ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 3 (9), стр. 417–425

ТЕОРИЯ ВИХРЕПОДОБНЫХ СТРУКТУР В ПЕРФОРИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ С УЧЕТОМ РАЗМАГНИЧИВАЮЩИХ ПОЛЕЙ

Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, Р. Р. Канбеков*

Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 22 апреля 2022 г.,
после переработки 25 мая 2022 г.
Принята к публикации 26 мая 2022 г.

Исследуются вихреподобные неоднородности, которые могут возникать в ферромагнитных пленках с сильной одноосной анизотропией типа «легкая плоскость» при наличии в них антидотов, представляющих собой искусственно созданные наноразмерные отверстия или немагнитные включения. Рассмотрены особенности структуры нанообъектов такого типа в зависимости от геометрии отверстий, а также изучено влияние размагничивающих полей на вихреподобные неоднородности, локализующиеся в окрестности одного, двух или четырех отверстий. Показано, что приведенные аналитические оценки во всех случаях находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0044451022090152
EDN: ELNJAY

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно исследуются и активно обсуждаются особенности топологии и разнообразные (в том числе и уникальные) свойства вихреподобных магнитных неоднородностей, к которым относятся магнитные вихри, цилиндрические магнитные домены, магнитные скирмионы, бимероны и т. е. [1–7]. Такое внимание к ним обусловлено перспективами их использования в магнитной памяти, нейроморфных вычислительных системах и других устройствах спинтроники [5, 6, 8]. В то же время в работах [9, 10] на примере некоторых простейших моделей показана возможность существования еще одного типа вихреподобных неоднородностей, которые образуются в тонких магнитных пленках с искусственно созданными отверстиями (в литературе также встречается термин «антидот» [11]) или немагнитными включениями и могут управляться внешними токами, протекающими через них. Ранее пленки такой геометрии неоднократно рассматривались при изучении устойчивых состояний магнитных вихрей и скирмионов. Такой интерес был обусловлен наличием в реальных пленках различного рода дефектов, которые существенно влияют на свойства вихреподобных магнитных неоднородностей [12–14], причем к дефектам можно отнести и полости цилиндрической формы, т. е. отверстия. Согласно исследованиям они могут, с одной стороны, влиять на устойчивость наблюдаемых магнитных структур [15], в частности, способствовать увеличению плотности образующихся скирмионов [16], а с другой — индуцировать зарождение магнитных скирмионов в некиральных магнетиках [11]. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать отверстия как своего рода источник зарождения вихреподобных неоднородностей, в том числе и в пленках с сильной легкоплоскостной анизотропией, которые изучаются в данной работе. Очевидно, однако, что применение нанообъектов указанного типа на практике требует предварительного анализа влияния на их структуру ряда факторов, присущих реальным магнитным пленкам, таких как геометрические размеры отверстий и воздействие размагничивающих полей, чему и посвящено приведенное исследование.

2. СТРУКТУРА ПРОСТЕЙШЕЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Пусть материал тонкой пленки, содержащей отверстия (осуществимость таких наноразмерных перфораций на практике подтверждается аналогичны-

* E-mail: vakhitovrm@yahoo.com

ми экспериментами с графеном [17] и магнитными пленками [18–20]), представляет собой ферромагнетик с сильной одноосной анизотропией типа «легкая плоскость», благодаря чему вектор намагниченности почти не выходит из плоскости пленки. Тогда энергия магнетика может быть приближенно представлена в следующем виде [9, 10]:

$$E = \int A(\nabla\theta)^2 h\, dS, \tag{1}$$

где угол θ задает ориентацию вектора намагниченности на плоскости, A — обменный параметр, h — толщина пленки. Здесь предполагается, что вклад размагничивающих полей в рассматриваемом материале значительно меньше вклада обменного взаимодействия; их влияние — это предмет подробного рассмотрения.

В случае пленки без топологических особенностей функционал (1) имеет единственный минимум $E = 0$, достигаемый при $\theta = \mathrm{const}$, что соответствует однородному распределению намагниченности. Однако при наличии отверстий в пленке уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала (1), представляющее собой уравнение Лапласа $\Delta\theta = 0$, может иметь нетривиальные решения. В частности, при числе отверстий $N = 1$ такие решения имеют вид $\theta(r, \phi) = k\phi + \mathrm{const}$, где полярная система координат (r, ϕ) связана с центром отверстия, а k — произвольное целое число, которое будем называть топологическим зарядом по аналогии с терминологией, принятой, например, в теории скирмионов (при этом величина k, разумеется, представляет собой топологический инвариант принципиально иного рода, нежели топологический заряд скирмиона). В континуальном приближении все такие состояния являются одинаково стабильными, независимо от значения k, тем не менее, соответствующая магнитная неоднородность не является уединенной, и ее энергия при $k \neq 0$ неограниченно растет при увеличении размеров образца [10]. При $N = 2$ данное утверждение уже не всегда верно. Действительно, пусть пленка содержит два цилиндрических отверстия радиусами R_1 и R_2, центры которых отстоят друг от друга на расстояние $a \gg R_1, R_2$ (рис. 1). Тогда в силу линейности уравнения $\Delta\theta = 0$ оно имеет решение следующего вида:

