

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ С ИСХОДНО НОРМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕТКАХ

Л. А. Смирнов^{a,b*}, В. А. Миронов^a, А. Г. Литвак^a

^a Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

^b Институт информационных технологий, математики и механики,
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 16 января 2022 г.,
после переработки 27 января 2022 г.
Принята к публикации 22 февраля 2022 г.

Исследованы особенности процессов самовоздействия волновых полей в рамках дискретного нелинейного уравнения Шредингера. Аналитически и численно показано, что динамика волновых пакетов с исходно нормальной дисперсией групповой скорости в системах, описываемых данным модельным уравнением, может существенным образом отличаться от эволюции аналогичных распределений в сплошной среде. Детально проанализировано поведение волновых полей с изначально гладкими (по сравнению с периодом рассматриваемых решеток) амплитудным профилем и фазовым фронтом и изучен механизм их разрушения в цепочках эквидистантно расположенных элементов. Предложена модификация бездисперсионного приближения, с использованием которой удастся теоретически описать эффекты, приводящие к развитию мелкомасштабных неустойчивостей на фоне плавной огибающей и к ее последующим существенным деформациям (вплоть до распада). Представлены оценки критических параметров, при превышении которых следует ожидать указанных (нехарактерных для континуальных сред) процессов.

DOI: 10.31857/S004445102206013X
EDN: DVESCO

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время нелинейные решеточные модели находят широкое применение при теоретическом исследовании физических явлений в различных по своей природе дискретных системах и при интерпретации экспериментально полученных данных [1–6]. При изучении распространения волновых полей в наборах, состоящих из большого числа связанных между собой эквидистантно расположенных элементов, активно используется дискретное нелинейное уравнение Шредингера (ДНУШ) [1–6]. Несмотря на то, что оно является непосредственным аналогом непрерывного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [6–8], позволяю-

щего успешно описать процессы самовоздействия в сплошных средах и вместе со своими разнообразными обобщениями представляющего один из наиболее важных классов модельных уравнений в частных производных, в пространственно-структурированной ситуации эволюция полей оказывается намного сложнее и естественно ожидать эффектов, которые отсутствуют в континуальной задаче. В частности, на данное обстоятельство указывает различие в дисперсионных свойствах и особенности, связанные с периодичностью выражающих их законов в дискретном случае и спецификой отдельно взятой зоны Бриллюэна, в которой присутствуют одновременно области как с нормальной, так и с аномальной дисперсией групповой скорости.

Детальный анализ динамики волновых пакетов в решетках в основном опирается на результаты численного моделирования. Как показывают такого рода расчеты (например, см. работы [9–14]), для плав-

* E-mail: smirnov_lev@appl.sci-nnov.ru

ных (по сравнению с периодом рассматриваемой решетки) начальных распределений поля их дальнейшее поведение может рассматриваться в континуальном пределе лишь на ограниченных трассах или в течение конечных временных интервалов. Применимость непрерывной аппроксимации для дискретных уравнений оправдана только до тех пор, пока характерные пространственные масштабы локализации неоднородностей не становятся того же порядка, что и расстояния между соседними структурными элементами обсуждаемой системы. Это приводит к тому, что даже в одномерной цепочке возникает целый ряд эволюционных сценариев, которые не встречаются в сплошной среде [9–14]. Например, в работах [9–12] изучалось распространение исходно широких квазиоптических пучков, инжектируемых в решетку эквидистантно расположенных световодов, и было показано, что их самофокусировка при превышении критической мощности заканчивается локализацией большей части электромагнитного излучения в одном из волноводов. Кроме того, подобный процесс самоканализирования приводит к отклонению трассы распространения максимума интенсивности от прямой линии [9, 11, 12, 15].

