ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 3 (9), стр. 354–363

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГРАВИТОНА НА ФОНЕ ИСКРИВЛЁННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Е. В. Арбузова [a,b*], ***А. Д. Долгов*** [c**], ***Л. А. Панасенко*** [c***]

[a] *Кафедра высшей математики, Государственный университет «Дубна», 141983, Московская обл., Дубна, Россия*

[b] *Физический факультет, Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия*

[c] *Объединённый институт ядерных исследований, 141980, Московская обл., Дубна, Россия*

Поступила в редакцию 02 апреля 2022 г.,
после переработки 02 апреля 2022 г.
Принята к публикации 17 мая 2022 г.

Анализируется уравнение, описывающее распространение гравитационных волн (ГВ) на фоне произвольного искривленного пространства-времени. Найдены новые слагаемые, которые отсутствуют в общепринятой однородной и изотропной космологии Фридмана. Представлено несколько реалистичных примеров метрик, где проявляются эти новые слагаемые. Кратко обсуждаются возможные приложения для ГВ очень низких частот.

DOI: 10.31857/S0044451022090073
EDN: EKMVPJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение гравитационных волн (ГВ) на фоне пространства Минковского и на фоне искривленных пространств было детально рассмотрено в литературе, например в книгах [1–6]. Однако в космологической ситуации рассмотрение ограничено конформно-плоским пространством Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ). В настоящей работе мы снимаем это ограничение и выводим уравнение движения гравитационных волн в произвольной пространственно-временной метрике. Мы показываем, что в уравнении для распространения ГВ на фоне произвольного пространства-времени возникают дополнительные слагаемые, отсутствующие в случае метрики ФЛРУ.

Формально в классической книге [1] разложение точного тензора кривизны до первого порядка по малому тензору возмущения $h_{\mu\nu}$ представлено в произвольной фоновой метрике, см. уравнение 108.4. При этом уравнение сразу же сводится к случаю пустого пространства с исчезающим тензором Риччи, $R_{\mu\nu} = 0$, чтобы получить каноническое уравнение $D^2 h_{\mu\nu} = 0$ (уравнение 108.7 из книги [1]). Тем не менее, в книге явно указано, что ненулевой тензор Риччи изменит уравнение 108.7, и этот случай может представлять интерес.

Соответствующий разд. 1.5 книги [4] соответствует разделу из книги [1], см. уравнение 1.172. Это уравнение также применено к пустому пространству с исчезающим тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Процитируем книгу [4]: «Снаружи от материальных источников $T_{\mu\nu} = 0\ldots$ говорит нам, что $R_{\mu\nu} = 0$». Это немедленно исключает приложение уравнения 1.172 к космологии, помимо тривиального случая асимптотически высокой частоты. В этом случае замываются все интересные эффекты, относящиеся к метрике ФЛРУ и тем более к отклонениям от пространства-времени ФЛРУ.

В книге [4] утверждается, что невозможно зафиксировать фоновую метрику, не вводя так называемые «низкие» и «высокие» члены, соответствующие медленно и быстро меняющимся величинам. Это условие противоречит основным рассуждениям в литературе о распространении ГВ

* E-mail: arbuzova@uni-dubna.ru
** E-mail: dolgov@nsu.ru
*** E-mail: l.vetoshkina@g.nsu.ru

на фоне пространства-времени ФЛРУ. Общепринято, что фоновая метрика обычно просто берется в форме ФЛРУ, и к каким-либо проблемам это не приводит.

В настоящей работе проведена незначительная (хотя технически более сложная) модификация описания распространения ГВ в пространстве-времени, отличном от ФЛРУ, с примерами реалистичной фоновой метрики, которая определяется аналогично определению фона ФЛРУ. Обнаружено, что в таком случае более общей метрики существует несколько новых членов в уравнении, описывающем распространение ГВ, а также имеет место смешивание тензорных мод со скалярными. Все это отсутствует в случае фона ФЛРУ.

Важно отметить, что для пространства-времени, отличного от пространства ФЛРУ, невозможно ввести стандартные условия калибровки, допустимые для метрики Минковского и метрики ФЛРУ. Из-за этого усложнения нельзя разделить распространение чистых тензорных от скалярных и/или векторных мод. Хорошо известен тот факт, что может существовать смешивание между тензорными и скалярными модами в присутствии материи и сильной анизотропии (как в пространстве-времени Бьянки первого типа) или в присутствии неоднородностей. Однако в настоящей работе сделан более общий вывод без указания какой-либо конкретной формы метрики.

Как показано в книге [2], распространение гравитона в пустом, но искривленном пространстве-времени описывается уравнением

$$D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} - 2R_{\alpha\mu\nu\beta}h^{\alpha\beta} = 0, \tag{1}$$

где $h_{\mu\nu}$ — тензор возмущения полной метрики:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$g_{\mu\nu}$ — фоновая метрика, ковариантная производная D_α определена относительно фоновой метрики, а $R_{\alpha\mu\nu\beta}$ — тензор Римана в фоновом пространстве-времени, который предполагается не равным нулю, в то время как тензор Риччи исчезает, $R_{\mu\nu} = 0$.

В статье [7] утверждается, что левая часть уравнения (1) не изменится в случае распространения гравитона в однородной и изотропной вселенной, описываемой канонической метрикой ФЛРУ и для пространства-времени, заполненного идеальной жидкостью. Как тензор энергии-импульса фона, $T_{\mu\nu}$, так и поправка к нему первого порядка, $T^{(1)}_{\mu\nu}$, так же как тензор Риччи, $R_{\mu\nu}$, предполагаются не равными нулю. Разложим полный тензор энергии-импульса $\overline{T}_{\mu\nu}$ как:

$$\overline{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса фоновой материи, а $T^{(1)}_{\mu\nu}$ — индуцированный возмущениями.