$$\theta = k(\phi_1 - \phi_2), \tag{2}$$

где ϕ_1, ϕ_2 — полярные углы в системах координатах, связанных с центрами отверстий. Из рис. 1 следует, что разность углов, входящая в соотношение (2), равна углу, под которым из данной точки виден отрезок, соединяющий центры отверстий, так что $\theta \sim r^{-1}$, а значит, $(\nabla\theta)^2 \sim r^{-4}$. Это обеспечивает сходимость интеграла (1) в области больших r, следовательно, энергия магнетика в рассматриваемом состоянии является конечной. Детальный расчет (см. Приложение A) показывает, что она равна

$$E = 4\pi k^2 Ah \ln(a/\sqrt{R_1 R_2}). \tag{3}$$

Распределение намагниченности в окрестности отверстий, задаваемое выражением (2) при $k = 1$, схематически показано на рис. 1; при этом состояние с $k = -1$ получается из него симметричным отражением, так что эти состояния физически эквивалентны.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Соотношение (2) представляет собой приближенное аналитическое выражение, справедливое в пределе бесконечно малых размеров отверстий, тем не менее, оно на качественном уровне правильно описывает структуру неоднородностей, образующихся в окрестности парных отверстий произвольной формы. В этом несложно убедиться путем численного моделирования с использованием программного комплекса OOMMF [21]. На рис. 2 показан пример уединенной неоднородности, структура которой была получена в результате расчетов на модели образца в виде прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры 200 нм × 200 нм × 20 нм (на рисунке изображена небольшая область пленки, представляющая интерес). При этом антидоты были выбраны в виде отверстий радиусом 10 нм, т. е. при размере ячейки 2.5 нм они фактически имели крестообразную форму (см. рис. 2). Как видим, что приведенное распределение намагниченности в точности воспроизводит состояние с $k = 1$, предсказанное соотношением (2).

Следует остановиться на том обстоятельстве, что поскольку глобальный минимум энергии (1) $E = 0$ достигается при однородном распределении намагниченности, расчет неоднородной структуры численными методами требует привлечения стохастического подхода (в работе [10] он был развит в применении к численной оптимизации без использования программного комплекса OOMMF). В рамках такого подхода расчет равновесного распределения намагниченности повторяется многократно, начинаясь из различных стартовых точек оптимизации, выбираемых случайно. Далее все найденные мини-

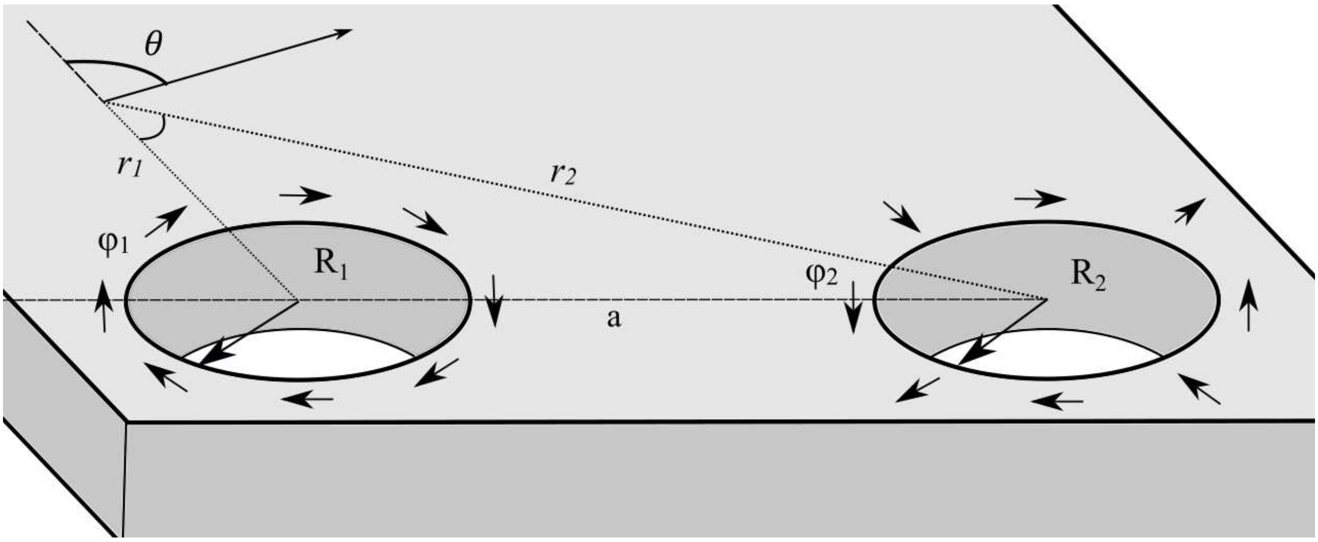

Рис. 1. Схема пленки с двумя отверстиями

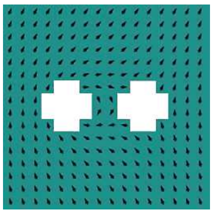

Рис. 2. Уединенная неоднородность, локализованная на двух отверстиях

мумы ранжируются по значениям энергии, и для каждого значения выбирается по одному решению (предполагается, что существование неэквивалентных минимумов, равных по величине, крайне маловероятно), что и позволяет исследовать состояния с $E \neq 0$. В частности, состояние, показанное на рис. 2, характеризуется энергией $E = 14.4\ Ah$.