Похожие эффекты обсуждались также и в приложении к динамике набора взаимодействующих между собой облаков бозе-эйнштейновского конденсата, каждое из которых сосредоточено вблизи одного из соответствующих минимумов внешнего периодического потенциала, созданного оптической ловушкой [16–21]. Подчеркнем, что выводы, сделанные в большинстве из указанных выше статей, справедливы, только когда волновые пакеты находятся в области аномальной дисперсии. Стоит отметить, что во всех перечисленных здесь случаях, несмотря на разную физическую природу объектов, исследование проводилось в рамках ДНУШ, для которого развито существенно меньше аналитических методов построения точных и приближенных решений по сравнению с НУШ. Оказалось, что для дискретных моделей весьма полезным и конструктивным может быть использование вариационного подхода, основанного на априорных представлениях о форме изучаемых нелинейных возбуждений конечной амплитуды и позволяющего качественно, а порой и количественно адекватно описать в безабберационном приближении ключевые аспекты эволюции и самоканализирования локализованных образований в пространственно-структурированных средах [10–14, 16].

В данной работе рассматриваются особенности динамики и процесса самовоздействия волновых пакетов с нормальной дисперсией групповой скорости, когда не удается сделать столь определенного прогноза о возможных сценариях распространения поля, как в случае аномальной дисперсии. В первую очередь связано это с тем, что в обсуждаемых условиях среда фактически становится дефокусирующей, вследствие чего использование пробных функций в виде гауссиана с линейной и квадратичной коррекциями фазового фронта при вариационном подходе не представляется до конца оправданным. Кроме того, на первый взгляд, есть основания полагать, что можно ограничиться вообще только континуальным пределом, в рамках которого все протекающие процессы описываются с помощью НУШ, поскольку на начальных этапах исходно плавные распределения будут еще больше расплываться. Однако, как показывают численные расчеты, существуют критические значения параметров таких распределений, при превышении которых на фоне расширяющегося гладкого профиля поля развивается неустойчивость, приводящая к его разрушению. Подобные динамические режимы, на которые отчасти обращалось внимание в работах [16–18, 21], заведомо отсутствуют в аналогичных непрерывных моделях.

Основная цель представленной статьи заключается в объяснении механизмов возникновения данных сценариев поведения волнового поля в рамках ДНУШ. При этом для определенности постановка задачи формулируется применительно к распространению оптического излучения в дискретной системе, состоящей из большого числа связанных между собой световодов, хотя результаты проведенного анализа несложно перенести и на другие случаи, где речь идет об эволюции нелинейных возбуждений в цепочках эквидистантно расположенных элементов, для которых могут быть использованы соответствующие модельные уравнения.

Прежде чем переходить к изложению основного материала, сделаем еще ряд важных замечаний. Во-первых, нетривиальные режимы эволюции динамических систем нередко удается успешно классифицировать, изучая устойчивость стационарных состояний и автомодельных решений исследуемой задачи [1, 6–8, 22, 23]. В большинстве случаев это можно сделать посредством процедуры линеаризации исходных уравнений, описывающих то, как протекают интересующие нас процессы (например, распространение электромагнитного излучения в пространственно-структурированных средах, взаимодействие когерентных волн материи и формиро-

вание интерференционных картин в гидро- и газодинамике). Анализ поведения малых возмущений на заданном фоне достаточно часто позволяет оценить типичные времена перехода от одного нелинейного режима к другому, присущие масштабы возникающих неоднородностей, а также пороговые величины для основных характеристик волнового поля и бифуркационные значения управляющих параметров рассматриваемой системы, при которых начинают развиваться те или иные неустойчивости. В итоге такого рода подход в целом помогает прогнозировать возможные сценарии эволюции нелинейных возмущений и объяснить ключевые моменты в динамике их развития, наблюдаемые на различных этапах непосредственно в эксперименте или при численном моделировании. Особенностью интересующей нас здесь ситуации является то, что ее можно интерпретировать как «жесткий» режим возникновения неустойчивости, когда распространение огибающей волнового поля довольно долго оказывается плавным (практически равновесным), перед тем как перейти к существенно нелинейному неравновесному варианту своего поведения.