Плотность энергии гравитационных волн является величиной второго порядка по $h_{\mu\nu}$, и ей пренебрегают, как и всеми другими вкладами второго порядка. Обычно предполагается, что $T_\mu^{\nu(1)}$ для смешанных компонент равен нулю. Это условие зависит от типа возмущений материи и, как хорошо известно, может быть выполнено для идеальной жидкости. При таком условии уравнение (1), переписанное в терминах смешанных компонент, сохраняет одну и ту же форму как в пустом, так и в заполненном пространстве.

Однако тут есть тонкий момент. Если наивно поднять или опустить индексы в $T_\mu^{\nu(1)}$ при помощи фоновой метрики, то можно заключить, что $T^{(1)}_{\mu\nu} = 0$. Если это так, то уравнения для распространения ГВ в терминах смешанных и нижних компонент не будут эквивалентны для произвольной метрики, а не только для метрики ФЛРУ. Действительно, далее показано, что если $T_\mu^{\nu(1)} = 0$, тогда $T^{(1)}_{\mu\nu} \neq 0$, и учет этого факта приводит к эквивалентным уравнениям в терминах смешанных и нижних компонент в произвольной метрике.

С другой стороны, если предположить, что $T^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, то результирующее уравнение в заполненном пространстве должно было бы значительно отличаться, даже в пространстве ФЛРУ, от принятого в литературе канонического уравнения, записанного в терминах смешанных компонент h^μ_ν, не говоря уже о произвольном пространстве-времени, рассматриваемом в настоящей работе.

В общепринятом подходе к описанию распространения гравитационных волн на фоне ФЛРУ вводятся следующие условия поперечности и бесследовости h^μ_ν:

$$D_\mu h^\mu_\nu = 0, \ \text{and} \ \ h^\mu_\mu = 0. \tag{4}$$

Во многих работах проверено, что уравнение (1) позволяет ввести эти условия в пространстве Эйнштейна (в пустом пространстве) с $R_{\mu\nu} = 0$. Также хорошо известно, что аналогичное верно и для заполненного пространства-времени ФЛРУ. Но, оказалось, что эти условия нарушаются в пространстве-времени с произвольной метрикой, отличной от метрики ФЛРУ. Следовательно, могут распространяться продольные (скалярные) моды ГВ, и в общем случае тензорные и скалярные моды смешиваются. Эта ситуация схожа с распространением продольной моды электромагнитной волны в плазме и возникновением ненулевой эффективной массы фотона, равной плазменной частоте.

Наши результаты полностью согласуются, в частности, с результатами работы [8], где рассматривается очень частный случай Риччи-плоской метрики (т. е. пространства с $R_{\mu\nu} = 0$), а также с результатами, приведенными в многочисленной существующей литературе, посвященной распространению ГВ в пространстве-вермени ФЛРУ с $R_{\mu\nu} \neq 0$.

Кажущееся несоответствие между уравнениями, описывающими распространение ГВ в терминах $h_{\mu\nu}$ и h^{μ}_{ν}, связано с тем фактом, что $T^{(1)}_{\mu\nu} \neq g_{\mu\alpha} T^{(1)\alpha}_{\nu}$. Действительно,

$$\overline{T}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\alpha\nu} \overline{T}^{\alpha}_{\mu} = (g_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu})(T^{\alpha}_{\mu} + T^{(1)\alpha}_{\nu}), \qquad (5)$$

так что $T^{(1)}_{\mu\nu} = h_{\alpha\nu} T^{\alpha}_{\mu} + g_{\mu\alpha} T^{(1)\alpha}_{\nu}$. Прибавление этого слагаемого в правой части уравнения (1) позволяет наложить условие поперечности на это уравнение, поэтому дополнительные моды распространения не возбуждаются на фоне ФЛРУ, в противоположность выраженному в статье [8] опасению. Подробнее см. обсуждение ниже уравнения (28).

В книге [6] детальный вывод уравнения, описывающего распространение ГВ на фоне ФЛРУ представлен для интервала фона, выраженного в терминах конформного времени τ:

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j) \qquad (6)$$

в предположении, что $a(\tau)$ — это скаляр относительно преобразований координат. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Для конформно-плоской метрики ФЛРУ удобно осуществлять переход к конформному времени, но в рассматриваемом случае произвольного пространства-времени этот переход не особенно полезен, потому что метрика, которая не является конформно-плоской, не может быть преобразована к форме, пропорциональной метрике Минковского.

В настоящей работе уравнение (1) обобщается для случая распространения гравитона на фоне произвольного пространства-времени. Показано, что в левой части этого уравнения появляются новые члены, которые исчезают в метрике ФЛРУ и которые могут доминировать в пределе низких частот.

Напомним, что впервые исследование возмущений метрики было проведено в работе [9], см. также [10], где показано, что $h_{\mu\nu}$ должны быть разделены на три типа в соответствии с их свойствам по отношению к трехмерным преобразованиям (вращениям): скалярные (h^t_t и h^i_i), векторные (h^i_t, $\partial_i h^i_t = 0$) и тензорные (h^j_i) возмущения. Свобода выбора координат позволяет ввести следующие условия на h^j_i:

$$\partial_i h^i_j = 0, \quad h^i_i = 0, \qquad (7)$$

в локальной системе отсчета с метрикой Минковского. Эти условия могут быть введены также глобально в конформно-плоской метрике ФЛРУ. Таким образом, тензорная мода h^j_i имеет только две независимые компоненты, описывающие распространение безмассового кванта с двумя, как и положено, ортогональными состояниями поляризации, то есть распространение гравитационной волны. Однако в общем случае пространства-времени это может быть неверным и могут возбуждаться дополнительные степени свободы. Проблема выбора калибровки в произвольном пространстве-времени рассмотрена в разд. 2.