Несложно видеть, что при $N > 2$ соотношение, аналогичное (2), будет иметь вид

$$\theta = k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \ldots + k_N\phi_N.$$

При этом условие конечности энергии системы выражается равенством $k_1 + k_2 + \ldots + k_N = 0$. Для примера рассмотрим случай $N = 4$, поместив четыре одинаковых отверстия радиусом $R = 10$ нм в вершины квадрата со стороной $a = 40$ нм. Расчеты с использованием численного моделирования позволяют получить распределения намагниченности, показанные на рис. 3 (знаками отмечены отверстия, с которыми связаны заряды ± 1). Энергии этих состояний равны $E_1 = 14.1\ Ah$ (связаны два отверстия по горизонтали или вертикали), $E_2 = 17.1\ Ah$ (связаны два отверстия по диагонали) и $E_3 = 22.6\ Ah$ (связаны между собой все четыре отверстия).

С точки зрения континуальной модели, первые два из состояний на рис. 3 описываются соотношением (2) при $k = 1$, а значит, их энергии могут быть вычислены по формуле (3). Учитывая, что расстояние между центрами отверстий для второго состояния равно $a\sqrt{2}$, получаем

$$E_1 = 4\pi Ah \ln(a/R), \quad E_2 = 4\pi Ah \ln(a\sqrt{2}/R).$$

Для третьего состояния из Приложения B имеем

$$E_3 = 8\pi Ah \ln(a/R\sqrt{2}).$$

Несложно видеть, что эта энергия может быть выражена через первые две следующим образом:

$$E_3 = 4E_1 - 2E_2.$$

Данное соотношение можно использовать в качестве контрольного для проверки соответствия между результатами аналитических оценок и численного моделирования. Подставляя в него ранее найденные величины E_1 и E_2, получаем $E_3 = 22.2\ Ah$, что менее чем на 2 % отличается от расчетного значения $E_3 = 22.6\ Ah$.

Несмотря на то, что из приведенных на рис. 3 неоднородностей третья обладает наибольшей энергией, именно ею будет ограничен дальнейший анализ вихреподобных объектов, локализующихся в области четырех отверстий. Дело в том, что эта структура, фактически, представляет собой связанное состояние двух неоднородностей первого типа, что подтверждается наличием энергии связи

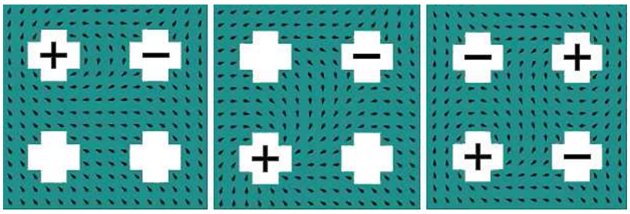

Рис. 3. Уединенные неоднородности, локализованные на четырех отверстиях

$E_3 - 2E_1 = -4\pi Ah \ln 2 < 0$, а значит, она обладает повышенной стабильностью. Это обуславливает ее особую привлекательность для применения на практике.

4. СЛУЧАЙ ДВУХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Представим себе, что вещество, заполняющее отверстия, является ферромагнитным, однако характеризуется более слабым обменным взаимодействием, чем материал самой пленки. Тогда обменный параметр A в выражении (1) становится функцией координат, и соответствующее уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид $\operatorname{div}(A \operatorname{grad} \theta) = 0$. Отсюда ясно, что при переходе через границу отверстия, где A испытывает скачок, непрерывно меняются как сама функция θ, так и проекция вектора $A \operatorname{grad} \theta$ на нормаль к границе. Следовательно, в пределе, когда внутри отверстия $A = 0$, на внешней границе отверстия должно выполняться соотношение $(\operatorname{grad} \theta)_n = 0$, где индексом n обозначена нормальная компонента. Дополняя этим граничным условием уравнение Лапласа $\Delta\theta = 0$, мы получаем краевую задачу для распределения намагниченности θ внутри образца при наличии отверстий произвольной формы, размер которых не мал в сравнении с расстоянием между ними. Покажем, что в случае двух цилиндрических отверстий такая задача может быть решена аналитически.

