

# ДЕКОГЕРЕНЦИЯ КОНДЕНСАТА В ГИБРИДНОМ АТОМАРНО-ОПТИЧЕСКОМ КВАНТОВОМ ГИРОСКОПЕ

*В. А. Томилин\* , Л. В. Ильичёв*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 1 мая 2022 г.,  
после переработки 1 мая 2022 г.  
Принята к публикации 24 мая 2022 г.

Развивается идея гибридного атомарно-оптического квантового гироскопа, главным элементом которого является кольцевая структура бозе-эйнштейновского конденсата атомов. Зондирующее оптическое излучение обеспечивает чувствительность системы к вращению и регистрирует в режиме оптической интерферометрии реакцию конденсата на вращение. Процесс измерения угловой скорости вращения гироскопа может в идеале осуществляться без потери атомов, но неизбежно приводит к деградации пространственной когерентности конденсата. Построена математическая модель этого принципиально важного явления. Выведено квантовое управляющее уравнение для состояния конденсата и получено его аналитическое решение при относительно медленной декогеренции.

DOI: 10.31857/S004445102209005X  
EDN: EKGRCA

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в методах создания и контроля атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна (БЕС) позволяет рассматривать перспективные схемы его применения в метрологии [1–4]. Одним из практически значимых приложений является использование БЕС в устройствах инерциальной навигации. Ценным ресурсом при этом оказывается пространственная когерентность конденсата как макроскопической протяженной квантовой системы. Ее наличие теоретически позволяет инициализировать конденсат в различных экзотических квантовых состояниях, например NOON-состояниях [5, 6] или запутанных когерентных состояниях [7], что может существенно повысить чувствительность таких устройств.

Все известные нам схемы квантовой гироскопии с использованием ультрахолодных атомов основаны на прямой регистрации интерференции волн материи. В их основе лежит эффект влияния вращения на наклон полос при интерференции фрагментов единого конденсата [8]. При этом неизбежно разрушение конденсата при проведении измере-

ния. Весьма привлекательным было бы создание гироскопа, который использует преимущества БЕС, однако не предполагает потери атомов в процессе функционирования. В работе [9] была предложена схема гибридного атомарно-оптического квантового гироскопа. Его основой является кольцевая структура БЕС, нарушенная на узком участке дополнительным оптическим потенциалом. Это делает состояние конденсата чувствительным к вращению системы отсчета всего устройства в плоскости кольца. Роль излучения двоякая: оптический пучок создает упомянутый дополнительный потенциал и одновременно считывает информацию о реакции конденсата на вращение. Пучок приобретает фазовый сдвиг, зависящий от числа попавших в него атомов и регистрируемый интерферометром Маха–Цандера (МЦИ). Модификация состояния конденсата при вращении с угловой скоростью  $\Omega$  меняет этот фазовый сдвиг:  $\Theta = \Theta(\Omega)$ .

Измерение  $\Omega$  по сдвигу интерференционной картины на выходе МЦИ не требует разрушения конденсата для наблюдения его интерференции, как это имеет место в ранее предложенных схемах гироскопии на основе БЕС, и может проходить без потери атомов. Однако указанный эффект использует пространственную когерентность конденсата — именно она определяет его сильную реакцию на вращение и поэтому принципиально важна.

\* E-mail: 342tomilin@mail.ru

В работе [9] использовалась простейшая модель конденсата, где он описывается единой волновой функцией. При этом была отмечена ограниченность такого подхода. Действительно, через зондирующий оптический пучок информация о состоянии конденсата (о числе атомов в области пучка) поступает в окружение. Происходит своего рода непрерывное измерение. Конденсат становится открытой квантовой системой, поэтому пространственная когерентность ВЕС неизбежно деградирует при функционировании гироскопа. Предметом настоящей работы является построение теоретической модели этого процесса, без чего предлагаемая схема гироскопа не может считаться полной.

Конденсат описывается в рамках формализма вторичного квантования. Это позволяет корректно вывести основное управляющее уравнение для статистического оператора (матрицы плотности) конденсата. Оказывается возможным получить аналитическое решение этого уравнения в широком диапазоне входящих в него параметров. Это дает математическую модель эволюции состояния ВЕС во времени при функционировании гироскопа, т.е. наиболее полное описание процесса декогеренции конденсата. Воздействие нерезонансного оптического излучения на атомарные конденсаты, приводящее к декогеренции, изучалось и ранее [10–14] в основном в контексте получения их фазово-контрастных изображений в непрерывном и импульсном режимах. К сожалению, нет возможности непосредственно воспользоваться вариантами описания эволюции конденсата как открытой квантовой системы, примененными в работах [10–14], поскольку специфика каждой решаемой задачи привносит свои особенности в вывод и форму соответствующего эволюционного уравнения.