Обычно эти возмущения рассматриваются либо над вакуумными решениями уравнения Эйнштейна, либо над фоновым пространством-временем ФЛРУ с метрикой

$$ds^2_F = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}\, dx^i\, dx^j. \qquad (8)$$

Далее для простоты предполагаем, что метрика ФЛРУ пространственно плоская. Переход от этой метрики к конформной (6) осуществляется с помощью линейного преобразования между временными компонентами координат, $dt = a(\tau)\, d\tau$.

Генерация и распространение гравитационных волн в космологии ФЛРУ было изучено в работах [7, 11–13]. Согласно теореме Паркера, см. работы [14, 15], генерация безмассовых частиц конформно-плоской пространственно-временной метрикой (какой, в частности, является метрика ФЛРУ) запрещена, если соответствующие полевые уравнения являются конформно инвариантными. Это верно для безмассовых фермионов, конформно-связанных скаляров и безмассовых векторных полей, вплоть до возможного нарушения конформной инвариантности аномалией следа [16]. В работе [7] было открыто, что гравитоны могут генерироваться в конформно-плоском пространстве-времени, так как их уравнение движения не является конформно-инвариантным. Гравитационные волны могли бы эффективно генерироваться в течение космологической инфляции [12, 13]. Их, вероятно, можно будет наблюдать с помощью космического интерферометра LISA, который предположительно даст информацию о механизмах первичной инфляции.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен выбору калибровки для мод четырехмерного тензора в произвольном пространстве-времени и сравнению его с распространенной калибровкой в метрике ФЛРУ. В разд. 3 выводятся уравнения, описывающие распространение гравитационных волн в произвольном пространстве-времени, при этом делаются разложение точных уравнений Эйнштейна вплоть до первого порядка по возмущениям $h_{\mu\nu}$ метрики. В разд. 4 обсуждаются вопросы, связанные с поправками первого порядка к тензору энергии-импульса. Далее, в разд. 5 выводится уравнение для распространения смешанных компонент, h^μ_ν. Раздел 6 посвящен доказательству того, что условие поперечности $D_\mu(h^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu h^\alpha_\alpha/2) = 0$ согласуется с уравнением распространения ГВ, и поэтому это условие может быть введено для произвольной метрики. В разд. 7 представлено несколько примеров реалистичных метрик, отличающихся от метрики ФЛРУ. Наконец, в разд. 8 коротко обсуждаются возможные приложения полученных результатов для случая низкочастотных ГВ.

2. ВЫБОР КАЛИБРОВКИ

Во избежание путаницы, еще раз подчеркнем, что ниже мы рассматриваем произвольную пространственно-временную метрику, а не только метрику ФЛРУ. В последнем случае выбор калибровки в значительной степени обусловлен конкретными свойствами метрики ФЛРУ.

Обсудим выбор условий калибровки, которые могут быть введены для $h_{\mu\nu}$, следуя книге [1]. Осуществим преобразование координат $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^{(1)\mu}$, где $\xi^{(1)\mu}$ — малый вектор. После таких преобразований возмущения первого порядка, $h_{\mu\nu}$, метрики (2) преобразуются как

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - D_\mu \xi^{(1)}_\nu - D_\nu \xi^{(1)}_\mu. \tag{9}$$

Пользуясь свободой выбора четырех функций $\xi^{(1)\mu}$, можно наложить следующие четыре условия:

$$D_\mu \psi^\mu_\nu = 0, \tag{10}$$

где $\psi^\mu_\nu = h^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu h/2$ и $h = h^\alpha_\alpha$. В случае плоского пространства-времени условие (10) приводит к волновому уравнению в классической форме, $D^2 h^\mu_\nu = 0$. Это же уравнение верно для предела высоких частот (эйконального предела).

Еще осталась свобода преобразований координат вида $\tilde{h}^\mu_\nu = h^\mu_\nu - D^\mu \xi^{(2)}_\nu - D_\nu \xi^{(2)\mu}$ с новыми параметрами $\xi^{(2)\mu}$, которые не нарушают условие (10). Соответственно, параметры $\xi^{(2)}_\mu$ должны удовлетворять уравнению

$$D^2 \xi^{(2)}_\mu + R^\nu_\mu \xi^{(2)}_\nu = 0. \tag{11}$$

Таким образом, мы можем использовать четыре дополнительные функции $\xi^{(2)}_\mu$ для того, чтобы зафиксировать калибровку.

В книге [1] эта свобода была использована для наложения ограничений $h_{ti} = 0$ и $h = 0$, где i — пространственный индекс. Мы, однако, используем эту свободу для того, чтобы потребовать $h_{t\alpha} = 0$ для любого α. В таком случае условие $h = 0$ может не удовлетворяться.

Все еще остается некоторая свобода координатных преобразований с параметром $\xi^{(3)\mu}$, который, вдобавок к (11), удовлетворяет условию

$$D_\mu \xi^{(3)\mu} = 0. \tag{12}$$

Очевидно, преобразование с функциями $\xi^{(3)\mu}$ не меняет значение h.

Подробное обсуждение различных типов возмущений (скалярных, векторных и тензорных) можно найти, например, в книге [3]. Однако все это было проделано только для пространства-времени ФЛРУ.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с точных уравнений Эйнштейна:

$$\overline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\mu\nu}\overline{R} = \overline{T}_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Здесь и далее в статье $\overline{T}_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ связаны с физическим тензором энергии-импульса постоянным множителем:

$$T_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{m^2_{Pl}}\, T^{(phys)}_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Верхнее подчеркивание означает, что соответствующие точные (полные) величины рассчитываются в терминах полной метрики $\bar{g}_{\mu\nu}$, см. уравнения (2) и (3). Мы будем рассматривать возмущения первого порядка по $h_{\mu\nu}$ над фоновой метрикой $g_{\mu\nu}$ и разложим полный тензор Риччи и тензор энергии-импульса следующим образом:

$$\overline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu}, \quad \overline{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{15}$$

предполагая, что все фоновые величины взяты в фоновой метрике $g_{\mu\nu}$.