Рассмотрим распределение вида (2) и введем обозначения C_1 и C_2 для центров полярных систем координат, в которых заданы углы ϕ_1 и ϕ_2. Несложно убедиться, что условие $(\operatorname{grad} \theta)_n = 0$ оказывается выполнено для любой окружности, центр O которой лежит на продолжении отрезка $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$, а радиус равен $\sqrt{\mathrm{OC}_1 \cdot \mathrm{OC}_2}$ (эта ситуация является аналогом метода зеркальных изображений, хорошо известным в электростатике; см. рис. 4). Следовательно, если пленка имеет два круглых отверстия с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами R_1

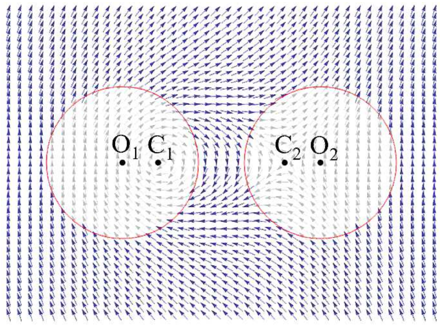

Рис. 4. Распределение намагниченности при конечных размерах отверстий

и R_2, то распределение намагниченности в образце по-прежнему задается соотношением (2) при выполнении условий

$$R_1^2 = b_1(a - b_2), \quad R_2^2 = b_2(a - b_1), \tag{4}$$

где принято во внимание, что $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| = a$, а также введены обозначения $|\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1| = b_1$, $|\mathrm{O}_2\mathrm{C}_2| = b_2$. Равенства (4) следует рассматривать как систему уравнений относительно смещений b_1 и b_2, причем с учетом очевидных требований $b_1 < R_1$, $b_2 < R_2$ эти величины определяются однозначно. В частном случае $R_1 = R_2 = R$ имеем

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4R^2}\right).$$

Заметим, что при небольших зазорах между отверстиями, когда $a \to R_1 + R_2$, решение системы (4) оказывается близко к $b_1 = R_1$, $b_2 = R_2$, так что $|\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2| \to 0$. Это значит, что при увеличении относительных размеров отверстий масштабы неоднородности становятся все меньше. Более того, существенная часть неоднородности оказывается «вырезана» самими отверстиями (см. рис. 4), будучи ярко выраженной лишь в небольшой области между ними. Этот вывод находится в хорошем соответствии с результатами численного моделирования (см., например, рис. 2) и означает, что при наличии нескольких пар отверстий в одной пленке локализующиеся на них вихреподобные объекты практически не будут искажать структуру друг друга. Данное обстоятельство обеспечивает неплохие перспективы использования изучаемых перфорированных пленок на практике в качестве основы для создания надежных носителей информации.

5. ВЛИЯНИЕ РАЗМАГНИЧИВАЮЩИХ ПОЛЕЙ В СЛУЧАЕ ОДНОГО ОТВЕРСТИЯ

Для того чтобы ввести в рассмотрение размагничивающие поля, добавим к энергии (1) магнитной пленки член следующего вида [22]:

$$E_s = \int \Phi_s h\, dS, \quad \Phi_s = -\frac{1}{2}\,\mathbf{HM},$$

где $\mathbf{M}$ — вектор намагниченности в данной точке, а $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, которая удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0.$$

Следовательно, мы можем ввести вспомогательную функцию ψ, такую что

$$\begin{gathered} \mathbf{H} = -4\pi M_s \nabla\psi, \quad \Delta\psi = \operatorname{div}\mathbf{m}, \\ \Phi_s = 2\pi M_s^2 \mathbf{m}\nabla\psi, \end{gathered} \tag{5}$$

где M_s — намагниченность насыщения, а $\mathbf{m}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{M}$ (при этом внутри отверстий мы полагаем $\mathbf{m} = 0$).

Пусть пленка содержит одно цилиндрическое отверстие радиусом R с центром в начале полярной системы координат (r, ϕ). По-прежнему полагая, что влияние размагничивающих полей невелико в сравнении с обменным взаимодействием, будем считать, что распределение намагниченности внутри образца описывается тем же соотношением $\theta = k\phi + \alpha$, $\alpha = \text{const}$, что и в случае энергии, выбранной в виде (1). Тогда с учетом выражения

$$\mathbf{m} = \big[-\sin(\theta - \phi)\mathbf{e}_r + \cos(\theta - \phi)\mathbf{e}_\phi\big]\sigma(r - R),$$

где $\sigma(r)$ — функция Хевисайда, второе соотношение (5) принимает следующий вид:

$$\Delta\psi = -\sin(\theta - \phi)[\frac{k}{r}\,\sigma(r - R) + \delta(r - R)],$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. Отсюда видно, что

$$\psi = \sin(\theta - \phi)\begin{cases} f_i(r), & r \leqslant R, \\ f_e(r), & r > R, \end{cases}$$

причем неизвестные функции могут быть найдены из следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial f_i}{\partial r}\Big) - \frac{(k-1)^2}{r^2}\,f_i = 0, \\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial f_e}{\partial r}\Big) - \frac{(k-1)^2}{r^2}\,f_e = -\frac{k}{r}, \\ f_e(R) = f_i(R), \quad f'_e(R) - f'_i(R) = -1. \end{gathered}$$

Таблица. Поведение размагничивающих полей в случае одного отверстия

	$f_i(r)$	$f_e(r)$	$\langle\Phi_s\rangle$
$k < 0$	0	$\frac{1}{k-2}\left(r - \frac{R^{2-k}}{r^{1-k}}\right)$	πM_s^2
$k = 0$	$r/2$	$R^2/(2r)$	0
$k = 1$	$-R$	$-r$	$2\pi M_s^2 \sin^2\alpha$
$k = 2$	0	$-r\ln(r/R)$	πM_s^2
$k > 2$	$\frac{1}{k-2}\,\frac{r^{k-1}}{R^{k-2}}$	$\frac{1}{k-2}\,r$	πM_s^2