Во-вторых, в рамках НУШ с дефокусирующей нелинейностью, для которого хорошо известно, что однородный фон конечной амплитуды устойчив, численно, аналитически, а также экспериментально подробно изучалась задача о разлете локализованных распределений поля, заданных как на пьедестале [24–33], так и на спадающих до нуля на бесконечности (т. е., можно сказать, расплывающихся в «вакуум») [24, 25, 34–45]. В частности, было наглядно показано, что для исходно широких сигналов дисперсионными эффектами можно пренебречь [24–33, 36–45] и, кроме того, для ряда ситуаций свести описание динамики поля к уравнению простой волны (уравнению Хопфа) [24, 25, 46–48], скорость распространения которой зависит от интенсивности в отдельно взятой точке. Следовательно, в ходе расширения изначально гладких огибающих волновых пакетов следует ожидать укручения профиля [24–33, 36–48]. Такого рода процесс способен быть причиной возникновения мелкомасштабных возмущений, на формирование и эволюцию которых уже оказывает принципиальное влияние конкуренция нелинейности и дисперсии [24–33, 36–48]. Однако детальные исследования, выполненные на основе НУШ, в том числе с помощью прямого его моделирования, достоверно демонстрируют, что при указанных условиях появляющиеся на плавном фоне неоднородности не приводят к его разрушению [24–33, 36–49]. Похожие процессы также не наблюда-

ются и при столкновении волн рефракции, взаимодействие которых изучалось в статьях [36–43, 49].

В данной работе представлены численные и аналитические аргументы в пользу того, что учет дискретности среды в надпороговых условиях приводит в ходе эволюции к формированию локально неустойчивых распределений волнового поля. Отметим, что подобные процессы, по всей видимости, могут также наблюдаться при распространении лазерного излучения в волокнах, в которых проявляются линейные дисперсионные эффекты высокого порядка [48, 50–53]. Ниже описана постановка задачи, которая для определенности выполнена в терминах распространения электромагнитного излучения в наборе эквидистантно расположенных световодов, и приведены основные приближения, позволяющие использовать ДНУШ в качестве базовой модели. Затем проведено обобщение метода нелинейной геометрической оптики на случай дискретной среды. Оно состоит в более корректном учете изменения фазы волнового поля по сравнению с тем, как это обычно делается при использовании квазиклассического подхода для построения приближенных решений НУШ [24–33, 36–53]. Полученная в результате совокупность бездисперсионных соотношений, как и в случае сплошной среды, имеет схожий вид с системами квазилинейных уравнений, часто встречающихся в газодинамике [22–33, 36–49]. Однако в рассматриваемой нами ситуации данная совокупность уравнений в частных производных не является строго гиперболической. С учетом указанного обстоятельства удастся показать, что при выполнении надпороговых условий в процессе плавного расплывания локализованных распределений поля в периферийной области тип системы квазилинейных уравнений меняется на эллиптический, что свидетельствует о потенциальной возможности развития неустойчивости гладкого профиля огибающей волнового пучка.

2. ОПИСАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО-СТРУКТУРИРОВАННЫХ СРЕДАХ

2.1. Базовая модель в виде цепочки дискретных уравнений. Формулировка основной проблемы

Рассмотрим распространение одномерных квазиоптических волновых пучков, инжектируемых в

пространственно-неоднородную среду, состоящую из набора эквидистантно расположенных одномодовых световодов. Анализ проведем на базе стандартной теоретической модели [1–5, 9–14], в рамках которой предполагается, что фундаментальные направляемые моды ориентированных параллельно оси z оптических волноводов слабо связаны между собой. Огибающие поля каждой из таких мод медленно эволюционируют вдоль z и характеризуются своими комплексными амплитудами. Изменение этих индивидуальных амплитуд в зависимости от координаты z описывается системой уравнений, учитывающих как собственную нелинейность структурных элементов рассматриваемой решетки, так и взаимодействие с ближайшими соседями, возникающее из-за перекрытия направляемых ими мод. При отсутствии потерь в среде из неограниченного числа тонких световодов с дефокусирующей керровской нелинейностью приходим к бесконечной упорядоченной последовательности соотношений, которая называется ДНУШ и имеет в нормированных переменных следующий вид [1–5, 9–14]:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial z} - \psi_{n-1} - \psi_{n+1} + |\psi_n|^2 \psi_n = 0. \quad (1)$$

Здесь функция $\psi_n(z)$ определяет комплексную амплитуду моды n -го волновода. ДНУШ (1) является одной из наиболее простых и универсальных дискретных моделей и при этом (не только качественно, но и количественно) адекватно описывает физическую ситуацию, когда пучок непрерывного излучения падает на решетку с большим числом направляющих элементов, в каждом из которых можно пренебречь дисперсионными и дифракционными эффектами [1–5].

