется возможным. В случае сильного взаимодействия из-за существования ультрафиолетовой расходимости эти времена дают главный вклад в кондактанс. (Это качественно отличает случай сильного e - e взаимодействия при

$v_c = 1/2$ от области теории возмущений. В последней ответ определяется большими временами, что при условии выполнения (1) давало возможность применить скейлинговый подход.) Вклад от больших времен, на которых закон сохранения энергии выполняется, в случае сильного взаимодействия тоже существует, но он конечен и поэтому теряется на фоне расходящегося ответа в процессе перенормировки.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 с использованием формализма тождеств Уорда получено выражение для величины тока в подходе Кейна–Фишера. В разд. 3 обсуждается вопрос о переходе в представление нормальных квазичастиц в гамильтониане Кейна–Фишера, приводящий к точно решаемой задаче при $v_c = 1/2$, и получено ее решение. Раздел 4 посвящен вычислению коэффициента отражения фермионов от примеси. Все сколько-нибудь громоздкие с математической точки зрения вычисления, не требующие физического обсуждения, вынесены в Приложения.

2. ТОЖДЕСТВА УОРДА ДЛЯ ГАМИЛЬТониАНА КЕЙНА–ФИШЕРА

Тождества Уорда играют важную роль при построении любой теории, так как они связывают между собой матричные элементы, описывающие наблюдаемые величины. Эти связи являются проявлением фундаментальных законов, существующих в задаче (таких как законы сохранения, калибровочная инвариантность и т.д.). В этом разделе мы будем считать, что все операторы поля записаны в гайзенберговском представлении.

Туннельный гамильтониан, предложенный в [4] для описания рассеяния взаимодействующих одномерных фермионов с примесью и являющийся сейчас почти общепринятым для нашей задачи, состоит из двух частей

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ee} + \mathcal{H}_{imp},$$

где \mathcal{H}_{ee} — гамильтониан взаимодействующих фермионов, равный

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{e-e} = & \int dx [\hat{\Psi}_R^\dagger(x)(-i\partial_x)\hat{\Psi}_R(x) + \hat{\Psi}_L^\dagger(x)(i\partial_x)\hat{\Psi}_L(x)] + \\ & + \int dx dy \hat{\rho}(x)V_{e-e}(x-y)\hat{\rho}(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\hat{\rho}$ — оператор электрического заряда фермионной системы, а \mathcal{H}_{imp} описывает примесную часть рассеяния носителей тока:

$$\mathcal{H}_{imp} = \int dx dy V_{imp}(x,y)[\hat{\Psi}_R^\dagger(x)\hat{\Psi}_L(y) + hc]. \quad (3)$$

Он был впервые использован Дж.Бардиным [12] для вычисления матричных элементов перехода между двумя проводящими областями, разделенными слоем окисла. Этот гамильтониан, строго говоря, справедлив только в низшем приближении по прозрачности. Однако в нашем случае можно попробовать рассматривать его в качестве упрощенного модельного подхода, описывающего примесное рассеяние взаимодействующих фермионов при любой величине V_{imp} . При таком подходе V_{imp} — это просто феноменологический параметр, описывающий фермион-примесное рассеяние. В окончательных ответах он должен быть выражен через наблюдаемые в эксперименте величины.

Любой модельный гамильтониан, описывающий рассеяние фермионов на примеси, должен сохранять электрический заряд и, в случае точечной примеси ($V_{imp}(x,y) = V_{imp}\delta(x)\delta(x-y)$), приводить к существованию δ -функционального источника кирального заряда. (Нам будет удобно измерять заряд фермиона в единицах заряда свободного фермиона e_0 , тогда полный заряд есть $\hat{\rho}(x,t) = \hat{\rho}(x,t)_R + \hat{\rho}(x,t)_L$, а киральный заряд, если определить его как $+1$ для R-фермионов и -1 для L, будет совпадать с выражением для электрического тока: $\hat{j}(x,t) = \hat{\rho}_R(x,t) - \hat{\rho}_L(x,t)$.) Гамильтониан КФ удовлетворяет этим минимальным требованиям. Действительно, прямое вычисление коммутатора $[\mathcal{H}_{imp}, \hat{j}(x,t)]_-$, входящего в уравнение Шредингера для гайзенберговских операторов, позволяет написать уравнение неразрывности для кирального заряда. Для этого достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}(x,t), \hat{\Psi}_{R,L}(y,t)]_- &= -\delta(x-y)\hat{\Psi}_{R,L}(y,t), \\ [\hat{\rho}(x,t), \hat{\Psi}_{R,L}^\dagger(y,t)]_- &= \delta(x-y)\hat{\Psi}_{R,L}^\dagger(y,t), \\ [\hat{j}(x,t), \hat{\Psi}_{R,L}(y,t)]_- &= \mp\delta(x-y)\hat{\Psi}_{R,L}(y,t), \\ [\hat{j}(x,t), \hat{\Psi}_{R,L}^\dagger(y,t)]_- &= \pm\delta(x-y)\hat{\Psi}_{R,L}^\dagger(y,t). \end{aligned}$$

Это позволяет вычислить $\partial_t \hat{j}(x,t)$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_{imp}, \hat{j}(y,t)]_- = & \int dx V(x,y)[- \hat{\Psi}_R^\dagger(x,t)\hat{\Psi}_L(y,t) - \hat{\Psi}_R^\dagger(y,t)\hat{\Psi}_L(x,t) + \\ & + \hat{\Psi}_L^\dagger(x,t)\hat{\Psi}_R(y,t) + \hat{\Psi}_L^\dagger(y,t)\hat{\Psi}_R(x,t)]. \end{aligned}$$

Переходя к точечному взаимодействию и вводя псевдоскалярный оператор $\hat{s}(t)$ (бозонного типа), описывающий примесное рассеяние,

$$\hat{s}(t) = 2i(\hat{\Psi}_L^\dagger(0, t)\hat{\Psi}_R(0, t) - \hat{\Psi}_R^\dagger(0, t)\hat{\Psi}_L(0, t)), \quad (4)$$

$$\hat{s}(t)^\dagger = \hat{s}(t),$$

видим, что $-i[\mathcal{H}_{imp}, \hat{j}(x, t)] = V_{imp}\hat{s}(t)\delta(x)$. Отсюда следует уравнение неразрывности для кирального заряда:

$$\partial_t \hat{j}(t, x) + v_c^2 \partial_x \hat{\rho}(t, x) = V_{imp} \hat{s}(t) \delta(x) - \frac{1}{\pi} \partial_x U_{ext}(x, t), \quad (5)$$

При его выводе использовано выражение для так называемой адлеровской (аксиальной) аномалии [14, 15]. Для LL в кулоновской калибровке его можно записать в виде

$$\partial_t \hat{j}(x, t) + \partial_x \hat{\rho}(x, t) = -\frac{1}{\pi} \partial_x U(x, t), \quad (6)$$

где $U(x, t)$ — полное электрическое поле, состоящее из внешнего поля $U_{ext}(x, t)$, приложенного к каналу, и среднего поля фермионов в точке x :

$$-\partial_x U(x, t) = \int dy \rho(y, t) \partial_y V_{e-e}(x-y) + E_{ext}(x, t).$$

Адлеровская аномалия играет одну из центральных ролей в теории взаимодействующих одномерных фермионов. Дело в том, что гамильтониан e - e -взаимодействия LL без примеси сохраняет как киральный, так и электрический заряд. Если бы ни одна из симметрий $\Psi_{R,L} \rightarrow \exp(\pm i\Lambda)\Psi_{R,L}$ не была бы нарушена, то e - e -взаимодействие не проявлялось бы в электрических свойствах канала. (В этом случае мы бы имели два алгебраических уравнения, выражающие законы сохранения электрического и кирального зарядов, для двух величин $\langle \hat{\rho}(q, \omega) \rangle$ и $\langle \hat{j}(q, \omega) \rangle$, совпадающих с невзаимодействующей теорией.) Таким образом, для проявления взаимодействия в задачах, связанных с переносом заряда, одна из этих симметрий должна быть нарушена. Естественно, нарушается киральная симметрия, которая приводила бы к закону сохранения кирального заряда (см. правую часть выражения для адлеровской аномалии (6)), а электрический заряд сохраняется.

Однако при вычислении кондактанса мы всегда сталкиваемся с расходящимися в ультрафиолетовой области ответами. Физическая причина этой расходимости состоит в том, что справа и слева от точечной примеси (на микроскопическом масштабе $\sim 1/p_F$) образуется двойной слой (см. [11]). С точки

зрения одномерной теории, справедливой на больших масштабах, — это скачок заряда. В подходе со сшивкой в этом можно убедиться непосредственно. В работе [11] показывается, что требование калибровочной инвариантности одномерной теории, учитывающей существование прошедшей волны, позволяет однозначно вычислить его величину. После перенормировки, рецепт которой определяется калибровочной инвариантностью, и при выполнении условий (1) теория со сшивкой волновых функций уже не содержит ультрафиолетовых расходимостей, а кондактанс определяется только эффектами, связанными с инфракрасной областью. Если этот скачок заряда не экранируется трехмерным окружением, то его дальнедействующее взаимодействие с фермионами одномерного канала и приводит к аномальной частотной зависимости кондактанса. (Вопросы, связанные с экранировкой зарядов, рассмотрены в работе [16].)

Возвращаясь к туннельному гамильтониану, приходится констатировать, что переход к точечной примеси делает теорию патологичной. Дело в том, что с точки зрения «чистой математики» дифференциальные уравнения первого порядка с δ -функциональным потенциалом не имеют решения. Действительно, варьируя КФ-гамильтониан без учета e - e взаимодействия по $\Psi_R^*(x)$, мы бы получили уравнение

$$i\partial_x \Psi_R(x) = \int dy V_{imp} \delta(x-y) \delta(x) \Psi_L(x) - E \Psi_R(x).$$

Интегрируя это выражение по бесконечно малому интервалу, видим, что скачок волновой функции должен быть равен

$$i[\Psi_R(\epsilon) - \Psi_R(-\epsilon)] = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy V_{imp} \Psi_L(y) \delta(y).$$

Но это равенство не может быть выполнено: его левая часть антисимметрична при $\epsilon \rightarrow -\epsilon$, а правая — симметрична. Таким образом, туннельный гамильтониан корректно (в математическом смысле) описывает рассеяние фермионов только на дальнедействующей примеси (тогда правая часть этого выражения будет равна нулю), но ответы этой задачи будут качественно отличаться от рассматриваемого нами случая точечной примеси. В результате такой, чисто математической, некорректности переход в линеаризованном гамильтониане к точечному примесному рассеянию приводит к появлению дополнительных (нефизических) ультрафиолетовых расходимостей. Подход со сшивкой нелинеаризованно-

го уравнения Шредингера, естественно, не содержит этой патологии. Таким образом, эти два подхода заведомо нетождественны — они различаются поведением в ультрафиолетовой области. Это надо иметь в виду при детальном сопоставлении результатов, полученных из этих двух подходов. Однако вычисления с нелокальным и содержащим бесконечное количество слагаемых гамильтонианом достаточно трудоемки. Вместе с этим, из физических соображений можно ожидать, что на очень больших расстояниях от примеси примесное рассеяние все-таки должно восприниматься как точечное. Это позволяет надеяться, что КФ-гамильтониан правильно описывает эффекты, определяемые инфракрасной областью. Так и происходит при выполнении условий (1)). В этом случае оба подхода приводят к одинаковым частотным зависимостям кондактанса. Однако даже в этом случае использование КФ-гамильтониана приводит к появлению слагаемых, расходящихся в ультрафиолетовой области и формально существующих даже в отсутствие взаимодействия. Причина их появления — указанная выше математическая некорректность, и поэтому они должны быть опущены.