В разд. 2 построен фрагмент основного управляющего уравнения, отвечающий за явление декогеренции. Вывод этого уравнения и его решение приведены в разд. 3. В разд. 4 подводятся основные итоги и кратко намечены направления дальнейших исследований.

## 2. МОДЕЛЬ ДЕКОГЕРЕНЦИИ

Мы сохраним, где это возможно, обозначения работы [9]. Вывод управляющего уравнения целесообразно начать с рассмотрения кольцевого резонатора в схеме гироскопа (рисунок). Его роль состоит в формировании оптического пучка, зондирующего кольцо с ВЕС. Амплитуда пучка на выходе резона-

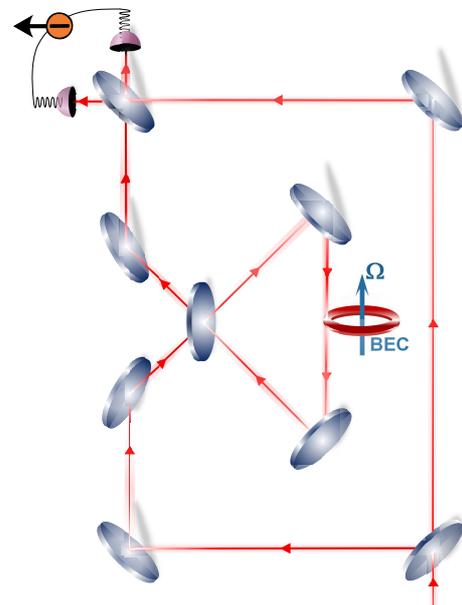
тора связана с амплитудой падающего пучка соотношением [9]

$$\alpha_1(n) = \frac{1 - e^{-\nu l/c} e^{i\phi(n)l/c}}{1 - e^{-\nu l/c} e^{-i\phi(n)l/c}} \alpha_0 = e^{i\Theta(n)} \alpha_0. \quad (1)$$

Здесь  $l$  — длина резонатора,  $\nu$  — параметр размерности частоты такой, что фактор  $e^{-\nu l/c} = \sqrt{1 - T}$ , где  $T$  — коэффициент отражения зеркала на входе–выходе резонатора ( $c$  — скорость света),  $\phi(n) = nU/\hbar$ ,  $n$  — число атомов в пучке,  $U$  — величина потенциала, создаваемого пучком. Для простоты считается, что кольцевой резонатор отрегулирован так, что фазовый сдвиг, вносимый удлинением пути пучка в резонаторе, пренебрежимо мал и величина  $\Theta(n)$  обусловлена только присутствием атомов конденсата в пучке. Если их число становится оператором  $\hat{n}$ , операторную природу по отношению к состоянию конденсата приобретает и амплитуда  $\alpha_1(\hat{n})$ . Считаем, что сбалансированный делитель пучка на входе MZI создает амплитуды  $\alpha_0$  в каждом из внутренних плеч интерферометра. Амплитуды после выходного (сбалансированного) делителя пучка,

$$\alpha_{\pm}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_0 \pm \alpha_1(n)), \quad (2)$$

также становятся операторами  $\alpha_{\pm}(\hat{n})$ .



Принципиальная схема атомно-оптического гироскопа. Все устройство находится во вращающейся системе отсчета. Направление вектора угловой скорости  $\Omega$  этого вращения показано стрелкой

Компоненты искомого управляющего уравнения, ответственные за декогеренцию конденсата, долж-

ны образовывать трехчленную структуру Линдблада, универсально возникающую при описании необратимых процессов:

$$(\partial_t \hat{\rho})_{decoh} \propto \sum_{\sigma=+,-} \left( \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\rho} \bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \right). \quad (3)$$

Здесь  $\hat{\rho}$  — статистический оператор атомарного конденсата; операторами Линдблада являются амплитуды  $\alpha_{\pm}(\hat{n})$  и их сопряженные  $\bar{\alpha}_{\pm}(\hat{n})$ . Этот выбор обоснован тем, что след первого (так называемого сэндвичного) слагаемого в правой части соотношения (3),  $\sum_{\sigma=\pm} \text{Tr}[\bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\rho}]$ , оказывается тогда пропорциональным частоте регистрации фотоотчетов на выходе интерферометра, т. е. интенсивности контактов ВЕС с окружением. Информация о числе атомов в пучке содержится в разности

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\bar{\alpha}_+(\hat{n})\alpha_+(\hat{n}) - \bar{\alpha}_-(\hat{n})\alpha_-(\hat{n}))\hat{\rho}] &= \\ &= \text{Tr}[(\alpha_1(\hat{n})\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1(\hat{n})\alpha_0)\hat{\rho}] = \\ &= 2|\alpha_0|^2 \text{Tr}(\cos \Theta(\hat{n})\hat{\rho}). \end{aligned} \quad (4)$$