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы значение $f_i(0)$ было конечным, а функция $f_e(r)$ возрастала при $r \to \infty$ как можно медленней. Решив полученные уравнения, мы далее можем найти плотность энергии внутри образца из третьего соотношения (5), а именно

$$\Phi_s = \\ = 2\pi M_s^2\Big[-\sin^2(\theta-\phi)f'_e(r) + \cos^2(\theta-\phi)(k-1)\,\frac{f_e(r)}{r}\Big].$$

При $k = 1$ значение этого выражения не зависит от угла ϕ; при других значениях k его можно усреднить по значениям ϕ от 0 до 2π, так что

$$\langle\Phi_s\rangle = \pi M_s^2\Big[-f'_e(r) + (k-1)\,\frac{f_e(r)}{r}\Big].$$

Конкретный вид функций $f_i(r)$ и $f_e(r)$, а также значения средней плотности энергии $\langle\Phi_s\rangle$ для всевозможных топологических зарядов k приведены в таблице. Несложно заметить, что ни в одном из случаев плотность энергии не зависит от расстояния r. Более того, если при $k = 1$ использовать значение $\langle\Phi_s\rangle$, усредненное по углу α, или, что то же самое, значение при $\alpha = \pi/4$ (на рис. 2 и 3 видно, что это направление является вполне типичным), то можно считать, что соотношение $\langle\Phi_s\rangle = \pi M_s^2$ выполняется при любых ненулевых значениях топологического заряда. По этой причине в случае системы нескольких отверстий плотность энергии размагничивающих полей в области самой системы также является приблизительно постоянной и равной πM_s^2, если распределение намагниченности неоднородно.

6. ВЛИЯНИЕ РАЗМАГНИЧИВАЮЩИХ ПОЛЕЙ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИЙ

Изучим поведение размагничивающих полей в случаях $N = 2$ (рис. 2) и $N = 4$ (третья неоднородность на рис. 3) на большом удалении от системы. При $r \gg a$ соотношения типа (2) приближенно дают

$$\theta = \frac{ka^n \sin n\phi}{r^n}, \tag{6}$$

где $n = 1$ для двух отверстий и $n = 2$ для четырех. Заметим, что эта формула справедлива для отверстий произвольного размера, однако значение величины a в ней может несколько отличаться от расстояния между центрами отверстий при $N = 2$ и стороны квадрата при $N = 4$: в частности, для двух отверстий, размеры которых сопоставимы с расстоянием между ними, параметру a в (6) соответствует расстояние $|\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2|$ на рис. 4, а не $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2|$, что можно учесть количественно посредством условий (4). Как и следовало ожидать, решения (6) удовлетворяют уравнению Лапласа. Подставляя их во второе соотношение (5), имеем

$$\Delta\psi = \frac{nka^n \sin\big((n+1)\phi - \theta\big)}{r^{n+1}}.$$

Пренебрегая в этом соотношении величиной θ и решая полученное уравнение, находим

$$\psi = -\frac{ka^n \sin(n+1)\phi}{4r^{n-1}}. \tag{7}$$

Подставляя это выражение в третье соотношение (5) и усредняя результат по углу ϕ, мы получаем следующее выражение для средней плотности энергии:

$$\langle \Phi_s \rangle = \frac{1}{4}\,\pi M_s^2\, \frac{k^2 a^{2n}}{r^{2n}}. \tag{8}$$

Чтобы вычислить полную энергию E_s размагничивающих полей при $k = \pm 1$, необходимо проинтегрировать Φ_s по всему объему образца. Для этого будем считать, что плотность энергии определяется формулой (8) при $r > r_0$ и соотношением $\langle \Phi_s \rangle = \pi M_s^2$ при $r < r_0$, где значение параметра r_0 можно найти из соображений непрерывности $\langle \Phi_s \rangle$. Тогда для случая четырех отверстий имеем $r_0 = a/\sqrt{2}$ и $E_s = \pi^2 M_s^2 a^2 h$. В случае двух отверстий, однако, выражение (8) убывает при $r \to \infty$ недостаточно быстро и интеграл по объему образца расходится. Этого можно избежать, ограничив область интегрирования условием $r < R_{ex}$, где R_{ex} имеет смысл характерного размера магнитной неоднородности с учетом факторов, выходящих за пределы рассматриваемой модели; тогда с учетом $r_0 = a/2$ получаем

$$E_s = \pi^2 M_s^2 a^2 h \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{2R_{ex}}{a} \Big).$$

Выражение в скобках имеет порядок 1 при всех практически реализуемых соотношениях R_{ex}/a (в частности, оно близко к 2 при значениях R_{ex}/a в диапазоне от 15 до 20), поэтому для обоих рассматриваемых значений N можно принять

$$E_s \sim \pi^2 M_s^2 a^2 h. \tag{9}$$

Сравнивая это выражение, например, с (3), приходим к выводу, что условием малости влияния размагничивающих полей на структуру изучаемых неоднородностей является соотношение $a \ll L$, где введено обозначение $L = \sqrt{A/2\pi M_s^2}$.