Выражение (5) служит исходной точкой для тождеств Уорда. Мы будем вычислять фейнмановский линейный отклик системы на бесконечно малое внешнее поле $U_{ext}(1)$ ($1 = x_1, t_1$) и сведем его к вычислению поляризационного оператора (РО) поля $\hat{s}(1) = \delta(x_1)\hat{s}(t_1)$:

$$P_{s,s}(1, 2) = \langle T\{\hat{s}(1), \hat{s}(2)\} \rangle = \delta(x_1)\delta(x_2)\mathcal{S}(t_1 - t_2).$$

Нам будут нужны все РО $P_{\alpha,\beta}(\omega, x_1, x_2)$, где $\alpha, \beta = j, \rho, s$. Они немного отличаются от обычных выражений для матрицы линейных откликов. Держа в голове подход Хаббарда, в котором $e-e$ -взаимодействие сводится к эволюции невзаимодействующих фермионов в медленно меняющемся внешнем поле (с последующим интегрированием по всем его реализациям) [17], видим, что при обычном определении матрицы линейных откликов поляризационные операторы с индексом ρ , входящие и в $e-e$ взаимодействие, и в линейный отклик, будут различаться множителем i . Чтобы сделать вершины одинаковыми, выделим это i и в отклике:

$$j(\omega, x_1) = \int dx_2 \Pi_{j,\rho}(\omega, x_1, x_2)(-iU_{ext}(\omega, x_2)).$$

Это позволяет определить все РО одинаково: $P_{\alpha,\beta}(1, 2) = \langle T\{\hat{\alpha}(1), \hat{\beta}(2)\} \rangle$. (Мы вычисляем фейнмановский отклик, поэтому здесь стоит $\{, \}$ — антикоммутатор.) Из-за законов сохранения различные

компоненты матрицы $P_{\alpha,\beta}$ связаны между собой. Закон сохранения полного электрического заряда говорит, что $\partial_{t_1}\Pi_{j,\beta}(1, 2) = -\partial_{x_1}\Pi_{\rho,\beta}(1, 2)$. Кроме этого, компоненты матрицы $P_{\alpha,\beta}$ связаны между собой еще и тождествами Уорда, следующими из (5). Для их получения домножим уравнение (5) на $\theta(t_1 - t_2)\rho(2)$ справа, потом на $\theta(t_2 - t_1)\rho(2)$ слева, сложим эти выражения и вычислим матричный элемент по основному состоянию. Получившееся выражение отличается на

$$\delta(t_1 - t_2)\langle [j(x_1), \rho(2)]_- \rangle = \frac{i}{\pi}\delta(t_1 - t_2)\partial_{x_1}\delta(x_1 - x_2)$$

от $\partial_{t_1}\Pi_{j,\rho}(1, 2)$. Отметим, что для получения правой части этого уравнения использовано выражение для швингеровской аномалии:

$$[\hat{\rho}_{R,L}(x, t), \hat{\rho}_{R,L}(x', t)]_- = \pm \frac{i}{2\pi}\partial_x\delta(x - x').$$

В итоге мы получили связь

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}\Pi_{j,\rho}(1, 2) + v_c^2\partial_{x_1}\Pi_{\rho,\rho}(1, 2) &= V_{imp}\Pi_{s,\rho}(1, 2) + \\ &+ \frac{i}{\pi}\delta(t_1 - t_2)\partial_{x_1}\delta(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$[\rho(x), \rho(x')]_- = [\rho(x), s(x')]_- = 0,$$

дифференцируем эту связь по времени. В результате имеем

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}^2\Pi_{j,\rho}(1, 2) - v_c^2\partial_{x_1}^2\Pi_{j,\rho}(1, 2) &= V_{imp}\partial_{x_2}\Pi_{s,j}(1, 2) + \\ &+ \frac{i}{\pi}\partial_{t_1}\delta(t_1 - t_2)\partial_{x_1}\delta(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим теперь $P_{s,j}(1, 2)$. Для получения этого поляризационного оператора нам нужен коммутатор

$$\begin{aligned} \langle [j(x_1), s(x_2)]_- \rangle|_{t_1=t_2} &= \\ &= -2i\delta(x_1 - x_2)\langle (\hat{\Psi}_L^\dagger(x_1, t)\hat{\Psi}_R(x_1, t) + \\ &+ \hat{\Psi}_R^\dagger(x_1, t)\hat{\Psi}_L(s_1, t)) \rangle. \end{aligned}$$

Матричный элемент (аномальное среднее), стоящий в правой части, может быть отличным от нуля только в том случае, когда основное состояние вырождено по киральности, т.е. тогда, когда основное состояние есть суперпозиция волновых функций с разной киральностью. Для притягивающихся фермионов такого вырождения не может быть, так как в этом случае критическая температура перехода в сверхпроводящую фазу типа Костерлица–Таулеса

$T_c \sim v_c/L \ll T_d \sim 1/L$ — температура вырождения [18], а для отталкивания аномальное среднее равно нулю при $T \ll T_d \ll T_c$ [19]. Здесь L — это длина канала; в этих неравенствах она считается конечной. Необходимость учета температуры вырождения и возможность существования фаз типа Костерлица–Таулеса в конечной одномерной системе подробно обсуждена во Введении статьи [18].

Действуя как в предыдущем случае, имеем

$$\partial_{t_2}^2 \Pi_{s,j}(1, 2) - v_c^2 \partial_{x_2}^2 \Pi_{s,j}(1, 2) = V_{imp} \partial_{t_2} \Pi_{s,s}(1, 2). \quad (8)$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \Pi_{j,\rho}(\omega, k, q) = & -2\pi\delta(q - k) \frac{i}{\pi} \frac{\omega k}{\omega^2 - v_c^2 k^2} - \\ & - \frac{\omega q V_{imp}^2 \Pi_{s,s}(\omega)}{(\omega^2 - v_c^2 k^2)(\omega^2 - v_c^2 q^2)}. \quad (9) \end{aligned}$$

Первое слагаемое — это баллистический ток (в пределе $\omega \rightarrow 0$ оно дает выражение для кондактанса баллистического канала, равное $e_0^2/2\pi v_c$), а второе — вклад от рассеяния. Однако мы еще не учли вклад от решения однородного уравнения

$$\begin{aligned} \Pi_{j,\rho}^0(\omega, k, q) = \\ = f(k) 2\pi\delta(q - k) [\delta(\omega - v_c k) + \delta(\omega + v_c k)]. \end{aligned}$$

При переходе в статику оно дает точно такой же вклад, как и баллистика, при $f(k) \propto k$. (Постоянную же в случае притяжения и отталкивания можно брать разной.) Это означает, что данный подход реально позволяет вычислить только зависящую от частоты часть коэффициента отражения ($\delta|\mathcal{R}_\omega|^2$). В случае существования ультрафиолетовых расходимостей (неинтегрируемые особенности при $t \rightarrow 0$ в корреляторе $\Pi_{s,s}(t)$) они тоже дадут вклад в $|\mathcal{R}_\omega|^2$ при $\omega = 0$.

Обсудим теперь важный для нашей задачи вопрос о переходе от фейнмановского отклика к запаздывающему. Дело в том, что исходно равновесные диаграмные техники (и фейнмановская, и мацубаровская) вычисляют фейнмановские отклики. А дальше возможны два пути:

- можно довести до конца вычисление фейнмановского отклика, и только в окончательном ответе для $j(\omega, k)$ совершить переход от фейнмановского отклика к запаздывающему,
- а можно делать аналитическое продолжение «символического» выражения для отклика, записанного в терминах функций Грина, до его

настоящего вычисления. В этом случае часто продолжают не окончательное выражение для наблюдаемой величины, а каждый член произведения по отдельности (в нашей задаче часто продолжают статсумму, выражение которой не убывает на больших частотах; см., например, Приложение в [4]).

Когда все функции Грина, входящие в аналитическое выражение для отклика, убывают при $\omega \rightarrow \infty$, оба подхода приводят к одному ответу. Проблема возникает в том случае, когда это условие не выполняется, а продолжают «по обычным правилам» блок, не убывающий (а в нашей задаче даже растущий) на больших частотах. В этом случае эти два способа вычислений приведут к разным ответам. (Поэтому до доказательства того, что запаздывающая функция Грина есть просто аналитическое продолжение фейнмановской в верхнюю полуплоскость, всегда доказывалось убывание фейнмановской функции Грина при $\omega \rightarrow \infty$).

Обсудим последнее утверждение подробнее. В Приложении А показано, что для вычисления эффективного коэффициента отражения, входящего в кандактанс, нужно вычислить коррелятор \mathcal{S} и разделить его на частоту. Если бы фейнмановский коррелятор $\mathcal{S}_F(\omega) - \mathcal{S}_F(\omega = 0)$ убывал в области больших частот, то запаздывающий коррелятор можно было бы получить как аналитическое продолжение фейнмановского с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной переменной ω . (Предполагается, что все особенности в фейнмановском корреляторе сдвинуты с вещественной оси по правилу $\omega \rightarrow \omega + i\delta \text{sgn}(\omega)$, следующему из фейнмановских граничных условий.) И, что самое важное в этой задаче, при вычислении низкочастотного запаздывающего отклика можно было бы использовать длинноволновую асимптотику коррелятора $\mathcal{S}_F(t)$. (В интересующей нас задаче вычисления обычно проводятся в t -представлении и только потом в фурье-представлении.)

Действительно, убывающий по частоте фейнмановский коррелятор всегда можно разделить на две функции, каждая из которых не имеет особенностей во всей верхней (нижней) полуплоскости $\mathcal{S}_F^\pm(\omega)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_F(\omega) = & \mathcal{S}_F^+(\omega) + \mathcal{S}_F^-(\omega) = \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\mathcal{S}_F^+(\omega')}{\omega' - \omega - i\delta} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\mathcal{S}_F^-(\omega')}{\omega' - \omega + i\delta}. \quad (10) \end{aligned}$$

После фурье-преобразования этого выражения по ω получаем

$$\mathcal{S}_F(t) = \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \exp(-i\omega't) \mathcal{S}_F^+(\omega') + \theta(-t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \exp(-i\omega't) \mathcal{S}_F^-(\omega').$$

Отсюда видно, что ветвь, не имеющая особенностей в верхней полуплоскости, действительно определяет запаздывающую функцию Грина $\mathcal{S}_{ret}(t)$, вычисленную «по обычному» рецепту, а поскольку большие частоты не дают вклада в это выражение, то при вычислении низкочастотного запаздывающего отклика можно было бы использовать длинноволновую асимптотику коррелятора в t -представлении. Но так можно действовать только в том случае, когда фейнмановский коррелятор убывает при больших частотах.

Переходим к нашей задаче. Подумаем, что мы знаем о корреляторе $\mathcal{S}_F(\omega)$. Прежде всего, его точное выражение, справедливое для всех частот, обязано оставаться растущим как $|\omega|$ при $|\omega| \rightarrow \infty$. Следовательно, $\mathcal{S}_F(\omega)$ имеет полюс первого порядка в бесконечно удаленной точке ω_∞ (что бы ни происходило в ультрафиолетовой области, физическое требование к способу перенормировки должно содержать условие $\mathcal{S}_F(\omega) \propto |\omega|$ при $|\omega| \rightarrow \infty$). Это следует из того, что при больших частотах эффекты, связанные с e - e -взаимодействием, должны быть подавлены, т.е. коэффициент отражения фермионов от примеси должен стремиться к постоянному значению. (Высокочастотные эффекты в упорядоченной и нормальной фазах всегда совпадают.)

Кроме того, его длинноволновая асимптотика (а только ее мы и можем вычислить) растет еще сильнее: растущей оказывается даже величина $(\mathcal{S}_F(\omega) - \mathcal{S}_F(0))/\omega$. И этот рост продолжается вплоть до частот $\omega \sim M$. При больших частотах аналитические вычисления в нашем случае невозможны, так как требуют знания гамильтониана в ультрафиолетовой области. В этой области частот в выражениях для откликов должен произойти переход от сильного к слабому межэлектронному взаимодействию. Из всего этого следует, что в выражении (10) мы должны интегрировать по замкнутым контурам C_R^\pm , идущим сначала по вещественной оси, а потом замыкающимся в верхнюю (нижнюю) полуплоскость (теорема Коши), таких, чтобы в области, ограниченной этими контурами, у функции $\mathcal{S}_F^+(\omega')$ не было бы особенностей (на

самом деле мы вынуждены ограничить размер контура условием $|\omega|/M \leq 1$). Таким образом, функции $\mathcal{S}_F^+(\omega)$, аналитической во всей верхней полуплоскости, в нашем случае просто нет. Есть лишь функции, аналитические внутри C_R^\pm :

$$\mathcal{S}_F(\omega) = \int_{C_R^+} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\mathcal{S}_F^+(\omega')}{\omega' - \omega - i\delta} - \int_{C_R^-} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\mathcal{S}_F^-(\omega')}{\omega' - \omega + i\delta}, \tag{11}$$

после фурье-преобразования этого выражения получаем

$$\mathcal{S}_F(t) = \theta(t) \int_{C_R^+} \frac{d\omega'}{2\pi} \exp(-i\omega't) \mathcal{S}_F^+(\omega') + \theta(-t) \int_{C_R^-} \frac{d\omega'}{2\pi} \exp(-i\omega't) \mathcal{S}_F^-(\omega').$$

Из-за того, что $\mathcal{S}_F^+(\omega')$ растет в области больших частот, интеграл по отрезку контура R^+ не мал, и его вкладом в запаздывающую функцию Грина нельзя пренебречь (а само существование такого вклада всегда означает существование особенности в $\mathcal{S}_F^+(\omega)$ при больших частотах в верхней полуплоскости). Таким образом, для продолжения этой функции Грина в область, ограниченную контуром C_R^+ , надо знать поведение коррелятора $\mathcal{S}_F^+(\omega)$ в ультрафиолетовой области, что в принципе невозможно. Поэтому в нашей задаче надо продолжать окончательное выражение для фейнмановского отклика, следующее из выражения (9), и сформулировать теорию так, чтобы в отклик давала бы вклад только область малых частот.

Отсюда следует и то, что при переходе от мацубаровского отклика (в τ -представлении) к запаздывающему нельзя ограничиться заменой $\tau \rightarrow i(t \pm i\delta)$ в выражении для статсуммы, вычисленной при больших τ , если она имеет неинтегрируемую особенность при $t \rightarrow 0$. Такой способ вычислений тоже игнорирует вклад от особенности в ультрафиолетовой области [4].