Необходимо определить коэффициент пропорциональности, превращающий соотношение (3) в равенство. Он имеет размерность  $c^{-1}$  и может быть найден через связь амплитуды  $\alpha_0$  и напряженности  $E$  поля оптической волны на входе резонатора:

$$E = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{V}} \alpha_0. \quad (5)$$

Здесь  $\omega$  — частота излучения, а  $V$  — объем оптической моды, к которой отнесена амплитуда  $\alpha_0$ . Полагаем  $V = SL$ , где  $S$  — сечение пучка, а  $L$  — длина когерентности<sup>1)</sup>. Соотношение (5) позволяет выразить  $\alpha_0$  через легко контролируемую величину  $W = cSE^2/4\pi$  — поступающую в MZI мощность. Поскольку та же мощность покидает интерферометр, коэффициент пропорциональности в (3) равен  $c/L$  (обратное время когерентности). С учетом выражений (1) и (2) имеем

$$(\partial_t \hat{\rho})_{decoh} = \frac{|\alpha_0|^2 c}{L} (e^{i\Theta(\hat{n})} \hat{\rho} e^{-i\Theta(\hat{n})} - \hat{\rho}). \quad (6)$$

Это наиболее общий вид структуры, отвечающей за декогеренцию конденсата.

<sup>1)</sup> Считаем, что  $L \gg l$ , т. е. конечная длина когерентности излучения не мешает наблюдению интерференции, несмотря на удлинение пути в одном из плеч MZI из-за присутствия кольцевого интерферометра.

Из выражения (1) следует, что фаза  $\Theta$  является нечетной функцией  $\phi$ , следовательно при малых значениях  $\phi$  величина  $\Theta(n)$  оказывается пропорциональной  $n$ . Выражение в круглых скобках в (6) в этом пределе приобретает вид

$$e^{i\zeta\hat{n}} \hat{\rho} e^{-i\zeta\hat{n}} - \hat{\rho}, \quad (7)$$

где

$$\zeta = \frac{2Ul}{\hbar c(1 - e^{l\nu/c})}.$$

В наинизшем порядке по  $\zeta$  имеем

$$\begin{aligned} (\partial_t \hat{\rho})_{decoh} &= \\ &= i \frac{|\alpha_0|^2 c}{L} \zeta [\hat{n}, \hat{\rho}] + \frac{|\alpha_0|^2 c}{2L} \zeta^2 (2\hat{n}\hat{\rho}\hat{n} - \hat{n}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{n}^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Первое слагаемое в правой части имеет динамическую природу, а второе описывает собственно процесс разрушения когерентности конденсата по числам его атомов в пучке. Очевидно, что (8) — модель слабой декогеренции. Именно она будет фигурировать далее.

### 3. УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Стационарные волновые функции  $\Psi_k(\varphi)$  атома на окружности, нарушенной потенциалом  $U(\varphi)$ , подчинены уравнению [9, 15–17]

$$\Psi_k''(\varphi) - 2i\xi\Psi_k'(\varphi) - U(\varphi)\Psi_k(\varphi) = -E_k\Psi_k(\varphi). \quad (9)$$

Здесь величина  $\xi$  пропорциональна скорости вращения системы отсчета. Каждому (нормированному) решению  $\Psi_k(\varphi)$  можно сопоставить операторы рождения  $\hat{\Psi}_k^\dagger$  и уничтожения  $\hat{\Psi}_k$  атома в моде  $k$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_k^\dagger &= \int_0^{2\pi} \Psi_k(\varphi) \hat{\psi}^\dagger(\varphi) d\varphi, \\ \hat{\Psi}_k &= \int_0^{2\pi} \Psi_k^*(\varphi) \hat{\psi}(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\hat{\psi}^\dagger(\varphi)$  и  $\hat{\psi}(\varphi)$  — операторы рождения и уничтожения атома в точке  $\varphi$  окружности. Они подчиняются соотношениям коммутации

$$[\hat{\psi}(\varphi), \hat{\psi}^\dagger(\varphi')] = \delta(\varphi - \varphi'), \quad [\hat{\psi}(\varphi), \hat{\psi}(\varphi')] = 0,$$

из которых следует  $[\hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$ . Это стандартное соотношение для операторов бозонных мод.

Предполагаем прямоугольную форму потенциала  $U(\varphi)$ , равного  $U$  при  $-\delta \leq \varphi \leq \delta$  и нулю в остальных точках окружности. Ориентируясь на области нулевого и ненулевого потенциалов, каждый оператор  $\hat{\Psi}_k$  можно представить в виде

$$\hat{\Psi}_k = \sqrt{p_k} \hat{a}_k + \sqrt{q_k} \hat{b}_k.$$

Здесь введены вероятности обнаружить атом (при условии помещения его в  $k$ -е состояние) внутри области потенциала и вне ее:

$$\begin{aligned} p_k &= \int_{-\delta}^{\delta} |\Psi_k(\varphi)|^2 d\varphi, \\ q_k &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\Psi_k(\varphi)|^2 d\varphi = 1 - p_k, \end{aligned} \quad (11)$$