Формально дискретному уравнению (1) можно поставить в соответствие континуальное НУШ

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2i \sin \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x} - \cos \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Для этого обычно вводят непрерывную координату x , ассоциированную с индексом n , и затем делают замену $\psi_n(z)$ на $\psi(x, z)$, считая функцию $\psi(x, z)$ плавной по x на масштабах, сравнимых с периодом рассматриваемой одномерной решетки, а также предварительно выделив в фазе компоненты $\psi_n(z)$ комплексного вектора составляющую вида $2 \cos \kappa z - \kappa n$, которая может достаточно резко изменяться по величине при переходе от одного элемента цепочки к соседнему, когда характерное значение волнового числа κ лежит вне малой окрестности центра зоны Бриллюэна. Отметим, что такое

сопоставление имеет смысл при рассмотрении динамики исходно широких волновых пакетов.

Проведем более детальный, чем это обычно делается, анализ процессов в ДНУШ и получим полезные для понимания результатов численных расчетов аналитические соотношения. Для этого, во-первых, выделим у комплексного поля $\psi_n(z)$ амплитуду и фазу, т. е. представим $\psi_n(z)$ в виде

$$\psi_n(z) = \phi_n(z) \exp(-i\theta_n(z)), \quad (3)$$

где $\phi_n(z)$ и $\theta_n(z)$ являются действительными функциями. Затем, подставив (3) в (1) и приравняв по отдельности к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, в итоге придем к следующей системе дискретных уравнений:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z} + \phi_{n+1} \sin v_{n+1} - \phi_{n-1} \sin v_n = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial z} - \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} \cos v_{n+1} - \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \cos v_n + \phi_n^2 = 0. \quad (5)$$

Здесь для удобства дальнейшего рассмотрения введено обозначение для разности фаз $v_n(z) = \theta_n(z) - \theta_{n-1}(z)$ волновых функций $\psi_n(z)$ и $\psi_{n-1}(z)$ в соседних элементах рассматриваемой цепочки. Несложно заметить, что именно $v_n(z)$, а не $\theta_n(z)$ играет роль истинной динамической переменной, так как ДНУШ (1), а вслед за ним и соотношения (4), (5) инвариантны относительно преобразования $\theta_n(z) \rightarrow \theta_n(z) + \text{const}$, т. е. все равенства остаются неизменными при сдвиге фазы $\theta_n(z)$ на произвольную постоянную величину. Поэтому для теоретического рассмотрения динамических процессов в решетках локально связанных элементов совместно с (4) зачастую стоит использовать уравнение для $v_n(z)$, которое непосредственно следует из (5):

$$\frac{\partial v_n}{\partial z} - \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} \cos v_{n+1} + \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \cos v_n - \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \cos v_n + \frac{\phi_{n-2}}{\phi_{n-1}} \cos v_{n-1} + \phi_n^2 - \phi_{n-1}^2 = 0. \quad (6)$$

Таким образом, при описании эволюции волнового поля в дискретной среде далее будем отталкиваться от упорядоченной последовательности пар соотношений (4), (6).

В данной работе нас прежде всего интересуют особенности процесса самовоздействия пучков, изначально плавных на масштабах, сравнимых с периодом решетки. При этом основное внимание уделено ситуации, когда согласно представлениям, которые основаны на хорошо известных результатах, полученных в рамках НУШ, исходно широкие волновые пакеты будут расплываться, а все возникающие