Вклад рассеяния в фейнмановский отклик принципиально отличается от выражения для $\mathcal{S}_F(\omega)$, так как он сильнее убывает по $|\omega|$:

$$\delta j_F(\omega, k) = \frac{\omega V_{imp}^2 \mathcal{S}_F(\omega)}{v^2 k^2 - \omega^2 - i\delta} \int (dq) \frac{E_{ext}(q, \omega)}{v^2 q^2 - \omega^2 - i\delta}, \tag{12}$$

поэтому вопрос об интеграле по контуру R^+ в $\delta j_F(\omega, k)$ просто не стоит. Это выражение точное и, на самом деле, справедливое не только в слу-

чае КФ-гамильтониана, но оно содержит неизвестную функцию $\mathcal{S}_F(\omega)$, которую надо вычислить (как и все это выражение) по фейнмановским правилам и связать с наблюдаемой величиной. Функция $\mathcal{S}_F(\omega)$, в отличие от полюсных слагаемых, медленно зависит от частоты, так как это петлевая диграмма и все особенности входящих в нее свободных пропагаторов «замываются» интегрированием. После аналитического продолжения выражения (12) с вещественной оси в верхнюю полуплоскость (см. Приложение А) в выражении для запаздывающего отклика (δj_{ret}) можно переходить к пределу $\omega \rightarrow 0$. Если нас интересует отклик на медленно меняющееся поле, то необходимо учесть, что $\mathcal{S}_F(\omega) - \mathcal{S}_F(0) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$. Компенсировать это убывание можно за счет полюсного вклада подынтегрального выражения. Поэтому наиболее медленно убывающая асимптотика кондактанса определяется δ -функционным вкладом в (12). В итоге для вычисления кондактанса нам оказывается достаточно знать асимптотику $\mathcal{S}_F(\omega)$ при малых частотах, но вычислена она должна быть по фейнмановским правилам при вещественных частотах.

Связать $\mathcal{S}(\omega)$ с перенормированным за счет взаимодействия коэффициентом отражения фермионов от примеси можно, рассмотрев невзаимодействующую теорию. В этом пределе прямое вычисление отклика и сравнение его с (12) дает $\mathcal{S}_F(\omega)/|\omega| \propto -|R_0|^2$. Естественно ожидать, что и в случае взаимодействующих носителей это отношение можно связать с $|\mathcal{R}_\omega|^2$. Это подтверждается выражением для кондактанса, следующим из (12) (Приложение А). В нем показано, что в кондактанс входит величина

$$|\mathcal{R}_\omega|^2 = -\frac{\pi}{2v_c|\omega|} V_{imp}^2 \operatorname{Re} \mathcal{S}(|\omega|). \quad (13)$$

Она аналитична в верхней полуплоскости в области C_R^+ , определяемой условием $|\omega|/M \ll 1$, если под $|\omega|$ понимать $+\sqrt{(\omega + i\delta)^2}$, а кондактанс выражается через нее по обычной формуле:

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi v_c} (1 - |\mathcal{R}_\omega|^2). \quad (14)$$

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ $v_c = 1/2$

3.1. Переход к квазичастичному представлению

Хорошо известно, что в одномерном случае пакеты, состоящие из фермионов с линейным спектром, не расплываются. Это означает, что состояние

с одной и той же энергией может быть представлено в виде большого числа различных пакетов, состоящих из разного числа частиц. Единственно, что может различать такие пакеты, — это коммутационные свойства. Волновые функции пакетов, состоящие из четного числа фермионов, коммутируют, а из нечетного — антикоммутируют. Это означает, что любое состояние может быть описано как в фермионном, так и в бозонном представлении, причем многими способами. (В таких случаях принято говорить о вырождении состояний.) В частности, любой фермион, двигающийся вправо/влево (\pm), может быть представлен как пакет бозонов $\hat{O}(x)_\pm$:

$$\hat{\Psi}_\pm^\dagger(x) = \exp\left(\hat{A}_\pm^\dagger(x)\right) \frac{\hat{\sigma}_\pm^\dagger}{\sqrt{L}} \exp\left(-\hat{A}_\pm(x)\right), \quad (15)$$

$$\hat{A}_\pm^\dagger(x) = \frac{1}{L} \sum_{n>0} e^{\mp i p_n x} \sqrt{\frac{2\pi}{p_n}} \hat{O}_\pm^\dagger(x)(p).$$

Здесь $p_n = 2\pi n/L$, а $\hat{\sigma}_\pm$ — аналог лестничных операторов Халдейна [20], определяемых условиями $\hat{\sigma}_\pm^\dagger \hat{\sigma}_\pm = 1$, $\{\hat{\sigma}_\pm, \hat{\sigma}_\mp\} = 0$ и коммутирующих со всеми бозонами. Это соотношение представляет из себя просто алгебраическое тождество. Для его доказательства достаточно заметить, что так определенные поля $\hat{\Psi}_\pm^\dagger(x)$ и $\hat{\Psi}_\pm(y)$ обычным образом антикоммутируют при $|x - y|/L \ll 1$. (Антикоммутация обеспечивается операторами σ со специально подобранными коммутационными свойствами; важен также и численный коэффициент $\sqrt{2\pi/p_n}$ в показателе экспоненты.) Отметим, что вырождение состояний не снимается точечным e - e -взаимодействием, так как спектр взаимодействующих фермионов в этом случае остается линейным.

Для того чтобы представить в бозонном представлении фермионы R и L , в выражение (15) вместо $\hat{O}_\pm^\dagger(x)$ нужно подставить операторы

$$\hat{C}_{R,L}(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \int dx e^{\mp i p x} \hat{q}_{R,L}(x), \quad p > 0. \quad (16)$$

В нашей задаче удобно использовать другое представление — представление нормальных возбуждений латтинжеровской жидкости ($\hat{\chi}_\pm(x)$) [21]. Это представление сводит гамильтониан с e - e -взаимодействием без примеси к свободному. Можно показать, что основное состояние латтинжеровской жидкости без примеси является «вакуумным состоянием» полей $\hat{\chi}_\pm(x)$. Из-за поляризации основного состояния их заряд (e^*) отличен от заряда e_0 и равен $1/\sqrt{v_c}$. Таким образом, кондактанс канала без примеси может быть вычислен по обычной формуле, справедливой для невзаимодействующих

фермионов: $e^{*2}/2\pi$. Поля χ представляют собой не что иное, как правый/левый фермион, двигающийся вместе с поляризационным облаком, возникающим в основном состоянии. Поэтому он не квантуется в единицах заряда свободного фермиона.

Для перехода к представлению нормальных возбуждений в работе [21] в выражении (15) вместо поля $\hat{O}(x)_{\pm}$ использовались поля $\hat{C}(\pm p)$, диагонализующие гамильтониан с точечным e - e -взаимодействием

$$\begin{aligned} H_{ee} &= \frac{v_c}{L} \sum_{n>0} p_n (\hat{C}_p^\dagger \hat{C}_p + \hat{C}_{-p}^\dagger \hat{C}_{-p}) = \\ &= \frac{v_c}{L} \sum_{i=1,2; n>0} p_n \hat{B}_i^\dagger(p) \hat{B}_i(p), \\ \hat{B}_{1,2}(p) &= \frac{\hat{C}(p) \pm \hat{C}(-p)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$C(p)|\rangle = 0$, и выражающиеся через бозоны (16) с помощью преобразования

$$\begin{aligned} \hat{C}(p) &= \text{ch} \theta \hat{C}_R(p) + \text{sh} \theta \hat{C}_L^\dagger(p), \\ \hat{C}^\dagger(-p) &= \text{ch} \theta \hat{C}_L^\dagger(p) + \text{sh} \theta \hat{C}_R(p) \end{aligned} \quad (17)$$

(«угол поворота» θ определяется равенством $\text{sh}(2\theta) = V_0/2\pi v_c$). В задаче с точечной примесью нам будет удобно ввести операторы квазичастичных возбуждений $\hat{\chi}_{1,2}$ немного по-другому: с помощью бозонов $\hat{B}_{1,2}(p)$. В этом случае гамильтониан e - e -взаимодействия без примеси тоже сводится к свободному:

$$H_{ee} = v_c \int dx \left(\hat{\chi}_1^\dagger(x) (-i\partial_x) \hat{\chi}_1(x) + \hat{\chi}_2^\dagger(x) (i\partial_x) \hat{\chi}_2(x) \right). \quad (18)$$

Для того чтобы выразить примесную часть гамильтониана через поля $\hat{\chi}_{1,2}$, нужно переписать показатель экспоненты произведения $\Psi_R(0) \Psi_L^\dagger(0)$ с помощью формул (15), (17) через бозоны $\hat{C}(\pm p)$:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_R^\dagger(0) \hat{\Psi}_L(0) &= \frac{\Delta^{1-1/v_c}}{L} \exp(\hat{A}^\dagger) \frac{\sigma_R^\dagger \sigma_L}{L} \exp(-\hat{A}), \\ \hat{A}^\dagger &= \frac{1}{L} \sum_{n>0} \sqrt{\frac{2\pi}{p_n}} \frac{1}{v_c} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{C}^\dagger(p_n) - \hat{C}^\dagger(-p_n)), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Delta = M_b L e^{\gamma_E} / 2\pi$ (ультрафиолетовое обрезание $1/M_b$ возникло из-за того, что на масштабе порядка размера примеси e - e -взаимодействие трехмерно, что делает одномерную формулу (19), полученную с помощью выражения (15) и содержащую произведение двух фермиевских операторов в одной точке, неприменимой в ультрафиолетовой области). Выражение (19) показывает, что в точках $2/v_c = m_1^2$ (m_1

— целое число) гамильтониан Кейна–Фишера сводится к задаче о рождении/уничтожении m_1 фермионных квазичастиц в точке $x = 0$. (Показатель экспоненты в этом случае совпадает с показателем произведения $\chi_2^{m_1}$.) Это был бы нуль из-за принципа Паули, но при написании произведения $\chi_2^{m_1}$ надо учесть правильный порядок экспонент с \hat{A}^\dagger и \hat{A} , взятых в одной точке (а этот множитель расходится, если координаты фермионов совпадают.) Таким образом, во всех случаях, кроме $v_c = 2$, мы будем иметь неопределенность типа $0 \cdot \infty$. При $m_1 = 2$ ($v_c = 1/2$) в гамильтониане возникает слагаемое, описывающее рождение/уничтожение двух квазичастиц в одной точке. Эта неопределенность раскрывается с помощью разложения $\hat{\chi}_2(x)$ в ряд Тейлора с симметричной раздвижкой аргументов сомножителей. Кроме того, из (19) мы видим, что возбуждения $\hat{\chi}_1$ (пакет, определяющийся полем B_1) не рассеиваются на точечной примеси, и вся примесная часть гамильтониана при $v_c = 1/2$ равна [13]

$$\mathcal{H}_{imp} = i\gamma (\hat{\chi}_2^\dagger(0) \partial_x \hat{\chi}_2^\dagger(0) - \partial_x \hat{\chi}_2(0) \hat{\chi}_2(0)), \quad (20)$$

где $\gamma = 2V_{imp} \exp(-\gamma_E) / M_b$ — константа взаимодействия, имеющая размерность длины, а под сокращенной записью $\partial_x \chi_2(0)$ надо понимать предел $\partial_x \chi_2(x)|_{x \rightarrow 0}$. После перехода к майорановскому представлению

$$\hat{\chi}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{B}(x) + i\hat{\Phi}(x)), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{B}(x), \hat{B}(x')\} &= \{\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(x')\} = \delta(x - x'), \\ \{\hat{\Phi}(x), \hat{B}(x')\} &= 0, \end{aligned}$$

этот гамильтониан диагонализуется с помощью унитарного поворота, так как сводится к квадратичной форме двух не взаимодействующих друг с другом вещественных полей:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{tot} &= \frac{v_c}{2L} \sum_n [\beta(-p_n) p_n \beta(p_n) + \Phi(-p_n) p_n \Phi(p_n)] + \\ &+ \gamma \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} \Phi(p_m) \frac{1}{L} \sum_n p_n \Phi(p_n) - \\ &- \gamma \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} \beta(p_m) \frac{1}{L} \sum_{n \neq 0} p_n \beta(p_n). \end{aligned} \quad (22)$$

Важное для дальнейшего условие $m \neq 0$ следует из того, что это состояние изначально отсутствовало в формулах бозонизации.

Нам осталось выразить оператор \hat{s} при $v_c = 1/2$ через майорановские поля $\beta; \Phi$. Мы определяли

$\hat{s}(x, t)$ как киральный поток, входящий в уравнение неразрывности для кирального заряда (см. уравнение (5)). Он отличается от выражения, стоящего в гамильтониане, относительным знаком первого и второго слагаемых (физический смысл оператора $\hat{s}(x, t)$ — оператор кирального заряда, уходящего в конденсат). В итоге, повторяя все предыдущие вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \hat{s}(0) &= 2\gamma_s \left(\hat{\chi}_2^\dagger(0) \partial_x \hat{\chi}_2^\dagger(0) + \partial_x \hat{\chi}_2(0) \hat{\chi}_2(0) \right) = \\ &= 2\gamma_s (\Phi(0) \partial_x \beta(0) + \beta(0) \partial_x \Phi(0)), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\gamma = 2V_{imp}\gamma_s$.