и соответствующие операторы уничтожения

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \frac{1}{\sqrt{p_k}} \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_k^*(\varphi) \hat{\psi}(\varphi) d\varphi, \\ \hat{b}_k &= \frac{1}{\sqrt{q_k}} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \Psi_k^*(\varphi) \hat{\psi}(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (12)$$

с бозевскими соотношениями коммутации

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad [\hat{a}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 0.$$

Гамильтониан системы невзаимодействующих атомов на кольце в формализме вторичного квантования предстает как сумма по модам:

$$\hat{H}' = \sum_k E_k \hat{\Psi}_k^\dagger \hat{\Psi}_k.$$

Взаимодействие между атомами приводит к тому, что атомы могут покидать конденсат. То же самое происходит и при приведении во вращение изначально покоящегося конденсата. В таком случае при описании системы необходимо было бы учитывать также состояние надконденсатных частиц. Мы ограничимся случаем, когда приготовление начального состояния конденсата осуществляется в уже вращающейся системе отсчета и факт вращения отражен в форме волновых функций мод  $\Psi_k(\varphi)$ . В заключительном разделе мы еще вернемся к возможному каналу появления надконденсатных атомов.

Мы будем исходить из предположения возможности ограничиться основной модой  $\Psi_0$  (индекс  $k = 0$  будем далее опускать)<sup>2)</sup>:

$$\hat{H}' \simeq E \left( p \hat{a}^\dagger \hat{a} + q \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sqrt{pq} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) \right). \quad (13)$$

Правая часть содержит оператор  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  числа атомов в области потенциала (т.е. в области пучка). С учетом (8) получаем управляющее уравнение для системы атомов:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}' - \zeta |\alpha_0|^2 \frac{c}{L} \hat{a}^\dagger \hat{a}, \\ \partial_t \hat{\rho} + i[\hat{H}, \hat{\rho}] &= \gamma \left( 2\hat{n} \hat{\rho} \hat{n} - \hat{n}^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{n}^2 \right), \\ \gamma &= \zeta^2 |\alpha_0|^2 c / 2L. \end{aligned} \quad (14)$$

Нахождение общего решения этого уравнения является сложной задачей. Целесообразен поиск приближенных подходов. Заметим, что с (14) естественным образом ассоциируются два базиса в пространстве состояний ансамбля атомов. Первый, который будем называть «кинетическим», диктуется структурой Линдблада из правой части уравнения. Если полное число атомов фиксировано и равно  $N$ , то этот базис образован состояниями

$$|n, N - n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Использование кинетического базиса придает наиболее простой и естественный вид необратимой составляющей эволюции соответствующих матричных элементов статистического оператора  $\hat{\rho}$ . Элементы

$$\langle n, N - n | \hat{\rho} | n', N - n' \rangle$$

в этом базисе под действием правой части управляющего уравнения затухают со скоростями  $\gamma(n - n')^2$ . Второй, «динамический», базис

$$|n_1, N - n_1\rangle, \quad n_1 = 0, 1, \dots, N$$

<sup>2)</sup> Появление вместо одной моды  $\Psi$  двух мод,  $a$  и  $b$ , при описании конденсата не несет противоречия. Это следует из существования, помимо разложения  $\hat{\Psi} = \sqrt{p} \hat{a} + \sqrt{q} \hat{b}$ , ортогональной комбинации  $\hat{\Psi}_\perp = \sqrt{q} \hat{a} - \sqrt{p} \hat{b}$  такой, что  $[\hat{\Psi}_\perp, \hat{\Psi}^\dagger] = 0$ . По этой причине для состояния конденсата  $|\text{BEC}\rangle \propto (\hat{\Psi}^\dagger)^N |0\rangle_{at}$  имеем  $\langle \hat{\Psi}_\perp^\dagger \hat{\Psi}_\perp \rangle = 0$ . В процессе функционирования гироскопа из-за декогеренции последнее равенство нарушается. Описание действительно становится двухмодовым.

диагонализует гамильтониан  $\hat{H}$ . Его удобно переписать в форме, явно приспособленной к динамическому базису:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega_1 \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \omega_2 \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2, \\ \hat{a} &= \cos(\chi) \hat{c}_1 + \sin(\chi) \hat{c}_2, \\ \hat{b} &= -\sin(\chi) \hat{c}_1 + \cos(\chi) \hat{c}_2, \\ \omega_1 &= \left( pE - \zeta |\alpha_0|^2 \frac{c}{L} \right) \cos^2(\chi) + qE \sin^2(\chi) - \\ &\quad - E\sqrt{pq} \sin(2\chi), \\ \omega_2 &= \left( pE - \zeta |\alpha_0|^2 \frac{c}{L} \right) \sin^2(\chi) + qE \cos^2(\chi) + \\ &\quad + E\sqrt{pq} \sin(2\chi), \\ \text{tg}(2\chi) &= \frac{2\sqrt{pq}E}{(q-p)E + \zeta |\alpha_0|^2 c/L}, \\ \hat{H}|n_1, n_2\rangle &= (\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2) |n_1, n_2\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы используем сходные обозначения для элементов кинетического и динамического базисов. Левое число в символах соответствующих кет-векторов обозначает число атомов в моде  $a$  в первом случае и в моде  $c_1$  во втором. В дальнейшем каждый раз будет указан используемый базис.