Используя выражение (7), можно также оценить изменение распределения намагниченности (6), непосредственно обусловленное влиянием размагничивающих полей. Для этого заметим, что эффективное магнитное поле, соответствующее энергии $E + E_s$, имеет вид

$$\mathbf{H}_{\mathrm{eff}} = \frac{2A}{M_s}\,\Delta\mathbf{m} + \mathbf{H},$$

вследствие чего уравнение Ландау—Лифшица [23] в статическом случае $[\mathbf{H}_{\mathrm{eff}} \times \mathbf{m}] = 0$ с учетом первого соотношения (5) может быть записано следующим образом:

$$\Delta\theta = -\frac{1}{L^2}\Big[\sin(\theta - \phi)\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \cos(\theta - \phi)\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big]. \tag{10}$$

Пользуясь теорией возмущений, будем искать решение уравнения (10) в виде $\theta = \theta_0 + \theta_1$, где невозмущенное распределение θ_0 задается формулой (6), а θ_1 представляет собой малую поправку первого порядка, обусловленную влиянием поля $\mathbf{H}$. Тогда, пренебрегая θ в правой части (10) и подставляя (7), имеем

$$\Delta\theta_1 = \frac{ka^n}{4r^n L^2}\,\big[\sin n\phi - n\sin(n+2)\phi\big],$$

откуда $\theta_1 = \theta_{1m} + W\theta_0 + \theta_{1r}$, где

$$\theta_{1m} = \begin{cases} \frac{kar}{32L^2}\,[\sin 3\phi + 4\ln r \sin\phi], & n = 1, \\ \frac{ka^2}{32L^2}\,[\sin 4\phi - 2\sin 2\phi], & n = 2, \end{cases} \tag{11}$$

$W \ll 1$ — постоянная величина, а θ_{1r} — некое решение уравнения Лапласа, не содержащее слагаемых, пропорциональных θ_0. Сравнивая (11) с выражением (6), можно заключить, что полученное решение имеет смысл только при условии $r \ll L$, когда $\theta_{1m} \ll \theta_0$; ясно, что это условие выполняется во всем объеме образца, если $R_{ex} \ll L$ (при этом соотношение $a \ll L$ также выполняется автоматически).

Довольно любопытным представляется вопрос о перераспределении обменной энергии в пространстве в связи с появлением поправки θ_1. Локальное изменение плотности энергии равно $\Phi_{\mathrm{es}} = A(\nabla\theta)^2 - A(\nabla\theta_0)^2 \approx 2A\nabla\theta_0\nabla\theta_1$, откуда $\Phi_{\mathrm{es}} = \Phi_{\mathrm{esm}} + \Phi_{es0} + \Phi_{\mathrm{esr}}$, где

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{esm}} &= 2A\nabla\theta_0\nabla\theta_{1m}, \\
\Phi_{es0} &= 2AW(\nabla\theta_0)^2, \\
\Phi_{\mathrm{esr}} &= 2A\nabla\theta_0\nabla\theta_{1r}.
\end{aligned}$$

Несложно заметить, что в области $a \ll r \ll L$ основной вклад в величину Φ_{es} дает первое слагаемое; усредняя его по углу ϕ, из (6) и (11) получаем

$$\langle \Phi_{\mathrm{esm}} \rangle = -\frac{1}{4}\, n\pi M_s^2\, \frac{k^2 a^{2n}}{r^{2n}} = -n\langle \Phi_s \rangle.$$

Таким образом, воздействие размагничивающих полей приводит к снижению плотности обменной энергии (а при $n = 2$ — и плотности энергии в целом) на удалении от системы отверстий. В то же время функция θ_0 минимизирует функционал (1), а значит, интеграл Φ_{es} по всему объему образца должен быть равен нулю. Отсюда можно сделать вывод, что обменная энергия неоднородности перераспределяется в направлении ее центра, т. е. неоднородность становится еще более локализованной. Поскольку, как несложно убедиться, $\langle \Phi_{\mathrm{esr}} \rangle = 0$, то отрицательный вклад Φ_{esm} может быть скомпенсирован только за счет члена Φ_{es0}, порядок и знак которого во всех точках пространства определяются коэффициентом W. Следовательно, $W \sim (a/L)^2$, причем $W > 0$, поэтому θ_0 входит в выражение для θ с коэффициентом $1 + W > 1$, что эквивалентно замене расстояния a в формуле (6) на несколько большее эффективное значение.