3.2. Диагонализация гамильтониана

Поля, в терминах которых гамильтониан (22) диагонален ($\lambda; \beta$), в гайзенберговском представлении имеют вид

$$\hat{\lambda}(\epsilon_n, t) = \hat{\lambda}(\epsilon_n) \exp\{i(\epsilon_n t)\},$$

где ϵ_n — спектр свободных майоранов. Они получаются из «неповернутых» полей ($\Phi(m), \beta(n)$) преобразованием

$$\hat{\lambda}(\epsilon_n) = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \hat{\Phi}(m). \quad (24)$$

Далее обозначение ϵ_n будет показывать, что индекс n относится к «повернутым» полям, а p_m — к «неповернутым». Все суммирования ограничены сверху числом уровней N_1 : $|m| < N_1 = 2\pi LW/v_c$, где W — ширина зоны проводимости. Кроме того, необходимо учесть вещественность майорановских полей. Это означает, что в импульсном представлении при нормировке на длину канала их антикоммутатор равен

$$\{\hat{\lambda}(\epsilon_n), \hat{\lambda}(\epsilon_m)\} = L\delta_{n,-m}. \quad (25)$$

В Приложении В показано, что матрица поворота удовлетворяет «уравнению Шредингера»,

$$\begin{aligned} (\epsilon_n - v_c k_m) S(\epsilon_n, k_m) &= \gamma k_m \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) + \\ &+ \gamma \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} p_{m_1} S(\epsilon_n, p_{m_1}), \end{aligned} \quad (26)$$

а обратная матрица получается из нее одновременной сменой знаков индексов:

$$S^{-1}(\epsilon_n, p_n) = S(\epsilon_{-n}, p_{-n}). \quad (27)$$

Переходим к решению уравнения (26). Переписываем это уравнение отдельно для четной и нечетной по k_m частям функции $S(\epsilon_n, k_m)$. Для этого введем

$$S(\epsilon_n, k_m) = \frac{\mathcal{Z}(\epsilon_n) + k_m Y(\epsilon_n)}{(\epsilon_n - v_c k_m)}. \quad (28)$$

Отбирая четную и нечетную по k_m части функции в левой стороне равенства, имеем вместо исходного уравнения систему

$$\mathcal{Z}(\epsilon_n) = \frac{\gamma}{v_c L} \sum_{m \neq 0; |m| < N_1} \frac{m[\mathcal{Z}(\epsilon_n) + (2\pi m/L)Y(\epsilon_n)]}{y_n - m}, \quad (29)$$

$$Y(\epsilon_n) = \frac{\gamma}{v_c L} \sum_{m \neq 0; |m| < N_1} \frac{\mathcal{Z}(\epsilon_n) + (2\pi m/L)Y(\epsilon_n)}{y_n - m}, \quad (30)$$

где $y_n = \epsilon_n L / 2\pi v_c$ — безразмерная энергия. Из этого выражения видно, что коэффициенты при неизвестных функциях $\mathcal{Z}(\epsilon_n)$ и $Y(\epsilon_n)$ расходятся в термодинамическом пределе $N_1 \rightarrow \infty$. Наиболее сильная расходимость — линейная. Поэтому суммы должны вычисляться в конечных пределах $|m| \leq N_1$. Решение этой системы зависит от одного параметра b . (И способа регуляризации, который должен быть единым в ходе вычислений. Мы при выводе гамильтониана уже использовали симметричную раздвижку аргументов, поэтому пределы суммирования тоже выбраны симметричными.) Параметр

$$b = \frac{Lv_c}{\gamma N_1} \sim \frac{\mathcal{M}_b v_c^2}{WV_{imp}}$$

не зависит от длины канала. В случае точечной примеси $\mathcal{M}_b \sim 1/p_F$, т.е. $\mathcal{M}_b \sim W$.

В Приложении В.1 показано, что точное условие существования решения этой системы, определяющее спектр квазичастиц, есть

$$B(y_n) = \frac{b^2 N_1}{2(b+1)}; \quad (31)$$

при $n, N_1 \gg 1$ оно переходит в более простое выражение

$$y_n = n \left(1 + \frac{1}{\pi n} \arcsin \frac{\pi n}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + \pi^2 n^2}} \right) \sim n + n/\mathcal{P} \quad (32)$$

(в этом выражении \arcsin определен на интервале $(-\pi, \pi)$, а $\mathcal{P} \sim N_1$; точное выражение для \mathcal{P} — в Приложении В.1, формула (60)). В итоге вся матрица поворота может быть представлена в виде

$$S(\epsilon_n, k_m) = \frac{Lz_0}{[\tilde{N}_1^2 + y_n^2]^{1/2}} \frac{y_n}{y_n - m} \left[1 + \frac{b+2}{b} \frac{m}{y_n} \right], \quad (33)$$

где

$$z_0 = b/2\pi(b + 1),$$

$$\tilde{N}_1 = N_1(b + 2)^2/2\pi(b + 1).$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

4.1. Одночастичные функции Грина

Для вычисления коэффициента отражения фермионов от примеси нам будет нужна одночастичная фейнмановская функция Грина полей Φ ($G(\Phi|t) = \langle \Phi(t, x = 0)\Phi(0, 0) \rangle$) и функции Грина, в которых одно (или два) поля заменены на их производную, вычисленную в точке $x = 0$. Они могут быть вычислены, так как для полей, диагонализующих гамильтониан, переход от шредингеровского представления к гайзенберговскому сводится к умножению на $\exp(i\epsilon_n t)$. (Эти поля возникли из L-фермионов, в которых импульс n отсчитывается в обратную сторону, таким образом, чтобы увеличение $|n|$ увеличивало энергию ϵ_n .) Поэтому

$$\Phi(x = 0, t) = \frac{1}{L^2} \sum_{-N_1; m, n \neq 0}^{N_1} S(\epsilon_{-n}, p_{-m}) \exp(i\epsilon_n t) \lambda_n \tag{34}$$

и вся функция Грина полей Φ может быть представлена в виде

$$G(\Phi|t, 0) = \frac{1}{L^2} \sum_{-N_1; n, n' \neq 0}^{N_1} G_0(\lambda|n, t; n', 0) \times$$

$$\times \frac{1}{L^2} \sum_{-N_1; m, m' \neq 0}^{N_1} S(\epsilon_{-n}, p_{-m}) S(\epsilon_{-n'}, p_{-m'}),$$

где $G_0(\lambda|n, t; n', 0)$ — свободная функция Грина левого майорана λ , равная

$$G_0(\lambda|n, t; n', 0) =$$

$$= L \delta_{n, -n'} \exp\{i\epsilon_n t\} [\theta(t)\theta(-n) - \theta(-t)\theta(n)].$$

По индексам m и m' , стоящим в последней сумме, можно провести суммирование (см. выражение (33)); коэффициенты $\mathcal{A}(n)$ и $B(n)$, возникшие в результате этого суммирования, введены в Приложении В.1. Используя точное условие существования решения (31) и соотношение между этими коэффициентами ($B(y, N_1) = y\mathcal{A}(y, N_1) - 2N_1$), видим, что вся функция Грина оказывается пропорциональной

$$\sum_{-N_1; m \neq 0}^{N_1} \frac{y_n + ((b + 2)/b)m}{y_n - m} = N_1(b + 2). \tag{35}$$

После этого получаем окончательное выражение для функции Грина

$$G(\Phi|t, 0) =$$

$$= \Phi_0^2 \frac{1}{L} \sum_{-N_1; n \neq 0}^{N_1} \frac{\exp(i\epsilon_n t)}{1 + (n/\tilde{N}_1)^2} [\theta(t)\theta(-n) - \theta(-t)\theta(n)], \tag{36}$$

где $\Phi_0 = b/(b + 2)$.

Кроме этой функции Грина нам будут нужны функции Грина с производными полей, вычисленными в точке $x = 0$. Теперь для суммирования по немому индексу m (импульсу поля $\Phi(p_m, t)$) нам будет нужна сумма

$$\sum_{-N_1; m \neq 0}^{N_1} m \frac{y_n + ((b + 2)/b)m}{y_n - m} =$$

$$= y_n B(y_n) + \frac{b + 2}{b} C(y_n) = N_1 y_n b$$

(мы опять воспользовались выражением для точного спектра (31) и соотношением $C(y_n) = y_n B(y_n)$). В итоге

$$G_1(\Phi|t, 0) = \langle \partial\Phi(t, x = 0)\Phi(t, x = 0) \rangle =$$

$$= -i\Phi_0^3 \frac{2\pi}{L^2} \sum_{-N_1; n \neq 0}^{N_1} \frac{n \exp(i\epsilon_n t)}{1 + (n/\tilde{N}_1)^2} \times$$

$$\times [\theta(t)\theta(-n) - \theta(-t)\theta(n)]. \tag{37}$$

Выражение $\langle \Phi(t, x = 0)\partial\Phi(t, x = 0) \rangle$ отличается от $\langle \partial\Phi(t, x = 0)\Phi(t, x = 0) \rangle$ знаком, так как дифференцирование по координате приведет в этом случае к появлению множителя $n' = -n$.

Точно так же функция Грина с двумя производными равна

$$G_2(\Phi|t, 0) = \langle \partial\Phi(t, x = 0)\partial\Phi(t, x = 0) \rangle =$$

$$= -\Phi_0^4 \frac{(2\pi)^2}{L^3} \sum_{-N_1; n \neq 0}^{N_1} \frac{-n^2 \exp(i\epsilon_n t)}{1 + (n/\tilde{N}_1)^2} \times$$

$$\times [\theta(t)\theta(-n) - \theta(-t)\theta(n)]. \tag{38}$$

Таким образом, квантовые числа «неповернутых» полей оказались полностью изгнанными из выражений для одночастичных функций Грина.

Обратим внимание на появление лишних степеней Φ_0 , отличающих функции Грина полей Φ от ответов для плоской волны: в случае точечной примеси функции Грина с производными определяются

только соответствующим членом тейлоровского разложения поля $\Phi(x, t)$ в точке $x = 0$. Это существенно упрощает задачу, позволяя воспользоваться соотношением (31), и является следствием δ -функциональности примесного рассеяния.

4.2. Схема перенормировки и регуляризация

Для того чтобы вычислить перенормированный взаимодействием коэффициент отражения, нам надо вычислить коррелятор $\mathcal{S}(t)$:

$$\mathcal{S}(t) = \langle T \{ \hat{s}(t), \hat{s}(0) \} \rangle .$$

Согласно формуле (23) каждая вершина $\hat{s}(t)$ записывается в виде

$$\hat{s}(t) = 2\gamma_s (\Phi(t)\partial_x\beta(t) + \beta(t)\partial_x\Phi(t)) .$$

Таким образом, коррелятор $\mathcal{S}(t)$ содержит четыре графика. Каждая из этих четырех функций Грина — это петлевая диаграмма, изображенная на рис. 1. По теореме Вика коррелятор равен

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) = & -(2\gamma_s)^2 \left(\langle \Phi(t, 0)\Phi(0, 0) \rangle \langle \partial_x\beta(t, 0)\partial_x\beta(0, 0) \rangle + \right. \\ & + \langle \beta(t, 0)\beta(0, 0) \rangle \langle \partial_x\Phi(t, 0)\partial_x\Phi(0, 0) \rangle - \\ & - \langle \beta(t, 0)\partial_x\beta(0, 0) \rangle \langle \partial_x\Phi(t, 0)\Phi(0, 0) \rangle - \\ & \left. - \langle \Phi(t, 0)\partial_x\Phi(0, 0) \rangle \langle \partial_x\beta(t, 0)\beta(0, 0) \rangle \right) . \end{aligned} \quad (39)$$

В n -представлении первый график содержит множитель $(n_1 n'_1)\Phi_0^2(-b) \rightarrow (-n_1 n_1)\Phi_0^2(-b)$, второй — множитель $(nn')\Phi_0^2(b) \rightarrow (-nn)\Phi_0^2(b)$, а два последних дают $-2nn_1\Phi_0(b)\Phi_0(-b)$. Таким образом, вся диаграмма приобретает множитель $-\Phi_0^2(b)\Phi_0^2(-b)(n\Phi_0(b) - n_1\Phi_0(-b))^2$. Здесь n — импульс функции Грина $G(\Phi|n, n'; t)$, а n_1 — импульс второй функции Грина $G(\beta|n_1, n'_1; t)$, получающейся из $G(\Phi|n, n'; t)$ заменой $V_{imp} \rightarrow -V_{imp}$. (Нештрихованные индексы относятся к левой вершине диаграммы, а штрихованные — к правой.) Другим множителем в сумме всех диаграмм будет петля из двух свободных функций Грина, в каждой вершине которой происходит рождение (уничтожение) двух

фермионов. (Это видно уже из исходного гамильтониана в терминах полей χ ; там стоят два оператора χ_2 , а не $\chi_2^\dagger\chi_2$.)

Теперь в выражениях для каждой из функций Грина, входящих в петлевую диаграмму, при $n \gg 1$ уже можно перейти от дискретных n к непрерывной переменной k обычным способом, считая, что $tv_c/L \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{-N_1}^{N_1} \exp\{i2\pi n v_c t/L\} f(n) & \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{-N_1}^{N_1} (dn) \exp\{i2\pi n v_c t/L\} f(n), \end{aligned}$$

а далее в нашей задаче необходим переход к термодинамическому пределу $N_1 \rightarrow \infty$ при конечном $k = 2\pi n/L$. Подставив в полученное выражение функции Грина из предыдущего раздела, легко убедиться, что это приводит нас к выражению для \mathcal{S} , расходящемуся в области больших импульсов.