Предположим, что возможен выбор режима функционирования гироскопа, в котором основной вклад в эволюцию состояния конденсата вносит динамика (т.е. декогеренция относительно медленная). Для этого достаточно выполнения неравенства  $\omega_1 - \omega_2 \gg N\gamma$ . В таких условиях выбор для описания динамического базиса должен подсказать путь адекватного упрощения уравнения (14) с последующим его решением. Целесообразно несколько изменить форму записи динамического базиса. Пользуясь операторами  $\hat{c}_1$ ,  $\hat{c}_2$  и их сопряженными, вводим в рамках представления Жордана–Швингера [18, 19] операторы эффективного квантового углового момента («псевдоспина»):

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2}(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 - \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2), \quad \hat{S}_+ = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2, \quad \hat{S}_- = \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1. \quad (16)$$

Их соотношения коммутации:

$$[\hat{S}_0, \hat{S}_\pm] = \pm \hat{S}_\pm, \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_0.$$

При фиксированном числе атомов получаем

$$\left[ \frac{1}{2}(\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+) + \hat{S}_0^2 \right] \hat{\rho} = S(S+1) \hat{\rho}, \quad (17)$$

где  $S = N/2$ . Аналогичное соотношение имеет место и при правом действии выражения в квадратных скобках на  $\hat{\rho}$ . Элементы динамического базиса можно записывать как  $|S, M\rangle$ . Здесь

$M = (n_1 - n_2)/2$  — собственное число оператора  $\hat{S}_0$ :  $\hat{S}_0|S, M\rangle = M|S, M\rangle$ . Будем использовать обозначение  $\rho^{(S)}(M, M')$  для элементов матрицы плотности  $\langle S, M | \hat{\rho} | S, M' \rangle$ .

Гамильтониан в (14) можно записать в виде

$$\hat{H} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} S + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \hat{S}_0. \quad (18)$$

Он задает динамическую часть эволюции матрицы плотности:

$$\begin{aligned} (\partial_t \rho^{(S)}(M, M'))_{dyn} &= \\ &= -i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} (M - M') \rho^{(S)}(M, M'). \end{aligned} \quad (19)$$

Для оператора  $\hat{n}$  имеем

$$\hat{n} = S + \cos(2\chi) \hat{S}_0 + \frac{1}{2} \sin(2\chi) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-). \quad (20)$$

Последнее слагаемое в правой части меняет число  $M$  на  $\pm 1$ . Как следствие, в  $(\partial_t \rho^{(S)}(M, M'))_{decoh}$  появляются матричные элементы, у которых разность  $M$ -чисел меняется на  $0, \pm 1, \pm 2$ . Будем удерживать в структуре Линдблада только слагаемые, порождающие «резонансные» матричные элементы с характером динамической эволюции из (19):  $\rho^{(S)}(M, M')$  и  $\rho^{(S)}(M \pm 1, M' \pm 1)$ . После этого управляющее уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\rho} &= -i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} [\hat{S}_0, \hat{\rho}] + \\ &+ \gamma \sin^2(2\chi) (\hat{S}_0 \hat{\rho} \hat{S}_0 - S(S+1) \hat{\rho}) + \\ &+ \gamma (2 \cos^2(2\chi) - \sin^2(2\chi)) \times \\ &\times \left( \hat{S}_0 \hat{\rho} \hat{S}_0 - \frac{1}{2} \hat{S}_0^2 \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{S}_0^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь в последнем слагаемом использована векторная запись оператора псевдоспина в эффективном трехмерном пространстве с ортогональным репером  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ :

$$\hat{S} = \hat{S}_+ \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + \hat{S}_- \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + \hat{S}_0 \mathbf{e}_3.$$

Для решения уравнения (21) удобно выделить линейные комбинации матричных элементов, образующие базис неприводимых представлений группы  $SU(2)$  в пространстве псевдоспина [20]:

$$\begin{aligned} \rho_{\kappa\sigma}^{(S)} &= \\ &= \sum_{M, M'=-S}^S (-1)^{S-M'} \langle S M S - M' | \kappa\sigma \rangle \rho^{(S)}(M, M'). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\kappa = 0, 1, \dots, 2S$ ;  $\sigma = -\kappa, 1-\kappa, \dots, \kappa$ . Эволюция величин  $\varrho_{\kappa\sigma}^{(S)}$  выглядит просто:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_{\kappa\sigma}^{(S)} &= -\Gamma_{\kappa\sigma} \varrho_{\kappa\sigma}^{(S)}, \\ \Gamma_{\kappa\sigma} &= \frac{1}{2} \gamma \sin^2(2\chi) \kappa(\kappa + 1) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 (2 \cos^2(2\chi) - \sin^2(2\chi)) + \\ &\quad + i \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \sigma. \end{aligned} \quad (23)$$