Наша цель — без каких-либо предположений о форме фоновой метрики вывести уравнение в первом порядке по возмущению, описывающее эволюцию $h_{\mu\nu}$.

Из условия

$$\bar{g}_{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu} \qquad (16)$$

следует, что

$$\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \qquad (17)$$

Для скаляра Риччи имеем

$$\overline{R} = \bar{g}^{\alpha\beta}\overline{R}_{\alpha\beta} = (g^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})(R_{\alpha\beta} + R^{(1)}_{\alpha\beta}) = \\ = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}R^{(1)}_{\alpha\beta}. \qquad (18)$$

Отметим, что поправка первого порядка к скалярной кривизне получается не просто сверткой индексов с помощью фоновой метрики, а содержит дополнительный член:

$$R^{(1)} = g^{\alpha\beta}R^{(1)}_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \qquad (19)$$

Следуя книге [1], выразим возмущение тензора Риччи, $R^{(1)}_{\mu\nu}$, через возмущения метрики, $h_{\mu\nu}$, как

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(D_\alpha D_\nu h^\alpha_\mu + D_\alpha D_\mu h^\alpha_\nu\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} + D_\mu D_\nu h\right), \qquad (20)$$

где ковариантная производная D_β взята по отношению к фоновой метрике $g_{\mu\nu}$ и $D^\alpha = g^{\alpha\beta}D_\beta$. Здесь и ниже для поднятия и опускания индексов мы используем фоновую метрику, $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$.

Согласно уравнению (10), h^μ_ν удовлетворяет условию

$$D_\mu h^\mu_\nu = \frac{1}{2}\,\partial_\nu h. \qquad (21)$$

Используя правила коммутации ковариантных производных приходим к результату

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} + h^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta} + \\ + \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\mu}R^\alpha_\nu + h_{\alpha\nu}R^\alpha_\mu\right). \qquad (22)$$

Подставляя уравнения (22) и (18) в уравнение (13) и сохраняя только величины первого порядка, получаем следующее уравнение для тензора возмущения метрики:

$$D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta} - (h_{\alpha\mu}R^\alpha_\nu + h_{\alpha\nu}R^\alpha_\mu) + \\ + h_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}D^2 h = -2T^{(1)}_{\mu\nu}. \qquad (23)$$

Взяв след, приходим к уравнению

$$D^2 h + 4h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - hR = 2g^{\mu\nu}T^{(1)}_{\mu\nu}. \qquad (24)$$

В общем случае $h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \neq 0$, так что можно заключить, что $h \neq 0$. С другой стороны, в пространстве-времени ФЛРУ выполняется условие $h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0$, поэтому уравнения движения (23) и (24) не противоречат условию $h = 0$, если источник $T^{(1)}_{\mu\nu}$ является бесследовым.

Уравнение (23) совпадает с общепринятым уравнением (1) в пустом пространстве, где $R_{\mu\nu} = 0$, но существенно отличается от (1) в заполненном пространстве даже в пространстве-времени ФЛРУ. Действительно, в пространстве ФЛРУ уравнение (23) принимает вид

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{a^2}\,\partial_k^2\right)h_{ij} - H\partial_t h_{ij} - 2\left(H^2 + 3\,\frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ij} = \\ = -2T^{(1)}_{ij}, \qquad (25)$$

в то время как общепринятое уравнение (1) с учетом обусловленного источником слагаемого, которое мы обозначили как $T^{(1c)}_{\mu\nu}$, становится

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{a^2}\,\partial_k^2\right)h_{ij} - H\partial_t h_{ij} - 2\,\frac{\ddot{a}}{a}\,h_{ij} = -2T^{(1c)}_{ij}. \qquad (26)$$

На удивление оба уравнения верны, а разрешение кажущегося несоответствия спрятано в разнице между $T^{(1)}_{\mu\nu}$ и $T^{(1c)}_{\mu\nu}$, которая, согласно уравнению (5), выражается как

$$T^{(1c)}_{\mu\nu} = h_{\alpha\nu}T^\alpha_\mu + g_{\mu\alpha}T^{(1)\alpha}_\nu = h_{\alpha\nu}R^\alpha_\mu + g_{\mu\alpha}T^{(1)\alpha}_\nu. \qquad (27)$$

Помня о том, что распространение ГВ на фоне ФЛРУ описывается в предположении, что $T^{(1)\mu}_\nu = 0$, можно также проверить, что в этой фоновой метрике условие $h^\mu_\mu = 0$ выполняется просто потому, что $h_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$.

4. ПОПРАВКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА К ТЕНЗОРУ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Единственное возможное разрешение несоответствия между уравнениями (25) и (26) заключается в различии между $T^{(1)}_{\mu\nu}$ и $T^{(1c)}_{\mu\nu}$. Стандартный вывод общепринятого уравнения (1) или (26) главным образом базируется на условии $T^{(1c)\nu}_\mu = 0$, несовместимом с условием $T^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, которое на первый взгляд кажется эквивалентным. Действительно, предположим, что поправки первого порядка к тензору момента-импульса со смешанными компонентами равны нулю, $T^{(1)\nu}_\mu = 0$, как это обычно делают для случая пространства-времени ФЛРУ, заполненного идеальной жидкостью. Тогда, если мы рассматриваем уравнение для $h_{\mu\nu}$, то нам следует опускать индексы, используя полный метрический тензор $\bar{g}_{\mu\nu}$, тогда

$$\overline{T}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\alpha}\overline{T}^\alpha_\nu = T_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}T^\alpha_\nu + g_{\mu\alpha}T^{(1)\alpha}_\nu = \\ = T_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}T^\alpha_\nu. \qquad (28)$$

Последнее равенство верно, если $T_\mu^{(1)\nu} = 0$.