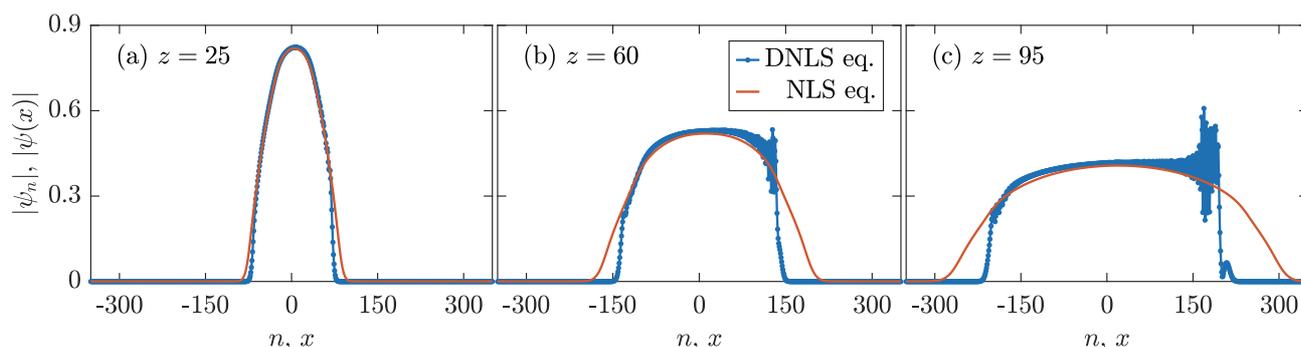


Рис. 1. (В цвете онлайн) Рассчитанные с помощью прямого численного моделирования в рамках ДНУШ (1) и НУШ (2) соответственно распределения амплитуды $|\psi_n(z)|$ волнового поля в узлах эквидистантной решетки световодов (точки, соединенные между собой линиями синего цвета) и профили аналогичной характеристики $|\psi(x, z)|$ в континуальной задаче (сплошные линии красного цвета) для пучков, заданных при $z = 0$ в форме $\psi_n(0) = \psi(x = n, 0) \exp(-i\gamma n)$ и $\psi(x, 0) = a \exp[-(x/\sigma)^{2m}]$ с параметрами $\gamma = 0.1$, $a = 1.125$, $\sigma = 15$ и $m = 3$. На начальном этапе своего распространения (а) такие пучки в дискретном и континуальном случаях ведут себя схожим образом (не только качественно, но и количественно с допустимой степенью точности). Однако в процессе дальнейшей эволюции различия постепенно становятся намного более существенными (б). На периферии локализованного амплитудного распределения начинается резкий рост мелкокомасштабных возмущений, который в конечном итоге приводит к разрушению плавного профиля волнового поля (с)

(например, из-за возможных эффектов укручения фронта и его опрокидывания) неоднородности не должны сильно нарастать [24–48]. Однако, как показывают численные расчеты (рис. 1), проведенные на базе ДНУШ (1), динамика распределения поля в решетке нередко существенно отличается от того, что предсказывают вычисления, выполненные в непрерывном пределе. Несмотря на достаточно хорошее совпадение на начальном этапе (рис. 1а), начиная с некоторого момента, в целом ряде случаев различия становятся значительными (рис. 1б). Распространяющийся в цепочке пучок сильно искажается, чаще всего перестает быть симметричным относительно своего центра, мелкокомасштабные возмущения на периферии демонстрируют резкий рост, что в конечном итоге приводит к разрушению плавного профиля, из которого выделяются локализованные образования довольно большой амплитуды (рис. 1с). Отмеченный процесс носит взрывной характер и не укладывается в рамки стандартного континуального рассмотрения задачи, что указывает на развитие неустойчивости, обусловленной дискретностью системы.

Мы предприняли попытку объяснить причины возникновения подобного процесса и выявить основной физической механизм, вызывающий такое деструктивное поведение. Согласно изложенному ниже анализу, для этого достаточно сделать чуть более корректный переход от математической модели,

используемой нами для изучения распространения излучения в системе эквидистантно расположенных нелинейных одномодовых световодов и записанной в терминах счетного набора комплексных амплитуд, характеризующих поле в каждом из структурных элементов обсуждаемой цепочки, к уравнениям в частных производных для гладких функций, непрерывно распределенных в поперечном к оси z направлении и совпадающих в узлах решетки со значениями истинных динамических переменных.

Прежде чем привести последовательное описание основных идей развитого теоретического подхода, заранее обратим внимание на довольно неожиданный и относительно нетривиальный факт. Оказывается достаточно ограничиться бездисперсионным приближением, когда учитываются только производные первого порядка (производные же второго порядка и выше отбрасываются), а специфика дискретности в первую очередь проявляется в модификации уравнения непрерывности и соотношения для градиента фазы, которая позволяет их применять в любой части зоны Бриллюэна и отслеживает эффективный тип нелинейности.