С помощью преобразования, обратного (22), получаем вид эволюции элементов матрицы плотности в динамическом базисе:

$$\begin{aligned} \varrho_t^{(S)}(M, M') &= \\ &= \sum_{M_0, M'_0} K_{t-t_0}^{(S)}(M, M'|M_0, M'_0) \varrho_{t_0}^{(S)}(M_0, M'_0), \\ K_{t-t_0}^{(S)}(M, M'|M_0, M'_0) &= \\ &= (-1)^{M'-M'_0} \sum_{\kappa=0}^{2S} \sum_{\sigma=-\kappa}^{\kappa} \exp(-\Gamma_{\kappa\sigma}(t-t_0)) \times \\ &\quad \times \langle SMS - M'|\kappa\sigma\rangle \langle SM_0S - M'_0|\kappa\sigma\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Это — общее решение управляющего уравнения (21). Его непосредственное использование неудобно, если ориентироваться на значение  $S \sim 10^6$  (достижимое в настоящее время число атомов в конденсате). Целесообразен поиск упрощающих приемов суммирования по  $M$ -числам. Заметим, что  $\Gamma_{\kappa\sigma}$  содержат слагаемые, квадратичные по  $\kappa$  и описывающие при  $\kappa \gg 1$  быстрый в масштабе  $\gamma$  распад соответствующих  $\kappa$ -гармоник. Из выражений (23) видно, что этот распад может быть в принципе замедлен вторым слагаемым при  $|\sigma| \sim \kappa$ . Однако при этом  $\varrho_{\kappa\sigma}^{(S)}$  оказываются быстроосциллирующими из-за последнего мнимого слагаемого. Поэтому, если нет необходимости исследовать детали эволюции  $\hat{\varrho}_t$  на временах, много меньших  $\gamma^{-1}$ , разумно ограничиться небольшими значениями  $\kappa$ . В пределе  $S \gg \kappa$  существует аппроксимация коэффициентов Клебша—Гордана [20] через матрицы вращения:

$$\langle SMS - M'|\kappa\sigma\rangle \simeq d_{\sigma 0}^{(\kappa)}(\theta),$$

где  $\cos \theta \simeq (M + M')/2S$ . Это приближение в ряде случаев позволяет заменять суммирование в (24) интегрированием по  $\theta$ .

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явное достоинство схемы гибридного атомарно-оптического гироскопа, как было отмечено в рабо-

те [9], состоит в отсутствии необходимости разрушать структуру ВЕС для регистрации вращения через наблюдение интерференции атомов. В то же время пространственная когерентность конденсата оказывается ценным расходуемым ресурсом, и требуется построение модели ее деградации, без чего предлагаемая схема гироскопа остается неполной. Разрушение пространственной когерентности носит фундаментальный характер и неотделимо от процесса измерения угловой скорости вращения. При возникновении информации о чувствительном к вращению числе атомов в области пучка происходит неизбежная декогеренция конденсата.

В настоящей работе получено управляющее уравнение для статистического оператора конденсата в общей форме, описывающее процесс разрушения пространственной когерентности. В предположении медленности этого процесса в сравнении с характерными скоростями гамильтоновой эволюции управляющее уравнение было преобразовано к более простому виду (21), который уже допускает аналитическое решение. Были выведены соотношения связи контролируемых в эксперименте параметров с входящими в это уравнение величинами  $\omega_1, \omega_2, \chi$  и  $\gamma$ . Заметим, что информация об угловой скорости вращения гироскопа отражена в значениях первых трех из них.

В работе [9] при некотором выборе основных параметров гироскопа с прицелом на измерение угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси были сделаны основные оценки. В частности, при радиусе кольца с конденсатом  $R = 0.2$  см и величине сектора, занятого зондирующим пучком,  $0.1$  рад наибольшая чувствительность достигается при глубине создаваемой им потенциальной ямы  $U/\hbar = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Ориентируясь на эту величину, положив длину кольцевого резонатора  $l = 6$  см и выбрав наименее благоприятную нижнюю границу допустимых значений  $\nu \simeq 10^2 \text{ с}^{-1}$ , можно попробовать получить предварительную оценку скорости разрушения когерентности  $\gamma \simeq 8 \text{ с}^{-1}$ . При выборе значений  $\nu$  ближе к реалистичной правой границе указанного в работе [9] допустимого интервала скорость декогеренции падает до  $\gamma \sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ . Эти оценки сделаны для отстройки частоты зондирующего излучения  $3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  от частоты перехода  $D$ -линии атома  $^{87}\text{Rb}$ .