Для того чтобы придать этому выражению математически осмысленный вид, его надо регуляризовать, введя функцию \mathcal{F}_{PV} , обеспечивающую сходимость всего выражения. Нам будет удобно использовать регуляризацию Паули–Вилларса, в которой вклад от ультрафиолетовой области (большие k) регуляризуется массой M_{PV} . Обычно в таких задачах требуется обеспечить сходимость подынтегральных выражений по всем независимым переменным. В нашем случае это были бы шесть импульсов. (Четыре импульса «неповернутых» полей и два сохраняющихся импульса «повернутых» полей.) Функция \mathcal{F}_{PV} должна выходить на 1 при $kv_c \ll M_{PV} \ll M_b$ и быстро убывать в области больших k , обеспечивая сходимость всех интегрирований. (В дальнейшей теории должна быть сформулирована так, чтобы в окончательных выражениях оказалось возможным совершить предельный переход $M_{PV} \rightarrow \infty$, и это условие очень важно для перенормировки.) Тогда петлевые диаграммы до суммирования по индексам «неповернутых» полей m, m_1 (см. предыдущий раздел) записывались бы в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n, \dots, n_1, \dots} \tilde{G}(\Phi|t, 0; n, m, m') \tilde{G}_2(\beta|t, 0; n_1, m_1, m'_1) \times \\ \times \mathcal{F}_{PV}(n, m, m'; n_1, m_1, m'_1). \end{aligned}$$

Получившиеся в результате суммирования по индексам «неповернутых» полей функции Грина в этом случае отличались бы от функций Грина (36)–(38) из-за зависимости \mathcal{F}_{PV} от индексов «неповерну-

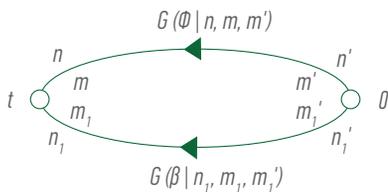


Рис. 1.

тых» полей. Однако оказывается, что в нашем случае достаточно регуляризовать петлевые диаграммы только по индексам «повернутых» полей. Чтобы убедиться в этом, вернемся к правилу сумм (35) и оставим из всего ряда $\mathcal{A}(y_n)$ только одно слагаемое с $m = n$ (в котором импульсы «повернутого» и «неповернутого» полей равны). Согласно уравнению (32) в термодинамическом пределе это соответствует замене $y_n \mathcal{A}(y_n) \rightarrow \mathcal{P}$. Учитывая условие существования решения для матрицы поворота (31) и выражение для \mathcal{P} (см. Приложение В.1), снова получаем правую часть выражения (35):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1} \sum_{-N_1; m \neq 0}^{N_1} \frac{y_n + ((b+2)/b)m}{y_n - m} &= \\ &= \frac{1}{N_1} \left(y_n \mathcal{A}(y_n) + \frac{(b+2)}{b} B(y_n) \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{N_1} \mathcal{P} + \frac{b(b+2)}{2(b+1)} = b + 2. \end{aligned}$$

(В предыдущем разделе вычисления были сделаны так, чтобы была возможность учесть все члены ряда.) Таким образом, в термодинамическом пределе в петлевой диаграмме из всего ряда на самом деле выживает только одно слагаемое с $m = n$. Отсюда следует, что, обеспечив сходимость выражения по импульсу k_n , мы автоматически приходим к сходящемуся ответу и по импульсу «неповернутого» поля p_m . Точно так же обстоит дело и со всеми другими суммами, входящими в функции Грина, вычисленными в разд. 4.1. Таким образом, функция \mathcal{F}_{PV} в нашем случае зависит только от двух переменных k_n, k_{n_1} , и мы можем использовать для дальнейших вычислений формулы (36)–(38) для функций Грина. С формальной точки зрения условие существования решения (31) в нашей задаче играет роль дополнительного условия, которое необходимо учитывать при регуляризации расходящегося ответа. Оно говорит, что расходящаяся в термодинамическом пределе сумма $B(y_n)$, получившаяся в результате суммирования по индексам «неповернутых» полей, на самом деле не имеет права зависеть от y_n при любых n . При нарушении этого условия уравнение для матрицы поворота не имеет решения.

Регуляризация типа Паули–Вилларса сводится к тому, что мы дописываем в подынтегральное выражение для петлевой диаграммы (39) по множителю

$$\mathcal{F}(k, M_{PV}) = \left[\frac{M_{PV}^2}{(v_c k)^2 + M_{PV}^2} \right]^n$$

на каждую функцию Грина, а степень n подбираем так, чтобы обеспечить сходимость интегралов. По-

скольку в ответ входят функции Грина с двумя производными, для обеспечения сходимости интегралов надо взять $n = 2$.

В Приложении С (уравнение (66)) показано, что регуляризованное выражение для коррелятора $\mathcal{S}(\omega)$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= -(2\gamma_s)^2 \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) \int_0^\infty dt \cos(\omega t) \times \\ &\times \int_0^\infty (dk dk_1) \exp(itv_c(k + k_1)) \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} (\Phi_0^2(b) + \Phi_0^2(-b)) (k + k_1)^2 - \right. \\ &\left. - k k_1 (\Phi_0(b) + \Phi_0(-b))^2 \right] \mathcal{F}(k, M_{PV}) \mathcal{F}(k_1, M_{PV}). \end{aligned} \tag{40}$$

Однако ответ, полученный в результате вычислений входящих в это выражение интегралов, не может рассматриваться как окончательный. Дело в том, что в отсутствие регуляризации он расходится, а это значит, что ответ для выражения (40) определяется видом функции $\mathcal{F}(M_{PV})$ (насколько быстро она обрезает расходящийся вклад от ультрафиолетовой области). Между тем этот коррелятор напрямую определяет наблюдаемую величину. Поэтому его зависимость от способа вычислений недопустима. Регуляризация — это не способ вычисления окончательного ответа, а просто вспомогательная процедура, необходимая для того, чтобы придать выражению осмысленный с математической точки зрения вид. Другое дело — процедура перенормировки, используемая для того, чтобы наблюдаемая величина не зависела бы от способа вычислений. (По сути, изложенная ниже процедура повторяет первый шаг построения теории ренормгруппы по Гелл-Ману–Лоу. Она имеет весьма общий характер и почти полностью переносится на другие задачи, в которых точные аналитические ответы расходятся в ультрафиолетовой области.) Схема перенормировки по Гелл-Ману–Лоу подразумевает не только вычисление этого выражения как функции M_{PV} . После этого нужно, считая M_{PV} сколь угодно большим, выделить в этом выражении главный (расходящийся в пределе $M_{PV} \rightarrow \infty$) множитель. Далее надо ввести перенормированную (за счет взаимодействия в ультрафиолетовой области) амплитуду рассеяния ($\gamma_{(ren)}$), зависящую от M_{PV} таким образом, чтобы сократить весь расходящийся в пределе $M_{PV} \rightarrow \infty$ множитель, возникающий при вычислении диаграммы. ($\gamma_{(ren)}$ не подлежит вычислению в

рамках данного подхода.) Подчеркнем, что только предел $M_{PV} \rightarrow \infty$ приводит (и то только в случае перенормируемых теорий) к независимости наблюдаемых величин от способа регуляризации расходящихся выражений.

Для того чтобы доказать возможность введения амплитуды $\gamma_{(ren)}$, необходимо ввести в гамильтониан специально подобранный контрчлен. Он должен зависеть от двух масштабов M_{PV} и M_{ren} — произвольная точка перенормировки. (Единственное ограничение на величину M_{ren} пока состоит в том, что мы считаем ее принадлежащей области, описываемой перенормированным одномерным КФ-гамильтонианом, т.е. $M_b \gg M_{PV} \gg M_{ren}$.) После этого надо повторить все изложенные выше вычисления наблюдаемой величины. Если контрчлен подобран правильно, то в итоге мы и должны получить ответ, в котором ультрафиолетовые расходимости сократятся за счет зависимости $\gamma_{(ren)}$ от M_{PV} . Такая процедура означает, что все расходимости будут «спрятаны» в $\gamma_{(ren)}$. Основная идея подобных процедур состоит в том, что мы изменяем неправильный в ультрафиолетовой области КФ-гамильтониан таким образом, чтобы наблюдаемые величины, вычисленные с помощью ренормированного КФ-гамильтониана, совпадали бы в длинноволновой области с ответами, вычисленными с помощью неизвестного нам точного гамильтониана, в котором ультрафиолетовые расходимости отсутствуют. В том случае, когда речь идет о точном решении, под M_{ren} нужно понимать точку, в которой ответ известен. В нашей задаче нужно потребовать, чтобы $|\mathcal{R}_\omega|^2(\omega/M_{ren} = 1) = |R_0|^2$ (высокочастотные отклики в фазе с нарушенной симметрией и в нормальной фазе всегда совпадают). Это — граничное условие, фиксирующее поведение теории в ультрафиолетовой области. При переходе к другой регуляризации изменится множитель, зависящий от способа регуляризации. Как следствие этого, другим будет контрчлен и неинформативная связь между перенормированной и затравочной амплитудами рассеяния. Однако зависимость наблюдаемых величин от физической амплитуды рассеяния в перенормируемых теориях останется той же, т.е. наблюдаемая величина $|\mathcal{R}_\omega|^2$ не будет зависеть от способа вычислений. (Подчеркнем, что доказательство перенормируемости теории тоже основывается на схеме перенормировки по Гелл-Ману–Лоу или эквивалентной ей схеме Вильсона. Кроме того, в процессе вычислений необходимо придерживаться единой схемы перенормировки для всех выражений.)

Таким образом, требование независимости наблюдаемых величин от способа регуляризации достигается за счет того, что мы считаем массу M_{PV} больше всех остальных (заранее нам неизвестных) параметров теории, а потом «прячем» эту величину в перенормированные константы гамильтониана. Фактически в процессе вычислений мы делаем предельный переход $M_{PV} \rightarrow \infty$, возвращающий наш ответ в исходную (расходящуюся) задачу. Это определяет и правила вычисления перенормируемой величины. В частности, в нашем случае нельзя менять порядок интегрирования в выражении (40): до вычисления интегралов по k первым выполнить интегрирование по времени «обычным способом» (сделав интеграл по t сходящимся за счет бесконечно малого сдвига частоты в комплексную плоскость). Фурье-преобразование, выполненное таким образом, автоматически доопределяет расходящуюся часть выражения (40) нулем. Действительно, с одной стороны расходимость действительной части исходного выражения (40) (точнее, величины $\mathcal{S}(\omega) - \mathcal{S}(0)$) при $M_{PV} \rightarrow \infty$ видна невооруженным взглядом: интегралы по k расходятся степенным образом. А при изменении порядка интегрирования вещественная часть выражения (40) будет пропорциональна $\delta(v_c(k + k_1) - |\omega|)$, что сразу делает ответ конечным при любом M_{PV} (в том числе и при $M_{PV} \rightarrow \infty$; $|\omega|/M_{PV} \ll 1$). Технически это происходит потому, что области интегрирования по k и k_1 в (40) при таком способе вычислений оказываются ограничены частотой (все k одного знака). Таким образом, перемена порядка интегрирования автоматически доопределяет расходящуюся при $M_{PV} \rightarrow \infty$ часть ответа нулем. Причина этого «парадокса» состоит в том, что эти два способа вычислений поразному доопределяют особенность, возникающую в длинноволновой асимптотике коррелятора $S(t)$ при $t \rightarrow 0$ (вне области ее применимости). Поэтому с точки зрения математической физики любая расходящаяся в ультрафиолетовой области теория полностью определена только тогда, когда задан не только гамильтониан, но и схема перенормировки. Отсюда следует, что выбор схемы перенормировки — это всегда вопрос, требующий обсуждения физической картины явления.