Следовательно,

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = h_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha = \frac{1}{2} \left(h_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha + h_{\nu\alpha} R_\mu^\alpha - h_{\mu\nu} R \right), \quad (29)$$

где использовано уравнение Эйнштейна для фоновой кривизны:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 = T_{\mu\nu}. \quad (30)$$

Подставляя выражение (29) для $T_{\mu\nu}^{(1)}$, из уравнения (23) получаем

$$D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - g_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D^2 h = 0. \quad (31)$$

Поскольку последние два члена в уравнении для фона ФЛРУ исчезают, мы получим каноническое уравнение (1).

С другой стороны, каноническое уравнение (1) или (26), которое следует из уравнения (1) для метрики ФЛРУ, изначально получено из уравнения для h_μ^ν в смешанных компонентах. В этом случае индексы опущены с помощью фоновой метрики $g_{\mu\nu}$, поэтому из условия $T_\mu^{\nu(1)} = 0$ мы получим $T_{\mu\nu}^{(1c)} = 0$, так что оба способа в конечном счете приводят к одному и тому же результату.

Заметим, что условие $T_\mu^{\nu(1)} = 0$ не обязательно верно, и существует несколько реалистичных случаев, когда это условие не выполняется. Например, $T_\mu^{\nu(1)} \neq 0$ в уравнении, описывающем переходы гравитонов в фотоны во внешнем магнитном поле, даже на фоне пространства Минковского, см., в частности, [17]. Другой известный пример — анизотропный тензор напряжений, который может быть индуцирован нейтрино и фотонами [18, 19]. Все эти случаи рассматриваются пертурбативно, так что фоновая метрика остается метрикой ФЛРУ.

Подчеркнем, что если фоновая метрика отличается от метрики Фридмана, то последние два слагаемых в уравнении (31) могут значительно изменить характер решений, особенно первое из этих слагаемых, поскольку оно не исчезает в пределе нулевой частоты.

5. УРАВНЕНИЕ В СМЕШАННЫХ КОМПОНЕНТАХ

Теперь выведем уравнение для смешанных компонент, h_ν^μ. Для этого начнем с уравнения

$$\overline{R}_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu \overline{R}/2 = \overline{T}_\nu^\mu, \quad (32)$$

которое разложим до первого порядка по возмущению:

$$\overline{R}_\nu^\mu = R_\nu^\mu + R_\nu^{\mu(1)}. \quad (33)$$

Первая поправка к $R_{\mu\nu}^{(1)}$ рассчитывается в книге [1] и представлена здесь в уравнениях (20) и (22). Индексы поднимаются следующим образом:

$$\overline{R}_\nu^\mu = \bar{g}^{\beta\mu} \overline{R}_{\nu\beta} = (g^{\beta\mu} - h^{\beta\mu})(R_{\nu\beta} + R_{\nu\beta}^{(1)}) = \\ = R_\nu^\mu - h^{\mu\beta} R_{\nu\beta} + g^{\mu\beta} R_{\nu\beta}^{(1)}. \quad (34)$$

Аналогично,

$$\overline{R} = \delta_\beta^\alpha \overline{R}_\alpha^\beta = R - h^{\mu\beta} R_{\mu\beta} + g^{\mu\beta} R_{\mu\beta}^{(1)}. \quad (35)$$

Наконец, в первом порядке по возмущению получаем

$$g^{\mu\beta} R_{\nu\beta}^{(1)} - h^{\mu\beta} R_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} = 0, \quad (36)$$

где, согласно обсуждению в предыдущем разделе, мы приняли $T_\nu^{\mu(1)} = 0$.

Для фона ФЛРУ произведение $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)}$ исчезает в силу условий $D_\alpha h_\beta^\alpha = 0$ и $h_\mu^\mu = 0$, и $h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = 0$, так как $R_{tj} = 0$, $R_{ij} \sim \delta_{ij}$, $h^{t\mu} = 0$ и $h_i^i = 0$. В то же время, оба этих произведения в общем случае ненулевые, если фон отличается от фона ФЛРУ. Исходя из уравнения (22), $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} = -D^2 h/2$. При этом $h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$, вообще говоря, не обращается в нуль для произвольно взятого тензора Риччи.

Взяв выражение (22) для $R_{\nu\beta}^{(1)}$ и используя условие, что для фона ФЛРУ $R_j^i \sim \delta_j^i$, приходим к выводу, что последнее слагаемое в уравнении (22) равно $h^{\mu\beta} R_{\nu\beta}$ и взаимоуничтожается со вторым слагаемым в левой части уравнения (36). В конечном счете, мы получаем общепринятое уравнение для смешанных компонент:

$$D_\alpha D^\alpha h_\nu^\mu - 2h_\alpha^\beta R^{\mu\alpha}{}_{\beta\nu} = 0, \quad (37)$$

где индексы подняты с помощью фонового метрического тензора $g^{\mu\nu}$.

В случае фона ФЛРУ это уравнение в переходит в уравнение

$$\left(\partial_t^2 - \frac{\Delta}{a^2} + 3H?partial_t \right) h_\nu^\mu = 0. \quad (38)$$

Сделав переход к $h_{\mu\nu}$ согласно

$$h_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} = -h_{\alpha\nu} \delta^{\mu\alpha}/a^2 \quad (39)$$

получаем

$$\left(\partial_t^2 - \frac{\Delta}{a^2} - H\partial_t - \frac{2\ddot{a}}{a}\right)h_{\nu\mu} = 0. \quad (40)$$

Уравнение совпадает с общепринятым уравнением (26), но не с уравнением (25), если предположить, что правые части обоих уравнений исчезают. Однако, выше по тексту мы показали, что взятие $T_\nu^{\mu(1)} = 0$ в метрике ФЛРУ для смешанных компонент приводит к $T_{\mu\nu}^{(1)} \neq 0$ с нижними индексами.