2.2. Бездисперсионный предел для дискретной модели

В качестве отправной точки для дальнейшего анализа нами была выбрана полученная выше система разностных уравнений (4), (6). Для того чтобы

перейти к ее аналогу в непрерывном пределе, предположим, что значения $\phi_n(z)$ и $v_n(z)$ слабо изменяются при уменьшении или увеличении индекса n на несколько единиц \tilde{n} , т. е. при смещении вдоль цепочки на конечное число ячеек. Такое предположение справедливо при плавном на масштабах неоднородности среды распределении величин $\phi_n(z)$ и $v_n(z)$. В этом случае можно перейти от дискретного набора пар $\phi_n(z)$ и $v_n(z)$ к двум непрерывным функциям $\phi(x, z)$ и $v(x, z)$, зависящим не только от переменной z , но и от координаты по оси x , направленной вдоль одномерной решетки эквидистантно расположенных элементов. Если выразить $\phi_{n\pm\tilde{n}}(z)$ и $v_{n\pm\tilde{n}}(z)$ соответственно через $\phi(x, z)$ и $v(x, z)$, ограничившись лишь двумя основными членами в формальном разложении в ряд Тейлора вблизи точки $x = n$,

$$\begin{aligned}\phi_{n\pm\tilde{n}}(z) &\approx \left(1 \pm \tilde{n} \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi(x, z), \\ v_{n\pm\tilde{n}}(z) &\approx \left(1 \pm \tilde{n} \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, z),\end{aligned}$$

то несложно получить для $\phi(x, z)$ и $v(x, z)$ замкнутую систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + 2 \sin v \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \cos v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + 2 \sin v \frac{\partial v}{\partial x} + 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

При выводе данных соотношений считалось, что применение дифференциального оператора $\partial/\partial x$ к функциям $\phi(x, z)$ и $v(x, z)$ повышает порядок малости тех комбинаций, в которых они возникают, что позволяет не принимать во внимание целый ряд слагаемых, содержащих произведения первых производных от $\phi(x, z)$ и $v(x, z)$ по x или более высокие производные и не оказывающих существенного влияния при анализе указанных выше эффектов. Отметим также тот факт, что совокупность уравнений (7), (8) может быть представлена в неканонической гамильтоновой форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\rho, v)}{\partial v} \right) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\rho, v)}{\partial \rho} \right) = 0$$

с гамильтонианом $\mathcal{H}(\rho, v) = \rho^2/2 - 2\rho \cos v$, где $\rho = \phi^2$. Фактически, систему (7), (8) можно интерпретировать как бездисперсионный предел дискретной модели (4), (6). Здесь прослеживается полная аналогия с приближением нелинейной геометрической оптики для сплошной среды (см., например, работу [54]), в которой эволюция огибающей волнового поля описывается континуальным НУШ, так

как именно в такие уравнения трансформируются равенства (7), (8) при условии, что в процессе распространения излучения отклонения $\tilde{v}(x, z)$ градиента фазы от исходно заданного значения v_0 оказываются малыми, т. е. $|\tilde{v}(x, z)| \ll \pi$ в ситуации, когда $v(x, z) = v_0 + \tilde{v}(x, z)$, где $v_0 = \text{const}$. Следовательно, в системе (7), (8) выполнен более корректный учет особенностей изменений фазового фронта и его локальных перестроек в дискретном случае.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ И РАЗВИТИЕ НА ИХ ФОНЕ ХАРАКТЕРНОЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Ключевые отличия бездисперсионного предела для дискретной модели от континуального аналога

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем обозначения

$$\rho(x, z) = \phi^2(x, z), \quad u(x, z) = 2 \sin v(x, z), \quad (9)$$

которые позволяют переписать соотношения (7), (8) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial u \rho}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \cos v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

наиболее близком по своей структуре к уравнениям одномерной газодинамики [22, 23]. Если поставить величинам $\rho(x, z)$ и $u(x, z)$ в соответствие плотность и поле скоростей, то несложно заметить, что первое равенство системы (10), (11) фактически играет роль уравнения непрерывности, а второе является аналогом уравнения Эйлера. Основное различие заключается в специфическом для рассматриваемой нами задачи множителе $2 \cos v$, стоящем перед последним слагаемым в левой части равенства (11).