Разберемся с этим утверждением подробнее. Заметим, что вещественная часть коррелятора $\mathcal{S}(\omega) - \mathcal{S}(0)$ определяется вероятностью рождения электрон-дырочной пары нормальных возбуждений (полей χ_2 , см. гамильтониан (20)). Точнее, в его выражение входит вероятность рождения электрон-дырочной пары квазичастиц χ_2 , существующей

любое (в том числе и очень малое) время, что принципиально отличает нашу задачу от задачи рассеяния. В последней мы вычисляем вероятность перехода из начального состояния (заданного при $t \rightarrow -\infty$) в конечное ($t \rightarrow \infty$). Поэтому в задаче рассеяния вероятность должна быть пропорциональна $\delta(v_c(k + k_1) - |\omega|)$, т.е. δ -функции, выражающей закон сохранения энергии. Это и есть физическое требование, которое должно быть учтено в схеме перенормировки задачи рассеяния. Мы же вычисляем кондактанс (линейный отклик при $\omega \rightarrow 0$). А в него дают вклад и переходы между состояниями с плохо определенной энергией. Более того, как уже обсуждалось ранее, специфика нашей задачи состоит в том, что справа и слева от точечной примеси образуется скачок заряда, который не экранируется одномерными фермионами. (На самом деле электрически заряженный двойной слой, образующийся вокруг примеси, — это чисто гидродинамический эффект: поток, встретив препятствие, образует горб перед препятствием и впадину за ним. Характерный размер двойного слоя — порядка размера примеси: в нашем случае $\sim 1/p_F \rightarrow 0$.) Такой скачок заряда, приводящий в случае сильного e - e -взаимодействия к большой перенормировке амплитуды рассеяния, должен существовать и в подходе Кейна–Фишера. Величина перенормировки, возникающая из-за ультрафиолетовой расходимости $\mathcal{S}(t)$, определяется как раз малыми временами $t \leq 1/M_{PV}$, т.е. временами, за которые фермион не успел далеко отойти от примеси и сильнейшим образом взаимодействует с двойным слоем, существующим рядом с ней. На таких временах энергия плохо определена, т.е. говорить о существовании закона сохранения энергии в этом случае уже не приходится. Из-за ультрафиолетовой расходимости выражения для $\mathcal{S}(t)$ область $t \leq 1/M_{PV}$ дает главный вклад в $\gamma(\text{ren})$ и определяет наиболее медленную зависимость коэффициента отражения от частоты (об этом см. ниже). Вклад от больших времен, на которых выполняется закон сохранения энергии, конечно, тоже существует. Однако, как мы видели, он конечен и теряется в результате предельного перехода $M_{PV} \rightarrow \infty$ на фоне расходящегося ответа.

Правильность использования в нашей задаче схемы перенормировки по Гелл-Ману–Лоу доказывается окончательным ответом (уравнение (43)). Согласно ему, физическая амплитуда рассеяния (квадрат эффективной константы связи $\gamma_s(\mathcal{M}_{\text{ren}})\mathcal{M}_{\text{ren}}$), полученная в результате вычислений, оказалась безразмерной и независимой от точки ренормировки. Так и должно быть в перенормируемых теориях,

а перенормируемость означает и независимость наблюдаемой величины от способа регуляризации. Доопределение же расходящегося вклада от ультрафиолетовой области нулем заранее предполагает, что и в случае сильного e - e -взаимодействия кондактанс определяется только большими временами. В отличие от задачи рассеяния, для кондактанса это предположение не имеет физического обоснования и, на самом деле, сразу предопределяет ответы. В то же время переход к асимптотике $|\mathcal{R}_\omega|^2 \sim |\omega|$ как раз и должен происходить из-за того, что инфракрасная расходимость коррелятора \mathcal{S} сменяется на ультрафиолетовую [11].

4.3. Перенормированный коэффициент отражения

В Приложении С показано, что регуляризованная по Паули–Вилларсу частотнозависящая часть коррелятора $\delta\mathcal{S}(\omega) = \mathcal{S}(\omega) - \mathcal{S}(0)$, определяемая выражением (40), может быть представлена в виде

$$\text{Re } \delta\mathcal{S}(\omega) = -F(V_{\text{imp}}) (\gamma_s(\mathcal{M}_b))^2 \omega^2 M_{PV}. \quad (41)$$

(Конкретный вид функции $F(V_{\text{imp}})$ нам не важен.) Это выражение линейно расходится при $M_{PV} \rightarrow \infty$, поэтому исходный гамильтониан (20) требует перенормировки. Будем рассматривать константу $\gamma(\mathcal{M}_b)$ как затравочный заряд локальной теории и вспомним, что настоящее рассеяние в области малых длин нелокально. Естественно предположить, что наблюдая за рассеянием из одномерной области (большие длины), мы будем видеть перенормированное за счет взаимодействия в ультрафиолетовой области и точечное рассеяние фермионов примесью. Для решения такой задачи надо написать одномерный длинноволновый гамильтониан, зависящий от перенормированного заряда, который приведет к сходящемуся ответу для наблюдаемой величины, несмотря на существование ультрафиолетовой расходимости в одном из сомножителей выражения.

Попытаемся выяснить вид перенормированного гамильтониана. В результате вычислений с перенормированным гамильтонианом вместо выражения (41) должен получиться ответ, допускающий предельный переход $M_{PV} \rightarrow \infty$ и содержащий квадрат перенормированного заряда. Простейший вариант предполагаемого ответа имеет вид

$$\text{Re } \delta\mathcal{S}(\omega) = -\gamma_s^2(\mathcal{M}_{\text{ren}}) \frac{\mathcal{M}_{\text{ren}}}{M_{PV}} \odot F(V_{\text{imp}}) M_{PV} \omega^2.$$

(Все, что стоит после \odot , набирается от вычисления перенормированной петли, и этот сомножитель

будет одинаковым при любой константе связи, а M_{ren}/M_{PV} — простейшая безразмерная комбинация, позволяющая сократить M_{PV} в наблюдаемой величине.) Чтобы получить этот ответ, в гамильтониан нужно добавить контрчлен, пропорциональный $\hat{\chi}_2^\dagger(0)\partial_x\hat{\chi}_2^\dagger(0) - \partial_x\hat{\chi}_2(0)\hat{\chi}_2(0)$ с константой

$$\delta\gamma = \gamma(M_{ren})\sqrt{M_{ren}/M_{PV}} - \gamma(M_b).$$

В итоге вся перенормированная константа, стоящая в гамильтониане, будет равна

$$\gamma_{ren} = \gamma(M_{ren})\sqrt{M_{ren}/M_{PV}} \propto 1/\sqrt{M_{ren}M_{PV}},$$

$\gamma_{ren} \rightarrow 0$ при $M_{PV} \rightarrow \infty$.

С этим гамильтонианом вместо выражения (41) мы действительно получим

$$\text{Re } \delta\mathcal{S}(\omega) = -(\gamma_s(M_{ren})M_{ren})^2 F(V_{imp}) \frac{\omega^2}{M_{ren}}. \quad (42)$$

Отметим, что разложение функции $\text{Re } \delta\mathcal{S}(\omega)$ идет по степеням $|\omega|/M_{PV}$, а не по $|\omega|/M_{ren}$ (см. Приложение С). Поэтому следующие члены ряда будут равны нулю после предельного перехода $M_{PV} \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что это выражение должно быть справедливым во всей одномерной области (т.е. и на достаточно больших частотах). Поэтому мы должны позаботиться о правильной высокочастотной асимптотике выражения (42). Для этого надо вычислить отклик невзаимодействующих носителей, рассеивающихся на примеси, и сравнить его с формулой (12), в которой стоит точный коррелятор $\text{Re } \delta\mathcal{S}_{exact}(\omega)$. В результате мы увидим, что $\text{Re } \delta\mathcal{S}_{exact}$ в области больших частот отличается от $|\omega||R_0|^2$ только численным коэффициентом. Поэтому, для того чтобы зафиксировать правильное поведение ренормированной теории в высокочастотной области, нам достаточно потребовать выполнения условия

$$|\mathcal{R}_\omega|^2(\omega = M_{ren}) = |R_0|^2$$

при любой величине $|R_0|^2$. Такой выбор точки перенормировки означает, что в нашем случае масштаб $1/M_{ren}$ — это тот масштаб, начиная с которого рассеяние квазичастиц на примеси может быть описано с помощью локальной, но перенормированной за счет взаимодействия в ультрафиолетовой области амплитуды рассеяния. Этот масштаб является единственным подгоночным параметром теории и не может быть вычислен в рамках модели. В ито-

ге, используя формулу (47), мы получаем ответ для фейнмановского коэффициента отражения:

$$|\mathcal{R}_\omega|^2 = |R_0|^2 \frac{|\omega|}{M_{ren}}, \quad (43)$$

$$|R_0|^2 = \pi V_{imp}^2 (\gamma_s(M_{ren})M_{ren})^2 F(V_{imp})$$

($|\omega| \leq M_{ren} \ll M_b$). В этом выражении важно, что полученная в результате такой процедуры физическая амплитуда рассеяния фермионов на примеси, учитывающая сильное $e-e$ взаимодействие в ультрафиолетовой области, оказалась пропорциональна $(\gamma_s(M_{ren})M_{ren})^2$, т.е. она безразмерна и не зависит от точки нормировки. Как это и должно быть в перенормируемой теории. (Одним из способов вывода уравнения Гелл-Мана–Лоу в теории ренормализационной группы как раз и служит требование независимости физической амплитуды рассеяния от импульса обрезания. В нашем подходе его роль играет M_{ren} .)

Запаздывающий отклик получается из фейнмановского заменой $|\omega| \rightarrow \sqrt{(\omega + i\delta)^2}$ (см. Приложение А).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье вычисляется коэффициент отражения носителей от точечной примеси при $v_c = 1/2$, т.е. в области сильного фермион-фермионного взаимодействия (притяжение). Их рассеяние на примеси описывается с помощью туннельного гамильтониана, учитывающего только падающую и отраженную волны и пренебрегающего существованием прошедшей волны. До этого в работе [11] (подход со сшивкой решений нелинеаризованного уравнения Шредингера) в пределе бесконечно слабого примесного рассеяния предсказывалось, что при $v_c < 2/3$ инфракрасная расходимость выражения для кондактанса сменяется ультрафиолетовой, что приводит к смене частотной зависимости кондактанса с $|\omega|^{2\nu}$ на $|\omega|$. (Показатель степени частоты в случае сильного взаимодействия перестает зависеть от его величины.) Точное решение, существующее при $v_c = 1/2$ в подходе с туннельным гамильтонианом, подтверждает этот вывод. Все происходит по тому же сценарию: при произвольном примесном и сильном $e-e$ рассеянии ($v_c = 1/2$) выражение для кондактанса расходится в ультрафиолетовой области. В итоге вместо пропорциональности квадрату частоты кондактанс зависит от частоты линейно. Физической причиной изменения частотной зависимости кондактанса является отсутствие закона сохранения

энергии при упругом рассеянии носителей на точечной примеси на очень малых временах, т.е. на таких временах, на которых величина энергии плохо определена. Именно эти времена из-за ультрафиолетовой расходимости и дают главный вклад в самую медленно убывающую по частоте асимптотику кондактанса.

Благодарности. Автор благодарен В. Ю. Петрову, обратившему мое внимание на возможность применения исходных предпосылок «возмущенческого» РГ-подхода к случаю сильного e - e -взаимодействия, и Я.М. Бельтюкову за чтение рукописи.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А.
ПЕРЕХОД ОТ ФЕЙНМАНОВСКОГО
ОТКЛИКА К ЗАПАЗДЫВАЮЩЕМУ**

Используя ответ для поляризационного оператора (9), можно представить фейнмановскую часть отклика, зависящую от примесного рассеяния и вычисленную при вещественных ω , в виде

$$\delta j_F(\omega, k) = \frac{\omega V_{imp}^2 \mathcal{S}_F(|\omega|)}{v_c^2 k^2 - \omega^2 - i\delta} \int (dq) \frac{E_{ext}(q, \omega)}{v_c^2 q^2 - \omega^2 - i\delta}. \tag{44}$$

Это выражение хорошо убывает по частоте при $|\omega| \rightarrow \infty$ и является точным во всей одномерной области. (Все ограничения по ω определяются приближениями, сделанными при вычислении функции $\mathcal{S}_F(|\omega|)$. Для получения запаздывающего отклика ($\delta j_{ret}(\omega, k)$) надо продолжить фейнмановский отклик (44), вычисленный при вещественных частотах, в аналитическую в верхней полуплоскости ω функцию. Для этого нам будет удобно перейти в координатное представление:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{j}_F(\omega, x) &= \frac{iV_{imp}^2 \mathcal{S}_F(|\omega|)}{8v_c^3 |\omega|} \times \\ &\times (\theta(x) \exp\{i|\omega|x/v_c\} + \theta(-x) \exp\{-i|\omega|x/v_c\}) \times \\ &\times \int (dq) E_{ext}(q, \omega) \left(\frac{1}{q - (\omega/v_c + i\delta \text{sgn}\omega)} - \frac{1}{q + (\omega/v_c + i\delta \text{sgn}\omega)} \right). \end{aligned} \tag{45}$$

Кроме того, нас интересует кондактанс, т.е. вещественная часть запаздывающего отклика в пределе $\omega \rightarrow 0$ при вещественных ω . Для перехода к запаздывающему отклику в (45) необходимо заменить $\omega^2 + i\delta \text{sgn}(\omega) \rightarrow (\omega + i\delta)^2$ в полюсах подынтегральной функции. Остается разобраться, как надо

понимать множитель $\mathcal{S}_F(|\omega|)/|\omega|$. Заметим, что выражения для вещественной части фейнмановского, запаздывающего и опережающего откликов на вещественной оси должны быть одинаковыми и различаться только бесконечно малым сдвигом особенности, существующей в петлевой диаграмме при $\omega = 0$, в комплексную плоскость. Это означает, что в запаздывающей функции Грина в множителе $\mathcal{S}_F(|\omega|)/|\omega|$, вычисленном при вещественных частотах, под $|\omega|$ надо понимать $+\sqrt{(\omega + i\delta)^2}$ (корень определяется как функция комплексной переменной ω с фазой, равной нулю на верхнем берегу разреза, идущего вправо). В результате все получившееся выражение не будет иметь особенностей при $|\omega|/\mathcal{M} \ll 1$ в верхней полуплоскости по частоте (в этой области известно его аналитическое выражение). В области $|\omega|/\mathcal{M} \geq 1$ отношение $\mathcal{S}_F(|\omega|)/|\omega|$ перестает расти, и вся проводимость остается убывающей по частоте функцией (нас интересует отклик на медленно меняющееся по координате внешнее поле: $|q|v_c \ll |\omega|$). Конечно, получить аналитический ответ для $\mathcal{S}_F(|\omega|)/|\omega|$ в области $\omega \sim \mathcal{M}$ не представляется возможным, так как для этого необходимо знание гамильтониана в ультрафиолетовой области. Однако для аналитического продолжения низкочастотного отклика достаточно факта убывания проводимости $\sigma_F(\omega, k, q)$ (уравнение (44)) в области больших частот и при малых импульсах k и q (см. вторую половину разд. 2).