Полезно было бы представить уравнения в терминах конформного времени, поскольку их часто анализируют таким образом. Но, если метрика не является конформно-плоской, то переход к конформному времени не имеет особого смысла.

6. ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ ПОПЕРЕЧНОСТИ ДЛЯ НЕНУЛЕВОГО h_μ^μ

В этом разделе показано, что действие ковариантной производной D_μ на обе части уравнения для h_ν^μ дает самосогласованные результаты. Для простоты чтения повторим здесь некоторые уравнения, уже приведенные выше.

Начнем с точных уравнений

$$\overline{R}_\nu^\mu - \frac{1}{2}\,\delta_\nu^\mu \overline{R} = \overline{T}_\nu^\mu \quad (41)$$

и разложим $\overline{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu + T_\nu^{(1)\mu}$ и $\overline{R}_\nu^\mu = R_\nu^\mu + R_\nu^{(1)\mu}$. Таким образом, как и ожидалось, для фоновой метрики получаем

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\,\delta_\nu^\mu R = T_\nu^\mu. \quad (42)$$

Однако здесь мы используем поправку первого порядка к $R_{\mu\nu}$, как представлено в книге [1]:

$$R_{\alpha\nu}^{(1)} = \\ = \frac{1}{2}\left(D_\beta D_\nu h_\alpha^\beta + D_\beta D_\alpha h_\nu^\beta - D^2 h_{\alpha\nu} - D_\alpha D_\nu h\right). \quad (43)$$

Чтобы поднять один нижний индекс, используем $g^{\mu\alpha}$. Тогда получим

$$D^2 h_\nu^\mu + 2R^{\mu\alpha}_{\cdot\,\cdot\,\nu\beta} h_\alpha^\beta + R_\nu^\alpha h_\alpha^\mu - R_\alpha^\mu h_\nu^\alpha - \\ - \delta_\nu^\mu\left(R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\,D^2 h\right) = -2T_\nu^{(1)\mu}, \quad (44)$$

где $D^2 = g^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta$ и принято во внимание, что $h = h_\alpha^\alpha \neq 0$ и $D_\mu h_\nu^\mu = \partial_\nu h/2$.

Действуя D_μ на член первого порядка по возмущению и применяя правила коммутации для ковариантных производных, получаем

$$D_\mu D^2 h_\nu^\mu = D_\mu(R_\sigma^\mu h_\nu^\sigma) - D_\mu(R^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,\mu}_{\;\,\nu\alpha} h_\sigma^\alpha) - \\ - R^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,\alpha}_{\;\,\nu\mu} D_\alpha h_\sigma^\mu + \frac{1}{2}\,D^2(D_\nu h). \quad (45)$$

Подставляя уравнение (45) в дивергенцию от левой части уравнения (44), получаем

$$D_\mu(R_\sigma^\mu h_\nu^\sigma) - D_\mu(R^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,\mu}_{\;\,\nu\alpha} h_\sigma^\alpha) - R^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,\alpha}_{\;\,\nu\mu} D_\alpha h_\sigma^\mu + \\ + \frac{1}{2}\,D^2(D_\nu h) + 2D_\mu(R^{\mu\sigma}_{\cdot\,\cdot\,\nu\alpha} h_\sigma^\alpha) + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha + \\ + \frac{1}{2}\,R_\nu^\alpha D_\alpha h - D_\mu(h_\nu^\alpha R_\alpha^\mu) - D_\nu(R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) - \frac{1}{2}\,D_\nu D^2 h = \\ = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \quad (46)$$

Первое и восьмое слагаемые в левой части этого уравнения взаимно уничтожаются, второе и пятое — частично сокращаются до $D_\mu(R^{\mu\sigma}_{\cdot\,\cdot\,\nu\alpha} h_\sigma^\alpha)$, таким образом, получаем

$$D_\mu(R^{\mu\sigma}_{\cdot\,\cdot\,\nu\alpha} h_\sigma^\alpha) - R^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,\mu}_{\;\,\nu\alpha} D_\mu h_\sigma^\alpha + \frac{1}{2}\,D^2(D_\nu h) + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha + \\ + \frac{1}{2}\,R_\nu^\alpha D_\alpha h - D_\nu(R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) - \frac{1}{2}\,D_\nu D^2 h = \\ = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \quad (47)$$

Используя соотношения для коммутатора ковариантных производных, находим

$$D^2 D_\nu h - D_\nu D^2 h = R_\nu^\alpha D_\alpha h. \quad (48)$$

Наконец, получаем

$$h_\sigma^\alpha D_\mu R^{\mu\sigma}_{\cdot\,\cdot\,\nu\alpha} + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha - D_\nu(R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) + R_\nu^\mu D_\mu h = \\ = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \quad (49)$$

С помощью тождества Бьянки первый член здесь можно переписать в виде

$$h_\sigma^\alpha D_\mu R^{\mu\sigma}_{\cdot\,\cdot\,\nu\alpha} = h_\sigma^\alpha(D_\nu R_\alpha^\sigma - D_\alpha R_\nu^\sigma) \quad (50)$$

что приводит к

$$h_\sigma^\alpha(D_\nu R_\alpha^\sigma - D_\alpha R_\nu^\sigma) + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha - h_\alpha^\beta D_\nu R_\beta^\alpha - \\ - R_\beta^\alpha D_\nu h_\alpha^\beta + R_\nu^\mu D_\mu h = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \quad (51)$$