Согласно принятой классификации набора квазилинейных уравнений, совокупность соотношений (10), (11) может быть либо эллиптического, либо гиперболического типа [22, 23]. Для определения, к какому типу относится интересующая нас система (10), (11), поступим следующим образом. Используя выражения

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\rho(x, z), \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = u(x, z)\rho(x, z), \quad (12)$$

введем формально функцию $\chi(x, z)$, удовлетворяющую тождественно уравнению непрерывности (10). Затем, продифференцировав по z второе из определяющих $\chi(x, z)$ равенств (12), после несложных преобразований с учетом (10), (11) получим соотношение, связывающее между собой частные производные второго порядка от $\chi(x, z)$ по z и x , линейное по ним и записанное в канонической форме [23]

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + 2\mathcal{B} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0, \quad (13)$$

где коэффициенты \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} в свою очередь зависят от $\rho(x, z)$ и $v(x, z)$ (т. е. могут быть представлены только через производные первого порядка от $\chi(x, z)$ по z и x):

$$\mathcal{A} = 1, \quad \mathcal{B} = 2 \sin v, \quad \mathcal{C} = 2\rho \cos v + 4 \sin^2 v. \quad (14)$$

Исходя из общих представлений в случае, когда выполняется неравенство $\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} = 2\rho \cos v > 0$, уравнение (13) (а вместе с ним и система (10), (11), как и ее эквивалент (7), (8)) относится к гиперболическому типу, а в противоположной ситуации, когда $\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} = 2\rho \cos v < 0$, соответствующие соотношения принадлежат к эллиптическому классу. Отметим, что в первом из указанных двух вариантов уравнения

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}{\mathcal{A}} = 2 \sin v \pm \sqrt{2\rho \cos v} \quad (15)$$

определяют в плоскости xz два семейства характеристик $x_{\pm}(z)$ (для заданных $\rho(x, z)$, $v(x, z)$, а вместе с ними для $\chi(x, z)$) [22, 23].

Если для системы квазилинейных уравнений (7), (8) известно решение $\bar{\rho}(x, z)$, $\bar{v}(x, z)$, которому отвечает своя функция $\bar{\chi}(x, z)$, удовлетворяющая (12) и (13), то можно рассмотреть задачу об устойчивости данного решения относительно малых возмущений $\tilde{\rho}(x, z)$, $\tilde{v}(x, z)$ в рамках соотношения (13). При этом предположим, что для возникающих в силу тех или иных физических причин поправок $\tilde{\chi}(x, z)$ к сформировавшемуся профилю $\bar{\chi}(x, z)$ выполняются несколько требований, которые можно интерпретировать при $\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} > 0$ как условия геометрической акустики [23]. Будем считать, что подобные отклонения, описываемые $\tilde{\chi}(x, z)$, а также $\tilde{\rho}(x, z)$ и $\tilde{v}(x, z)$, на начальном этапе слабо отражаются на характерной динамике волнового поля (т. е. функция $\tilde{\chi}(x, z)$ и ее первые производные малы), однако сами возмущения являются достаточно мелкомасштабными и претерпевают довольно сильные изменения на сравнительно небольших пространственных интервалах

(таким образом, вторые производные от $\tilde{\chi}(x, z)$ по x и z относительно велики). Подставим в (13) суперпозицию $\chi(x, z) = \bar{\chi}(x, z) + \tilde{\chi}(x, z)$ и линейризуем полученное выражение относительно $\tilde{\chi}(x, z)$, принимая во внимание выбранный нами вид поправок $\tilde{\chi}(x, z)$ к исходному решению $\bar{\chi}(x, z)$ и связанным с ним решениям $\bar{\rho}(x, z)$ и $\bar{v}(x, z)$. В итоге придем к следующему уравнению для $\tilde{\chi}(x, z)$:

$$\mathcal{A}(\bar{\rho}, \bar{v}) \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} + 2\mathcal{B}(\bar{\rho}, \bar{v}) \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z \partial x} + \mathcal{C}(\bar{\rho}, \bar{v}) \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

в котором коэффициенты $\mathcal{A}(\bar{\rho}, \bar{v})$, $\mathcal{B}(\bar{\rho}, \bar{v})$ и $\mathcal{C}(\bar{\rho}, \bar{v})$ рассчитываются с применением невозмущенных распределений поля $\bar{\rho}(x, z)$ и $\bar{v}(x, z)$. В частности, из (16) непосредственно вытекает, что в тех областях, где выполняется неравенство

$$\mathcal{B}^2(\bar{\rho}, \bar{v}) - \mathcal{A}(\bar{\rho}, \bar{v})\mathcal{C}(\bar{\rho}, \bar{v}) = 2\bar{\rho} \cos \bar{v} > 0,$$