При получении ответа для кондактанса надо учесть, что зависящая от частоты часть $\text{Re} \mathcal{S}_F(|\omega|)/|\omega| \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow 0$. Компенсировать это убывание в вещественной части отклика можно за счет полюсного вклада подынтегрального выражения, поэтому самая медленно убывающая асимптотика линейного отклика определяется выражением

$$\begin{aligned} \text{Re} \delta j_{ret}(\omega, x) &= \\ &= -\frac{V_{imp}^2 \text{Re}(\mathcal{S}(|\omega|)/|\omega|)}{8v_c^2} \times \\ &\times (\theta(x) \exp\{i|\omega|x/v_c\} + \theta(-x) \exp\{-i|\omega|x/v_c\}) \times \\ &\times \int dq E_{ext}(q, \omega) (\delta(q - \omega/v_c) + \delta(q + \omega/v_c)). \end{aligned}$$

В этом выражении множитель $\text{Re}(\mathcal{S}(|\omega|)/|\omega|)$ должен быть вычислен по фейнмановским правилам при вещественных ω (т.е. $\mathcal{S}(\omega)$ — это фурье-преобразование T-упорядоченного антикоммутирующего бозевских полей \hat{s}), а потом продолжен с вещественной оси в верхнюю полуплоскость заменой $|\omega| \rightarrow +\sqrt{(\omega + i\delta)^2}$.

Переходя к пределу $\omega \rightarrow 0$ (т.е. $\omega \ll v_c/L \sim T_c$), переписываем ответ в виде

$$\text{Re } \delta j(\omega, x) = \frac{V_{imp}^2 \text{Re}(\mathcal{S}(|\omega|)/|\omega|)}{4v_c^2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \partial U_{ext}(x, \omega).$$

Считая, что разность потенциалов медленно зависит от времени (или, что то же самое, она есть «размазанная» δ -функция частоты: $U_{ext}(\pm L/2, \omega) = 2\pi\Delta(\omega)U_{ext}(\pm L/2)$; $\int d\omega \Delta(\omega) = 1$), получаем обычное выражение для кондактанса:

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{e_0^2}{2\pi v_c} (1 - |R_\omega|^2), \quad (46)$$

в котором введен медленно зависящий от частоты коэффициент отражения носителей от примеси, равный¹⁾

$$|R_\omega|^2 = -\frac{\pi}{2v_c|\omega|} V_{imp}^2 \text{Re} \mathcal{S}(|\omega|). \quad (47)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПОВОРОТА

Введенные нами майорановские поля λ и β вещественны, нормированы на длину канала и антикоммутируют друг с другом:

$$\{\hat{\lambda}(\epsilon_n), \hat{\lambda}(\epsilon_m)\} = L\delta_{n,-m},$$

а матрица поворота определялась нами как

$$\hat{\lambda}(\epsilon_n) = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \hat{\Phi}(m). \quad (48)$$

Уравнение для матрицы поворота следует из «стационарного уравнения Шредингера» $[\hat{\lambda}(n), \mathcal{H}]_- = \epsilon_n \hat{\lambda}(n)$, подстановки в него полей $\lambda(n)$ согласно определению (48) и варьированию получившегося выражения по полю $\hat{\Phi}_m$.

¹⁾ Во избежание недоразумений отметим, что используемый в этой статье термин «перенормированный взаимодействием коэффициент отражения фермионов от примеси» не совсем точен. Речь идет не об амплитуде рассеяния фермионов на примеси, а о том, что выражение для кондактанса выглядит с учетом взаимодействия привычным образом. Вычисляется же линейный отклик при $\omega \rightarrow 0$. В задачах, расходящихся в ультрафиолетовой области, это может не совпадать с величиной, получающейся из выражения для сечения рассеяния, когда задается начальное и конечное состояния при $t \rightarrow \pm\infty$ (см. обсуждение в конце разд. 4.2).

Таким образом, для получения примесной части уравнения нам нужно вычислить коммутаторы

$$\left[\frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \hat{\Phi}(m), \frac{v_c}{2L} \sum_n \hat{\Phi}(-p_n) p_n \hat{\Phi}(p_n) + \gamma \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} \hat{\Phi}(p_{m_1}) \frac{1}{L} \sum_{m_2 \neq 0} p_{m_2} \hat{\Phi}(p_{m_2}) \right].$$

- Коммутируем первый член с кинетической энергией, учитывая что

$$LS(\epsilon_n, p_m) (\delta_{m,m_1} \hat{\Phi}_{m_1} - \delta_{m,-m_1} \hat{\Phi}_{-m_1}) p_{m_1} = L(p_m S(\epsilon_n, p_m) + p_m S(\epsilon_n, p_m)) \hat{\Phi}_m,$$

получаем вклад в коммутатор, равный

$$\frac{v_c}{L} \sum_{m_1 \neq 0} p_{m_1} S(\epsilon_n, p_{m_1}) \hat{\Phi}(p_{m_1}).$$

- Коммутатор первого члена с примесным рассеянием равен

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{1}{L^2} \sum_{m, m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \times \\ & \times (\delta_{m,-m_1} p_{m_2} \hat{\Phi}_{m_2} - \delta_{m,-m_2} p_{m_2} \hat{\Phi}_{-m_1}) = \\ & = \gamma \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} p_{m_1} \hat{\Phi}_{m_1} + \\ & + \gamma \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) p_m \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} \hat{\Phi}_{m_1}. \end{aligned}$$

- Правая часть уравнения есть

$$\epsilon_n \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) \hat{\Phi}(p_{m_1}).$$

Варьируя получившееся «стационарное уравнение Шредингера» по $\hat{\Phi}(k_m)$ (m — любое, включая n), получаем уравнение для матрицы поворота:

$$\begin{aligned} & (\epsilon_n - v_c k_m) S(\epsilon_n, k_m) = \\ & = \gamma k_m \frac{1}{L} \sum_{m_1} S(\epsilon_n, p_{m_1}) + \gamma \frac{1}{L} \sum_{m_1} p_{m_1} S(\epsilon_n, p_{m_1}). \end{aligned} \quad (49)$$

Нам осталось получить выражение для обратной матрицы поворота (S^{-1}):

$$\hat{\Phi}(p_{m_1}) = \frac{1}{L} \sum_{n_1 \neq 0} S^{-1}(\epsilon_{n_1}, p_{m_1}) \hat{\lambda}(\epsilon_{n_1}). \quad (50)$$

Подставляя его в выражение (48), получаем

$$\hat{\lambda}(\epsilon_n) = \frac{1}{L^2} \sum_{m, n_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) S^{-1}(\epsilon_{n_1}, p_m) \hat{\lambda}(\epsilon_{n_1}). \quad (51)$$

Теперь нам необходимо учесть, что майораны вещественны и должны антикоммутировать. Для этого запишем антикоммутатор полей λ в терминах «неповернутых» полей:

$$\frac{1}{L^2} \sum_{m_1; m_2 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) S(\epsilon_m, p_{m_2}) \{\hat{\Phi}(m_1), \hat{\Phi}(m_2)\} = L \delta_{n, -m},$$

т.е.

$$\delta_{n, m} = \frac{1}{L^2} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) S(\epsilon_{-m}, p_{-m_1}).$$

Отсюда сразу следует, что если элементы обратной матрицы поворота удовлетворяют условию

$$S^{-1}(\epsilon_n, p_m) = S(\epsilon_{-n}, p_{-m}), \quad (52)$$

то равенство (51) превращается в тождество. (Впрочем, это соотношение лишь показывает, что матрица поворота унитарна.)

В.1. Спектр

Система уравнений (29), (30), определяющая матрицу поворота, зависит от расходящихся в термодинамическом пределе ($N_1 \rightarrow \infty$) сумм. При симметричной регуляризации

$$\mathcal{A}(y) = \sum_{-N_1, m \neq 0}^{N_1} \frac{1}{y - m} = \pi \operatorname{ctg}(\pi y) - \frac{1}{y} + \mathcal{O}(1/N_1), \quad (53)$$

$$B(y, N_1) = \sum_{-N_1}^{N_1} \frac{m}{y - m} = y \mathcal{A}(y, N_1) - 2N_1,$$

$$C(y, N_1) = \sum_{-N_1}^{N_1} \frac{m^2}{y - m} = y B(y).$$

В этих обозначениях уравнения для матрицы поворота переписываются в виде

$$b N_1 \mathcal{Z}(y_n) = B(y, N_1) \mathcal{Z}(y_n) + \frac{2\pi}{L} C(y_n) Y(y_n) = 0, \quad (54)$$

$$b N_1 Y(y_n) = \frac{2\pi}{L} \mathcal{A}(y_n) \mathcal{Z}(y_n) + B(y_n) Y(y_n).$$

Условие существования решения уравнений дает точное уравнение для спектра:

$$B(y_n) = \frac{b^2 N_1}{2(b+1)}, \quad (55)$$

а последнее уравнение — связь между $Y(y_n)$ и $\mathcal{Z}(y_n)$:

$$Y(y_n) = \frac{b+2}{b} \frac{v_c}{\epsilon_n} \mathcal{Z}(y_n).$$

Таким образом, вся матрица поворота имеет вид

$$S(\epsilon_n, k_m) = \frac{\mathcal{Z}(y_n) L}{2\pi v_c (n-m)} \left[1 + \frac{b+2}{b} \frac{m}{n} \right]. \quad (56)$$

Из условия унитарности поворота

$$\frac{1}{L} \sum_{-N_1; m \neq 0}^{N_1} S(\epsilon_{-n}; p_{-m}) S(\epsilon_n; p_m) = L \quad (57)$$

мы можем получить выражение для $\mathcal{Z}(y_n)$:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2\pi v_c} \right)^2 \mathcal{Z}(y_n) \mathcal{Z}(y_{-n}) \times \\ & \times \sum_{-N_1; m \neq 0}^{N_1} \left[1 + \frac{b+2}{b} \frac{m}{n} \right]^2 / (n-m)^2 = 1. \quad (58) \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить последнее слагаемое, введем

$$\begin{aligned} S_0(y, N_1) &= \sum_{-N_1, m \neq 0}^{N_1} \frac{1}{(y-m)^2} = -\partial_y \mathcal{A}(y) = \\ &= -\partial_y [(B(y) + 2N_1)/y], \\ S_1(y, N_1) &= \sum_{-N_1}^{N_1} \frac{m}{(y-m)^2} = -\partial_y [y \mathcal{A}(y, N_1)], \quad (59) \\ S_2(y, N_1) &= \sum_{-N_1}^{N_1} \frac{m^2}{(y-m)^2} = -\partial_y [y B(y)] = \\ &= -\partial_y [-2y N_1 + y^2 \mathcal{A}(y)]. \end{aligned}$$

В терминах этих сумм уравнение (58) записывается в виде

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2\pi v_c} \right)^2 \mathcal{Z}(y_n) \mathcal{Z}(y_{-n}) \left[S_0(y, N_1) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{b+2}{y b} S_1(y, N_1) + \left(\frac{b+2}{y b} \right)^2 S_2(y, N_1) \right] = 1. \end{aligned}$$

Последний множитель в этой формуле равен

$$\begin{aligned} [\dots] &= -\partial_y \mathcal{A}(y) \left(1 + \frac{b+2}{b} \right)^2 - \\ & - 2 \mathcal{A}(y) \frac{b+2}{y b} \left(1 + \frac{b+2}{b} \right) + 2 N_1 \left(\frac{b+2}{y b} \right)^2, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}(y) = \pi \operatorname{ctg}(\pi y) - \frac{1}{y}, \quad \partial \mathcal{A}(y) = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi y} + \frac{1}{y^2}.$$

Нам будет удобно записать $\sin^2 \pi y$ в виде, следующем из точного уравнения для спектра:

$$\left[1 + \left(\frac{\mathcal{P}}{\pi y}\right)^2\right] \sin^2 \pi y = 1, \quad \mathcal{P}^2 = \left[N_1 \frac{(b+2)^2}{2(b+1)} + 1\right]^2. \quad (60)$$

В итоге имеем

$$[\dots] = \frac{1}{y^2} \left[\frac{4(b+1)^2}{b^2} (\mathcal{P}^2 - 1) - 2N_1 \frac{(b+2)}{b^2} (b+1) + 2N_1 \frac{(b+2)^2}{b^2} \right] + 4\pi^2 \frac{(b+1)^2}{b^2}.$$

Нам нужен термодинамический предел выражения для матрицы поворота. Будем считать, что $N_1|b+2| \gg 1$. В таком случае $\mathcal{P} \sim N_1$, поэтому второе и третье слагаемое в этом выражении дадут посттермодинамические поправки порядка $O(1/N_1)$. Последнее же слагаемое приведет к регуляризации выражения для \mathcal{Z} при малых y_n и его надо оставить. Таким образом,

$$\begin{aligned} [\dots] &= \left(\frac{2\pi(b+1)}{yb}\right)^2 [\tilde{N}_1^2 + y^2], \\ \tilde{N}_1 &= N_1(b+2)^2/2\pi(b+1), \\ \mathcal{Z}(\epsilon_n) &= \frac{bv_c}{b+1} \frac{y_n}{[\tilde{N}_1^2 + y_n^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Подставляя это выражение в уравнение (56), имеем окончательное выражение для матрицы поворота:

$$S(\epsilon_n, k_m) = \frac{Lz_0}{[\tilde{N}_1^2 + y_n^2]^{1/2}} \frac{y_n}{y_n - m} \left[1 + \frac{b+2}{b} \frac{m}{y_n}\right], \quad (62)$$

где $z_0 = b/2\pi(b+1)$. Прямым вычислением можно показать, что это выражение удовлетворяет условию унитарности (57).