В этом уравнении все члены, содержащие производные от тензора Риччи, точно сокращаются, и в результате мы приходим к следующему уравнению, справедливость которого надо проверить:

$$R_\beta^\alpha D_\nu h_\alpha^\beta - R_\nu^\mu D_\mu h = 2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \quad (52)$$

Теперь мы должны проверить, равны ли друг другу правая и левая части уравнения (52). Для этого применим следующие условия сохранения:

$$\overline{D}_\mu \overline{T}^\mu_\nu = 0 \quad \text{и} \quad D_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{53}$$

Таким образом, в первом порядке по возмущению получаем

$$\overline{D}_\mu \overline{T}^\mu_\nu = D_\mu T^\mu_\nu + D_\mu T^{(1)\mu}_\nu + \Gamma^{(1)\mu}_{\ \alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^{(1)\alpha}_{\ \nu\mu} T^\mu_\alpha. \tag{54}$$

Третий член в правой части этого уравнения равен нулю, потому что поправки к символам Кристоффеля в первом порядке по возмущению имеют вид

$$\Gamma^{(1)\mu}_{\ \nu\alpha} = \frac{1}{2}\left(D_\nu h^\mu_\alpha + D_\alpha h^\mu_\nu - D^\mu h_{\nu\alpha}\right) \tag{55}$$

и, следовательно, $\Gamma^{(1)\mu}_{\ \alpha\mu} = D_\alpha h/2$.

Из уравнений (54) и (55) получаем

$$\begin{aligned} D_\mu T^{(1)\mu}_\nu &= \Gamma^{(1)\alpha}_{\ \nu\mu} T^\mu_\alpha - \Gamma^{(1)\mu}_{\ \alpha\mu} T^\alpha_\nu = \\ &= \frac{1}{2}\left(D_\nu h^\alpha_\mu + D_\mu h^\alpha_\nu - D^\alpha h_{\nu\mu}\right)\left(R^\mu_\alpha - \frac{1}{2}\,\delta^\mu_\alpha R\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\,(R^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\nu R) D_\alpha h. \end{aligned} \tag{56}$$

Здесь мы учли уравнения Эйнштейна для фоновой метрики (42).

После простых вычислений получаем

$$D_\mu T^{(1)\mu}_\nu = \left(R^\mu_\alpha D_\nu h^\alpha_\mu - R^\mu_\nu D_\mu h\right)/2. \tag{57}$$

Таким образом, мы видим, что обе части в уравнении (52) равны. Это означает, что условие (10), $D_\mu \psi^\mu_\nu = 0$, совместимо с уравнением (44).

Вычислим след уравнения (44). Найдем

$$D^2 h + 2R^\mu_\nu h^\nu_\mu = 2T^{(1)\mu}_\mu. \tag{58}$$

Казалось бы, это уравнение противоречит уравнению (24). Но, если мы воспользуемся соотношением между $T^{(1)\mu}_\mu$ и $g^{\mu\nu} T^{(1)}_{\mu\nu}$, которое можно получить из уравнения (28), то получим

$$T^{(1)\mu}_\mu = g^{\mu\nu} T^{(1)}_{\mu\nu} - h^\nu_\mu\left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\,\delta^\mu_\nu R\right), \tag{59}$$

чем и восстановим согласованность.

На фоне ФЛРУ $R^\mu_\alpha D_\nu h^\alpha_\mu = R^\mu_\nu h^\nu_\mu = 0$ и обычное уловие $T^{(1)\mu}_\nu = 0$ позволяет наложить требование $h = 0$. Однако в случае произвольного фона наложить одновременно условия ковариантного сохранения источника и равенства нулю его следа, по-видимому, вообще невозможно.

7. РЕАЛИСТИЧНЫЕ МЕТРИКИ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ МЕТРИКИ ФЛРУ

Интересные отклонения космологической метрики от метрики Фридмана индуцируются возмущениями плотности над классическим фоном ФЛРУ. Они детально рассмотрены в книгах [3, 5, 6, 20], см. также [21]. Предположим, что существует облако материи с плотностью энергии и давления, которые отличаются от средних космологических. Вообще говоря, облако может быть анизотропным, но влияние дополнительного члена $h^\alpha_\beta R^\beta_\alpha$ (36) будет проявляться даже в случае изотропного распределения материи в облаке. Поэтому, для простоты, ограничимся этим случаем.

Выберем изотропные координаты подобные координатам Шварцшильда, в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = A\,dt^2 - B\,\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{60}$$

где функции A и B зависят от r и t. Соответствующие символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} &\Gamma^t_{tt} = \frac{\dot A}{2A}, \quad \Gamma^t_{jt} = \frac{\partial_j A}{2A}, \quad \Gamma^j_{tt} = \frac{\delta^{jk}\partial_k A}{2B}, \\ &\Gamma^t_{jk} = \frac{\delta_{jk}\dot B}{2A}, \quad \Gamma^k_{jt} = \frac{\delta^k_j \dot B}{2B}, \\ &\Gamma^k_{lj} = \frac{1}{2B}\,(\delta^k_l \partial_j B + \delta^k_j \partial_l B - \delta_{lj}\delta^{kn}\partial_n B). \end{aligned} \tag{61}$$