На первый взгляд, полученные оценки выглядят довольно оптимистично. Заметим, однако, что при выбранных параметрах среднее число фотонов в кольцевом резонаторе оказывается крайне малым (для безразмерной амплитуды  $\alpha$  поля внутри резо-

натора имеем  $|\alpha|^2 \sim 10^{-5}$ ). Это важно, поскольку свидетельствует о сильных квантовых флуктуациях величины потенциала, нарушающего однородность кольцевой ловушки конденсата.

Используемая в проведенной оценке величина  $U$  является фактически значением потенциала, усредненным по состоянию поля в кольцевом резонаторе. Корректный учет флуктуаций потенциала и их влияния на скорость разрушения когерентности требует решения уравнения (9) для волновых функций конденсата  $\Psi_k^{(n_{ph})}(\varphi)$  при различных значениях  $n_{ph}$  числа фотонов в резонаторе. Величина потенциала  $U^{(n_{ph})} \propto n_{ph}$ . Малость среднего числа фотонов в резонаторе в определенном смысле облегчает задачу учета флуктуаций, поскольку можно рассматривать всего две альтернативы, представленные фокковскими состояниями  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  резонаторной моды, т. е. иметь дело со своего рода «полевым кубитом». Соответственно, достаточно ограничиться наборами операторов  $\hat{\Psi}_k^{(0)}$  и  $\hat{\Psi}_k^{(1)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и их сопряженными.

Если конденсат изначально приготавливается в моде  $\Psi_{k_0}^{(0)}$ , то главным ее партнером во второй группе окажется мода  $\Psi_{k_1}^{(1)}$ , чья энергия  $E_{k_1}^{(1)}$  наиболее близка к  $E_{k_0}^{(0)}$ . В этих условиях разумной моделью гамильтониана системы «атомы+мода резонатора» является

$$\hat{H}'_{at+ph} = E_{k_0}^{(0)} \hat{\Psi}_{k_0}^{(0)\dagger} \hat{\Psi}_{k_0}^{(0)} \otimes |0\rangle\langle 0| + E_{k_1}^{(1)} \hat{\Psi}_{k_1}^{(1)\dagger} \hat{\Psi}_{k_1}^{(1)} \otimes |1\rangle\langle 1|. \quad (25)$$

Операторы  $\hat{\Psi}_{k_0}^{(0)}$  и  $\hat{\Psi}_{k_1}^{(1)}$  можно представить в виде линейных комбинаций  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ , имеющих, как и ранее, смысл операторов уничтожения атома внутри и вне области потенциала. В частности, должно обеспечиваться соотношение  $[\hat{\Psi}_{k_0}^{(0)}, \hat{\Psi}_{k_1}^{(1)\dagger}] = \langle \Psi_{k_0}^{(0)} | \Psi_{k_1}^{(1)} \rangle$  (скалярное произведение одноатомных волновых функций). Гамильтониан  $\hat{H}'_{at+ph}$  содержит ту же четверку операторов  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ ,  $\hat{a}^\dagger \hat{b}$  и  $\hat{b}^\dagger \hat{a}$ , что и  $\hat{H}'$  из (13), но теперь они представлены в произведении с фотонными операторами. Поскольку контакт конденсата с окружением опосредован взаимодействием с модой резонатора, оператор  $\hat{n}$  из (8) следует заменить на  $\hat{n} \otimes |1\rangle\langle 1|$ . В результате полученное ранее управляющее уравнение оказывается адаптированным к случаю квантованной резонаторной моды в режиме малого числа фотонов. Соответствующим образом можно модифицировать и его решение.

При начальном состоянии

$$|\Phi_{at+ph}\rangle \propto (\hat{\Psi}_{k_0}^{(0)\dagger})^N |0\rangle_{at} \otimes (|0\rangle + \alpha|1\rangle)$$

динамическая эволюция под действием  $\hat{H}'_{at+ph}$  приведет к возникновению квантовой запутанности ансамбля атомов и полевого кубита. Но состояние этой объединенной системы остается чистым, т. е. представимым вектором гильбертова пространства. Эта чистота (когерентность) состояния объединенной системы становится ресурсом работы гироскопа, в процессе которой при регистрации интерференции на выходе MZI статистический оператор  $\hat{\rho}_{at+ph}$  приобретает смешанный характер. Заметим, что при этом появляются надконденсатные атомы вне исходной моды  $\Psi_{k_0}^{(0)}$ . Канал возникновения надконденсатных атомов обеспечен ненулевым значением скалярного произведения  $\langle \Psi_{k_0}^{(0)} | \Psi_{k_1}^{(1)} \rangle$ . Вычисление скорости декогеренции с учетом квантовых флуктуаций и сравнение с приведенными выше оценками на основе усредненного потенциала требует дальнейших исследований.