При $n, N_1 \gg 1$ точное выражение для спектра (60) переходит в

$$y_n = n \left(1 + \frac{1}{\pi n} \arcsin \frac{\pi n}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + \pi^2 n^2}}\right) \sim n + \frac{n}{\mathcal{P}} \quad (63)$$

(в такой записи \arcsin понимается в смысле главного значения).

ПРИЛОЖЕНИЕ С. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯТОРА S

Подставляя выражения (36)–(38) для одночастичных функций Грина в (39), получаем выраже-

ние для регуляризованного коррелятора псевдоскалярной плотности:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= -(2\gamma_s)^2 \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) \times \\ &\times \int (dkdk_1) \exp(itv_c(k+k_1)) (k\Phi_0(b) - k_1\Phi_0(-b))^2 \times \\ &\times [\theta(t)\theta(k) - \theta(-t)\theta(-k)][\theta(t)\theta(k_1) - \\ &- \theta(-t)\theta(-k_1)] \mathcal{F}(k, M_{PV}) \mathcal{F}(k_1, M_{PV}). \end{aligned} \quad (64)$$

Для дальнейшего вычисления нам будет удобно воспользоваться тем, что за исключением множителя $(k\Phi_0(b) - k_1\Phi_0(-b))^2$ остальное подынтегральное выражение симметрично относительно замены $k < - > k_1$. Тогда этот множитель можно представить в виде

$$\begin{aligned} &(\Phi_0(b)k - \Phi_0(-b)k_1)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}(\Phi_0(b)^2 + \Phi_0(-b)^2)(k+k_1)^2 - kk_1(\Phi_0(b) + \Phi_0(-b))^2. \end{aligned}$$

Поэтому все выражение записывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= -(2\gamma_s)^2 \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) \times \\ &\times \int (dkdk_1) \exp(itv_c(k+k_1)) \times \\ &\times \left[\frac{1}{2}(\Phi_0^2(b) + \Phi_0^2(-b))(k+k_1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - kk_1(\Phi_0(b) + \Phi_0(-b))^2 \right] \times \\ &\times [\theta(t)\theta(k)\theta(k_1) + \theta(-t)\theta(-k)\theta(-k_1)] \times \\ &\quad \times F(k, M_{PV}) F(k_1, M_{PV}). \end{aligned} \quad (65)$$

Для вычисления перенормированного коэффициента отражения фермионов от примеси нам будет нужна вещественная часть фурье-преобразования этого выражения. Меняя в последнем слагаемом получившегося выражения $t; k_{1,2} \rightarrow -t; -k_{1,2}$, имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{S}(\omega) &= -2(2\gamma_s)^2 \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) \times \\ &\times \text{Re} \int_0^\infty dt \cos(\omega t) \int_0^\infty (dkdk_1) \exp(itv_c(k+k_1)) \times \\ &\times \left[\frac{1}{2}(\Phi_0^2(b) + \Phi_0^2(-b))(k+k_1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - kk_1(\Phi_0(b) + \Phi_0(-b))^2 \right] \times \\ &\quad \times \mathcal{F}(k, M_{PV}) \mathcal{F}(k_1, M_{PV}). \end{aligned} \quad (66)$$

Из этого выражения видно, что в подынтегральном выражении по k у нас выделились две структуры: $(k+k_1)^2$ и kk_1 .

- Слагаемое с $(k + k_1)^2$. Понизить степень знаменателя в выражении для функции $\mathcal{F}(k, M_{PV})$ можно, записав квадрат выражения, стоящего в $\mathcal{F}(k, M_{PV})$, как производную по M_{PV} , а $(k + k_1)^2$ — как ∂_t^2 от экспоненты. Таким образом, весь интеграл по $dkdk_1$ представляется в виде

$$-\frac{1}{(4\pi v_c)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \left[\int dk \exp\{itv_c k\} \left(M_{PV}^3 \frac{\partial}{\partial M_{PV}} \frac{1}{k^2 v_c^2 + M_{PV}^2} \right) \right]^2,$$

и все первое слагаемое равно

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{S}_1(\omega) &= \\ &= (2\gamma_s)^2 \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) (\Phi_0^2(b) + \Phi_0^2(-b)) \frac{M_{PV}^6}{(4\pi v_c)^2} \times \\ &\quad \times \text{Re} \int_0^\infty \cos \omega t dt \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial}{\partial M_{PV}} \int_0^\infty dk \frac{\exp\{itv_c k\}}{k^2 v_c^2 + M_{PV}^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Это равенство удобно выразить через интеграл Лапласа (\mathcal{L}_a) и Раабе (\mathcal{R}_a) [22]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk \frac{\exp\{itv_c k\}}{k^2 v_c^2 + M_{PV}^2} &= \\ &= \frac{v_c}{M_{PV}} (\mathcal{L}_a(M_{PV}t) + i\mathcal{R}_a(M_{PV}t)). \end{aligned}$$

Интеграл Лапласа экспонциально убывает при $M_{PV}t \gg 1$ и стремится к постоянному значению в обратном предельном случае. А интеграл Раабе при $M_{PV}t \gg 1$ убывает как $1/M_{PV}t$, а при малом значении аргумента

$$\mathcal{R}_a(M_{PV}t) \simeq -(\gamma_E + \ln(M_{PV}t))M_{PV}t.$$

Это позволяет нам записать предыдущее выражение в виде

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{S}_1(\omega) &= \\ &= \frac{\gamma_s^2}{(2\pi)^2} \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) (\Phi_0^2(b) + \Phi_0^2(-b)) M_{PV}^6 \times \\ &\quad \times \text{Re} \int_0^\infty \cos \omega t dt \times \\ &\quad \times \partial_t^2 \left[\frac{\partial}{\partial M_{PV}} \frac{1}{M_{PV}} (\mathcal{L}_a(M_{PV}t) + i\mathcal{R}_a(M_{PV}t)) \right]^2. \end{aligned}$$

Далее мы должны учесть, что хотя нас и интересует предел $M_{PV} \rightarrow \infty$, но безразмерное время $\tau = M_{PV}t$ при этом может быть любым. После дифференцирования по M_{PV} мы уже можем перейти к безразмерному времени:

$$\begin{aligned} \partial_{M_{PV}} \frac{1}{M_{PV}} (\mathcal{L}_a(M_{PV}t) + i\mathcal{R}_a(M_{PV}t)) &= \\ &= \frac{1}{M_{PV}^2} \left[-1 + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right] (\mathcal{L}_a(\tau) + i\mathcal{R}_a(\tau)). \end{aligned}$$

Заметим, что все выражение для коррелятора не имеет неинтегрируемых особенностей при $\tau \rightarrow 0$ и хорошо сходится на больших τ :

$$\begin{aligned} -\mathcal{R}_a(\tau) + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{R}_a(\tau) &= -\frac{2}{\tau}, \quad \tau \gg 1, \\ -\mathcal{R}_a(\tau) + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{R}_a(\tau) &= -\tau, \quad \tau \ll 1. \end{aligned}$$

Поэтому при вычислении вещественной части частотнозависящего вклада, возникающего от этого слагаемого в вещественной части (66), мы можем дважды проинтегрировать по частям. В итоге все выражение окажется пропорциональным

$$\begin{aligned} M_{PV} \omega^2 \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau/M_{PV}) \{ [(1-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_a(\tau)]^2 - \\ - [(1-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{R}_a(\tau)]^2 \}. \end{aligned}$$

Учитывая, что подынтегральное выражение быстро убывает при $\tau \gg 1$ (т.е. $\cos(\omega\tau/M_{PV})$ можно заменить на 1), видим, что весь интеграл по τ дает коэффициент порядка 1 при $M_{PV}\omega^2$. В результате вся частотнозависящая часть этого слагаемого равна

$$\text{Re } \delta \mathcal{S}_1(\omega) = -\gamma_s^2 F_1(V_{imp}) M_{PV} \omega^2, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} F_1(V_{imp}) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \Phi_0^2(b) \Phi_0^2(-b) (\Phi_0^2(b) + \Phi_0^2(-b)) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\tau \{ [(1-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_a(\tau)]^2 - [(1-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{R}_a(\tau)]^2 \}. \end{aligned} \quad (68)$$

- Слагаемое с kk_1 . В этом случае интегралы по k пропорциональны

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(4\pi v_c)^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int dk \exp\{itv_c k\} \times \right. \\ \left. \times (M_{PV}^3 \frac{\partial}{\partial M_{PV}} \frac{1}{k^2 v_c^2 + M_{PV}^2}) \right]^2. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_{M_{PV}} \frac{1}{M_{PV}} (\mathcal{L}_a(M_{PV}t) + i\mathcal{R}_a(M_{PV}t)) = \\ = \frac{\tau}{M_{PV}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\mathcal{L}_a(\tau) + i\mathcal{R}_a(\tau)), \end{aligned}$$

это выражение удобно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \delta \mathcal{S}_2(\omega) = \gamma_s^2 F_2(V_{imp}) M_{PV} \omega^2, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} F_2(V_{imp}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \Phi_0(b)^2 \Phi_0(-b)^2 (\Phi_0(b) + \Phi_0(-b))^2 \times \\ \times \int_0^\infty \tau^4 d\tau \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathcal{L}_a(\tau) \right]^2 - \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathcal{R}_a(\tau) \right]^2 \right\}. \quad (70) \end{aligned}$$

При этом переходе мы снова учли, что подынтегральные выражения быстро убывают при $\tau \gg 1$. Это позволило ограничиться первым членом разложения $\sin^2(\omega\tau/2M_{PV})$ для частотнозависящей части коррелятора.

В итоге мы убедились, что вещественная часть петлевой диаграммы пропорциональна $-\gamma_s^2 M_{PV} \omega^2$ с коэффициентом, равным

$$F(V_{imp}) = F_1(V_{imp}) - F_2(V_{imp}).$$

Во всех этих вычислениях важно, что все наши подынтегральные выражения не расходятся при $\tau \rightarrow 0$, а сами интегралы определяются областью $\tau \sim 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **5**, 544 (1950).
2. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128**, 2425 (1962).
3. G. S. Danilov, I. T. Dyatlov, and V. Yu. Petrov, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **78**, 1314 (1980) [*Sov. Phys. JETP* **51**, 663 (1980)].
4. C. L. Kane and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. B* **46**, 15233 (1992).
5. A. Furusaki and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* **47**, 4631 (1993).
6. L. I. Glazman, K. A. Matveev, and D. Yue, *Phys. Rev. B* **49**, 1966 (1994).
7. D. N. Aristov and P. W. Wölfle, *Phys. Rev. B* **80**, 045109 (2009).
8. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, *J. Phys.: Condens. Matter* **30**, 355601 (2018).
9. A. Furusaki, *Phys. Rev. B* **56**, 9352 (1997).
10. P. Fendley, A. W. W. Ludwig, and H. Saleur, *Phys. Rev. B* **52**, 8934 (1994).
11. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, *Pis'ma v ZhETF* **97**, 587 (2013).
12. J. Bardeen, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 57 (1961).
13. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, *JETP Lett.* **109**, 762 (2019).
14. Б. Л. Иоффе, *УФН* **178**, 647 (2008).
15. M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1996), pp. 654–656.
16. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, *JETP Lett.* **101**, 622 (2015).
17. J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 77 (1959).
18. V. V. Afonin and S. V. Gantsevich, *Cond. Mat.* **4**, 62 (2019); doi: 10.3390/condmat4030062.
19. В. В. Афонин, В. Ю. Петров, *ЖЭТФ* **134**, 637 (2008).
20. F. D. M. Haldane, *J. Phys. C* **14**, 2585 (1981).
21. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, *Found. Phys.* **40**, 190 (2010); doi: 10.1007/s10701-009-9385-7.
22. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Mc Graw-Hill Book Company, New York (1953), Vol. 2, p. 148.