Соответствующий тензор Риччи дается формулами

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{\Delta A}{2B} - \frac{3\ddot B}{2B} + \frac{3\dot B^2}{4B^2} + \frac{3\dot A\dot B}{4AB} + \frac{\partial^j A\partial_j B}{4B^2} - \\ &- \frac{\partial^j A\partial_j A}{4AB}, \end{aligned} \tag{62}$$

$$R_{tj} = -\frac{\partial_j \dot B}{B} + \frac{\dot B\partial_j B}{B^2} + \frac{\dot B\partial_j A}{2AB}, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \delta_{ij}\left(\frac{\ddot B}{2A} - \frac{\Delta B}{2B} + \frac{\dot B^2}{4AB} - \frac{\dot A\dot B}{4A^2}\right) - \\ &- \delta_{ij}\left(\frac{\partial^k A\partial_k B}{4AB} + \frac{\partial^k B\partial_k B}{4B^2}\right) - \frac{\partial_i\partial_j A}{2A} - \frac{\partial_i\partial_j B}{2B} + \\ &+ \frac{\partial_i A\partial_j A}{4A^2} + \frac{3\partial_i B\partial_j B}{4B^2} + \frac{\partial_i A\partial_j B + \partial_j A\partial_i B}{4AB}. \end{aligned} \tag{64}$$

Здесь и далее пространственные индексы подняты с помощью символа Кронекера, $\partial^j A = \delta^{jk}\partial_k A$.

Пространственные производные произвольной функции от r равны

$$\partial_i f = \frac{x_i}{r}\,f', \quad \partial_i\partial_i f = \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}\right) f' + \frac{x_i x_j}{r^2}\,f'', \tag{65}$$

где штрих означает дифференцирование по r. Так как R_{ij} содержит некоторые другие члены, помимо тех, которые пропорциональны δ_{ij}, следовательно, произведение $h^\alpha_\beta R^\beta_\alpha$ в общем случае не исчезает.

Обычно возмущения малы, так что и A, и B слабо отклоняются от единицы, а в R_{ij} доминируют члены, линейные по A и B. Для частного случая возмущений $(A-1) \sim r^2$ и $(B-1) \sim r^2$, см. работу [21], таким образом, $R_{ij} \sim \delta_{ij}$ и $h^\alpha_\beta R^\beta_\alpha = 0$. Однако это не общий случай. Более того, известно, что в режиме доминирвания материи возмущения растут как космологический масштабный фактор, поэтому поправка к тензору Риччи может становиться близкой по величине к значению фона или даже превышать его.

Есть еще несколько физически интересных метрик, для которых произведение $h^\alpha_\beta R^\beta_\alpha$ не равно нулю. Одним из простых примеров является коллапс пылеобразной сферы, описанный в книге [1]. Это так называемое решение Толмана в отсутствие давления. Тем же свойством обладает и более общее решение Толмана с ненулевым давлением.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что для произвольного фона в общем случае невозможно удовлетворить сразу двум стандартным условиям, $D_\mu h^\mu_\nu = 0$ и $h^\mu_\mu = 0$, на тензорные возмущения. Показано, что условие $D_\mu \psi^\mu_\nu = 0$ (10) может быть введено в любом пространстве-времени. Конечно, тензорные моды могут распространяться на любом фоне, но они могут не быть чистыми тензорными, или поперечными, модами. Согласно уравнениям, выведенным в настоящей работе, тензорные и скалярные моды смешиваются и распространяются вместе.

В каком-то смысле это явление похоже на распространение электромагнитных волн в плазме, когда возбуждаются продольные моды. Более того, в неоднородной и анизотропной плазме режимы распространения мод могут быть еще более сложными. Однако в пределе высоких частот (эйкональном приближении) мы возвращаемся в «привычное русло».

Обнаруженный в настоящей работе дополнительный член в уравнении распространения гравитационных волн на фоне, который отличается от фона ФЛРУ, может значительно повлиять на форму низкочастотного хвоста в спектре ГВ, в частности на ГВ, которые были сгенерированы в течение инфляции, см. работы [12,13]. Их интенсивность на низких частотах может быть значительно подавлена. Из-за этого строгий предел на очень длинные волны, полученный из анализа данных по поляризации CMB [22], не обязательно означает, что традиционная инфляция, индуцируемая скалярным полем, инфлатоном, [23] исключена. Этот вопрос требует отдельного изучения.

Благодарности. Авторы благодарят В. А. Рубакова за очень важный комментарий и обсуждение.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-42-09010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 2. Теория поля*, Физмалит, Москва, (2020).
2. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
3. V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, New York (2005).
4. M. Maggiore, *Gravitational Waves*, Oxford University Press (2008).
5. С. Вайнберг, *Космология*, URSS, Москва (2018).
6. Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория*, Изд-во Красанд/URSS, Москва (2010).
7. L. P. Grishchuk, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 825 (1974); Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975).
8. S. Deser and M. Henneaux, Class. Quant. Grav. **24**, 1683 (2007) [arXiv:gr-qc/0611157].
9. E. M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Phys. **16**, 587 (1946).
10. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, **80**, 391 (1963).
11. А. В. Захаров, ЖЭТФ **77**, 434 (1979).
12. А. А. Старобинский, Письма в ЖЭТФ **30**, 719 (1979).
13. V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, and A. V. Veryaskin, Phys. Lett. B **115**, 189 (1982).
14. L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
15. L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).

16. А. Д. Долгов, Письма в ЖЭТФ **32**, 673 (1980).

17. A. D. Dolgov and D. Ejlli, JCAP **12**, 003 (2012) [arXiv:gr-qc/1211.0500].

18. S. Weinberg, Phys. Rev. D **69**, 023503 (2003) [arXiv:astro-ph/0306304].

19. S. Saga, K. Ichiki, and N. Sugiyama, Phys. Rev. D **91**, 024030 (2015) [arXiv:astro-ph.CO/1412.1081]

20. C. Bambi and A. D. Dolgov, *Introduction to Particle Cosmology*, Springer (2015).

21. E. V. Arbuzova, A. D. Dolgov, and L. Reverberi, Phys. Lett. B **739**, 279 (2014) [arXiv:gr-qc/1406.7104].

22. Planck Collaboration, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020) [arXiv:1807.06209].

23. A. D. Linde, Phys. Repts. **333**, 17 (2000).