Приведенные выше рассуждения основывались на предположении, что $a \ll L$, т. е. влияние размагничивающих полей считалось относительно малым. В случаях, когда это соотношение не выполняется, расчет E_s можно осуществить посредством численного моделирования с использованием OOMMF. Вводя в рассмотрение размагничивающие поля и варьируя намагниченность насыщения M_s в диапазоне от 10^5 А/м до $2 \cdot 10^6$ А/м, получаем зависимости энергии E_s (рассчитанной как изменение полной энергии системы по сравнению с результатом соответствующего расчета энергии E без учета размагничивания) от отношения a/L, показанные на рис. 5 (синяя и зеленая линии). Для сравнения на том же рисунке приведены графики, отвечающие применению приближенной формулы (9), в которой выбран множитель 2 для случая $N = 2$ и множитель 1 для случая $N = 4$ (красная и желтая линии). Несложно видеть, таким образом, что рассмотренное приближение позволяет получить неплохие количественные оценки в довольно широком диапазоне значений намагниченности насыщения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного анализа следует, что вихреподобные неоднородности изучаемого типа обладают хорошей локализованностью в пространстве, которая становится еще более ярко выраженной при размерах отверстий, сопоставимых с расстоянием между ними, а также под влиянием размагничивающих полей. Тем самым эти факторы, которые могли бы существенно снизить надежность предсказаний, полученных в рамках простейших моделей, в действительности не только не препятствуют, но, напротив, способствуют возможности использования рассмотренных нанообъектов на практике. При этом учет влияния обозначенных факторов сводится, по сути, к внесению ряда поправок, которые не искажают наблюдаемую картину на качественном уровне. Так, в случае отверстий конечного размера область локализации и кривизна магнитной неоднородности не обязательно совпадают с областью локализации и кривизной самих отверстий, что и приводит к необходимости соответствующих корректировок. В случае же заметного влияния размагничивающих полей следует иметь в виду, что «кажущиеся» размеры системы отверстий, которые непосредственно обуславливают структуру и поведение магнитной неоднородности, в действительности немного превышают истинные геометрические размеры этой системы.

Таким образом, единственным существенным условием наблюдения вихреподобных неоднороностей в перфорированных ферромагнитных пленках является наличие в них сильной одноосной анизотропии типа «легкая плоскость». Такая универсальность открывает значительные перспективы использования изучаемых объектов в наноэлектронике: несложно видеть, что структуры, локализованные в области двух или четырех близкорасположенных отверстий пленки, могут находится, по меньшей мере, в одном из трех неэквивалентных состояний (одном однородном и двух неоднородных различающихся знаками топологических зарядов). Следовательно, на их основе могут быть созданы ячейки памяти, позволяющие кодировать информацию

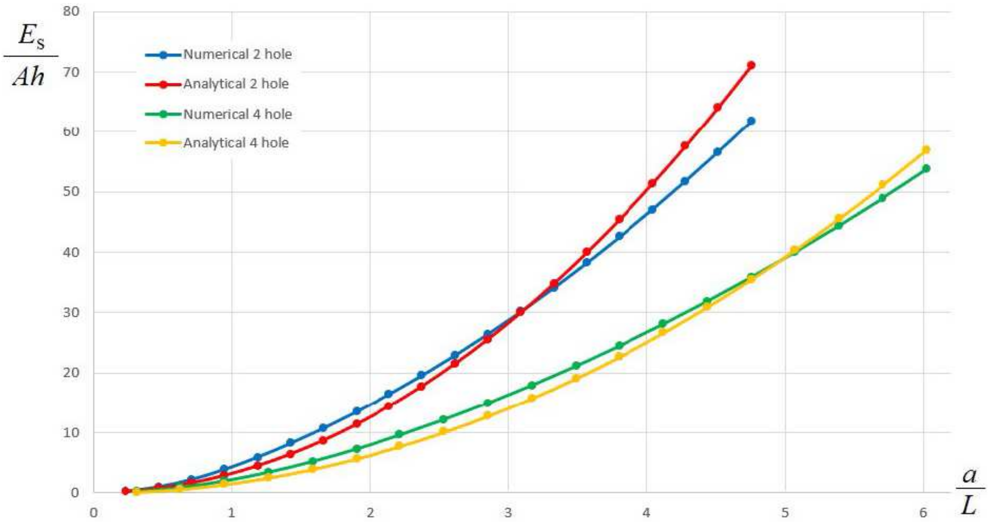

Рис. 5. График зависимости вклада E_s размагничивающих полей в энергию образца от характерного расстояния a для систем с двумя и четырьмя отверстиями

в троичной системе исчисления, что обеспечивает значительное увеличение плотности записи данных на носителях.

Финанстрование. Работа проведена в рамках государственного задания на выполнение научных исследований лабораториями (приказ MN-8/1356 от 20.09.2021).