Отмеченная малость среднего числа фотонов в резонаторе явилась следствием необходимости обеспечить указанную в оценке величину потенциала  $U$ . Также к выводу о малости числа фотонов привели выбранные параметры резонатора. Поскольку во всех случаях выбор осуществлялся в значительной степени случайно, есть основания полагать, что он оказался далеко не оптимальным. В частности, нельзя исключать возможность нахождения диапазона параметров, не требующего квантового описания резонаторного пучка.

Отметим, что фазовый сдвиг на выходе интерферометра оказывается вполне регистрируемым (по оценкам из [9] он составляет приблизительно 0.04). Этот сдвиг фазы классического светового пучка создается кольцевым резонатором со слабым внутренним полем, зондирующим конденсат.

Несмотря на то что рассмотренная схема не предполагает неизбежной потери атомов в процессе работы, пространственная когерентность конденсата деградирует со временем. Это означает, что по истечении времени когерентности необходимо восстанавливать исходное состояние конденсата для продолжения функционирования гироскопа. Детальное обсуждение методов осуществления этой процедуры выходит за рамки предмета настоящей статьи, целью которой была демонстрация принципиальной пригодности описанной схемы для регистрации вращения. Тем не менее прогресс в методах создания нетривиальных пространственных конфигураций атомарных бозе-конденсатов позволяет надеяться на техническую возможность ее реализации. В частности, перспективными являются стратегии управления состоянием бозе-

конденсата на основе обратной связи [12, 13, 21]. Поскольку модификации в этом случае подвергается гамильтонова эволюция системы (к примеру, параметры поля, формирующего оптическую ловушку), для рассмотренного выше случая слабой декогеренции такие стратегии представляются наиболее эффективными.

Полученное в работе решение управляющего уравнения позволяет в принципе найти корреляционную функцию числа атомов в пучке  $\langle n(t_2)n(t_1) \rangle$ , где  $t_2 > t_1 \geq 0$ , а в нулевой момент времени, по предположению, приготовлено полностью когерентное состояние ВЕС и начинается функционирование гироскопа. Это в свою очередь позволит определить корреляционную функцию измеряемых значений угловой скорости и рассчитать в итоге девиацию Аллана в предлагаемой схеме.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект АААА-А21-121021800168-4) в Институте автоматики и электрометрии СО РАН. Участие одного из авторов (И. Л. В.) поддержано Российским научным фондом (грант 20-12-00081).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* **54**, R4649 (1996).
2. S. Boixo, A. Datta, M. J. Davis, A. Shaji, A. V. Tacla, and C. M. Caves, *Phys. Rev. A* **80**, 032103 (2009).
3. L. Pezze, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, and P. Treutlein, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 035005 (2018).
4. N. P. Robins, P. A. Altin, J. E. Debs, and J. D. Close, *Phys. Rep.* **529**, 265296 (2013).
5. J. J. Cooper, D. W. Hallwood, and J. A. Dunningham, *Phys. Rev. A* **81**, 043624 (2010).
6. D. V. Tsarev, S. M. Arakelian, YouLin Chuang, Ray-Kuang Lee, and A. P. Alodjants, *Opt. Express* **26**, 19583 (2018).
7. J. Joo, W. J. Munro, and T. P. Spiller, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 083601 (2011).
8. O. I. Tolstikhin, T. Morishita, and S. Watanabe, *Phys. Rev. A* **72**, 051603R (2005).
9. В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 212 (2021).
10. U. Leonhardt, T. Kiss, and P. Piwnicki, *Eur. Phys. J. D* **7**, 413 (1999).
11. D. A. R. Dalvit, J. Dziarmaga, and R. Onofrio, *Phys. Rev. A* **65**, 053604 (2002).
12. S. S. Szigeti, M. R. Hush, A. R. R. Carvalho, and J. J. Hope, *Phys. Rev. A* **80**, 013614 (2009).
13. S. S. Szigeti, M. R. Hush, A. R. R. Carvalho, and J. J. Hope, *Phys. Rev. A* **82**, 043632 (2010).
14. E. O. IloOkeke and T. Byrnes, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 233602 (2014).
15. H. Hartmann, *Theor. Chim. Acta* **24**, 201 (1972).
16. M. Kibler and P. Winternitz, *J. Phys. A* **20**, 4097 (1987).
17. L. Chetouani, L. Guechi, and T. F. Hammann, *J. Math. Phys.* **33**, 3410 (1992).
18. P. Jordan, *Z. Phys.* **94**, 531 (1935).
19. J. Schwinger, in *Quantum Theory of Angular Momentum*, ed. by L. C. Biedenharn and H. Van Dam, Academ. Press, New York (1965).
20. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалёв, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
21. T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, S. Bernon, A. Aspect, A. Landragin, and P. Bouyer, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 210503 (2013).