ПРИЛОЖЕНИЕ *A*. РАСЧЕТ ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННОГО НА ДВУХ ОТВЕРСТИЯХ

Для начала заметим, что в полярной системе координат (r, ϕ) вектор $\nabla\phi$ равен по абсолютной величине вектору $\mathbf{r}/r^2$ и составляет с ним постоянный угол $\pi/2$. Учитывая это обстоятельство и подставляя (2) в (1), получаем

$$E = k^2 Ah \int \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2}\right)^2 dS = \\ = k^2 Ah \int \frac{a^2}{r_1^2 r_2^2}\, dS = k^2 Ah (G_1 + G_2),$$

где

$$G_1 = \int \frac{a^2}{r_1^2(r_1^2 + r_2^2)}\, dS, \quad G_2 = \int \frac{a^2}{r_2^2(r_1^2 + r_2^2)}\, dS.$$

Областью интегрирования G_1 является вся плоскость за исключением кругов $r_1 < R_1$ и $r_2 < R_2$. Однако подынтегральное выражение G_1 в области $r_2 < R_2$ близко к a^{-2}, а значит, круг $r_2 < R_2$ может быть включен в область интегрирования без потери точности результата. Тогда

$$G_1 = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{\infty} \frac{a^2}{r_1^2(r_1^2 + r_2^2)}\, r_1\, dr_1\, d\phi_1.$$

Рассчитывая этот интеграл с учетом того, что $r_2^2 = r_1^2 + a^2 + 2r_1 a\cos\phi_1$, и пренебрегая членами порядка $(R_1/a)^4$, получаем $G_1 = 2\pi\ln(a/R_1)$. Аналогично $G_2 = 2\pi\ln(a/R_2)$, откуда и следует выражение (3).

ПРИЛОЖЕНИЕ *B*. РАСЧЕТ ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННОГО НА ЧЕТЫРЕХ ОТВЕРСТИЯХ

Распределение намагниченности, соответствующее третьей неоднородности на рис. 3, описывается следующим соотношением, аналогичным (2):

$$\theta = \phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4,$$

где отверстия занумерованы по часовой стрелке. Отсюда, по аналогии с Приложением *A*, получаем

$$E = Ah \int \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^2} - \frac{\mathbf{r}_4}{r_4^2}\right)^2 dS.$$

Применяя тождество

$$(a - b + c - d)^2 = \\ = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2$$

и учитывая симметрию системы, имеем $E = Ah(4M_1 - 2M_2)$, где

$$M_1 = \int \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2}\right)^2 dS, \quad M_2 = \int \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^2}\right)^2 dS.$$

Пренебрегая тем, что круги, соответствующие отверстиям 3 и 4, не входят в область интегрирования M_1, и повторяя рассуждения, приведенные в Приложении A, получаем $M_1 = 4\pi \ln(a/R)$. Интеграл M_2 отличается от M_1 только расстоянием между центрами кругов, которое в случае отверстий 1 и 3 равно $a\sqrt{2}$. Следовательно, $M_2 = 4\pi \ln(a\sqrt{2}/R)$, откуда окончательно имеем $E = 8\pi Ah \ln(a/R\sqrt{2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf et al., Science **289**, 930 (2000).
2. S. Muhlbauer, F. Jonietz, C. Pfleiderer et al., Science **323**, 915 (2009).
3. M. Lee W. Kang, Y. Onose et al., Phys. Rev. Lett. **102**, 186601 (2009).
4. T. Schulz, R. Ritz, A. Bauer et al., Nature Phys. **8**, 301 (2012).
5. K. Everschor-Sitte J. Masell, R. M. Reeve et al., J. Appl. Phys. **124**, 240901 (2018).
6. М. В. Сапожников, О. В. Ермолаева, Е. В. Скороходов и др., Письма в ЖЭТФ **107**, 378 (2018).
7. J. Zang, M. Mostovoy, I. H. Han et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 136804 (2011).
8. G. Srinivasan, A. Sengupta, K. Roy, Sci. Rep. **6**, 29545 (2016).
9. Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, Изв. РАН. Сер. физ. **77**, 1493 (2013).
10. Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, Письма в ЖЭТФ **115**, 123 (2022).
11. D. Navas, R. V. Verba, A. Hierro-Rodriguez et al., APL Matter. **7**, 0811114 (2019).
12. A. R. Pereira, J. Appl. Phys. **97**, 094303 (2005).
13. F. A. Apolonio, W. A. Moria-Melo, F. P. Crisafuli et al., J. Appl. Phys. **106**, 084320 (2009).
14. D. Toscano, S. A. Leonel, P. Z. Coura et al., Appl. Phys. Lett. **101**, 252402 (2012).
15. J. Muller, A. Rosch, Phys. Rev. B **91**, 054410 (2015).
16. M. Xu, J. Zhang, D. Meng et al., Phys. Lett. A **433**, 128034 (2022).
17. Ю. И. Латышев, А. П. Орлов, А. В. Фролов и др., Письма в ЖЭТФ **98**, 242 (2013).
18. U. Welp, V. K. Vlasko-Vlasov, G. W. Cratree et al., Appl. Phys. Lett. **79**, 1315 (2001).
19. M. V. Sapozhnikov, S. N. Vdovichev, O. L. Ermolaeva et al., Appl. Phys. Lett. **109**, 042406 (2016).
20. E. Valdes-Bango, M. Velez, L. M. Alvarez-Prado et al., AIP Advancez **7**, 056303 (2017).
21. M. J. Donahue, D. G. Porter, OOMMF User's Guide, version 2.0a3. National Institute of Standard and Technolog: Gaithersburg, MD, USA (2021).
22. A. Hubert, R. Shafer, Magnetic domains. Spinger-Verlag, Berlin (2007).
23. Y. Nakatani, K. Yamada, A. Hirohata, Sci. Rep. **9**, 13475 (2019).