малоамплитудные возбуждения, обуславливающие наличие поправок $\tilde{\chi}(x, z)$, $\tilde{\rho}(x, z)$ и $\tilde{v}(x, z)$, по мере проникновения излучения в пространственно-структурированную среду нарастать не будут, а их распространение на заданном фоне $\bar{\chi}(x, z)$, $\bar{\rho}(x, z)$ и $\bar{v}(x, z)$ происходят вдоль соответствующих характеристик (15). В этом несложно убедиться, воспользовавшись стандартным методом перехода от волновой к геометрической акустике [23, 54], т. е. представив $\tilde{\chi}(x, z)$ в виде

$$\tilde{\chi}(x, z) = \text{Re} \left[\alpha(x, z) e^{-i\beta(x, z)} \right]$$

и построив на базе (16) уравнение для эйконала $\beta(x, z)$. С другой стороны, из (16) также наглядно видно, что в той части пространства, где

$$\mathcal{B}^2(\bar{\rho}, \bar{v}) - \mathcal{A}(\bar{\rho}, \bar{v})\mathcal{C}(\bar{\rho}, \bar{v}) = 2\bar{\rho} \cos \bar{v} < 0,$$

должен наблюдаться экспоненциальный рост рассматриваемого класса возмущений.

В итоге эквивалентные друг другу системы квазилинейных уравнений (10), (11) и (7), (8), описывающие эволюцию исходно широких волновых пучков в дискретных цепочках в бездисперсионном приближении, являются гиперболическими, если $\cos v(x, z) > 0$, и эллиптическими там, где $\cos v(x, z) < 0$. Из приведенных выше аргументов можно сделать вывод, что в пространственно-структурированных средах характерное поведение поля в различных локализованных областях может существенным образом различаться и определяется прежде всего знаком величины $\cos v(x, z)$ в отдельно выделенной и рассматриваемой окрестности, охватывающей конечное число структурных элементов

решетки. В данном обстоятельстве состоит принципиальное отличие дискретной задачи от континуальной, в которой класс системы квазилинейных уравнений, полученной из НУШ (2) аналогичным путем, состоящим по сути в пренебрежении дисперсионными эффектами высшего порядка, однозначно определяется типом нелинейности. Так, для дефокусирующих сред в динамике плавных непрерывных распределений амплитуды и фазы во всем пространстве проявляются только черты, присущие гиперболическим моделям (распространение вдоль характеристик, возникновение участков с резкими градиентами вследствие процессов опрокидывания), тогда как для фокусирующей нелинейности в силу эллиптичности структуры базовых уравнений одну из основных ролей играет развитие модуляционной неустойчивости.

В дискретных системах, как показывают наши рассуждения, возможно возникновение ситуации, когда одновременно на разных участках наблюдаются разноплановые варианты поведения. В одних областях эволюция поля будет протекать по сценариям, характерным исключительно для дефокусирующего (гиперболического) случая, а в других областях пойдет усиление мелкомасштабных возмущений на фоне гладкого профиля с последующим резким ростом интенсивности поля и его локализацией в ограниченных пространственных областях, как при самофокусировке (свойственной эллиптической ситуации).

3.2. Распространение пучка со ступенчатым профилем интенсивности. Автомодельные решения в рамках бездисперсионного приближения для дискретной модели

В этом разделе рассмотрим модельную задачу о распаде полуограниченного пучка [22–25, 36–43, 55, 56] с исходно линейным фазовым фронтом, для которого $v(x, 0) = \gamma$ ($|\gamma| < \pi/2$), а профиль интенсивности $\rho(x, z) = \phi^2(x, z)$ в сечении $z = 0$ задан в виде кусочно-постоянной (ступенчатой) функции действительного аргумента x :

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_0, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Такая постановка начальных условий для рассматриваемой проблемы дает возможность аналитически описать особенности протекающих процессов и получить наглядное представление о том, что может происходить с плавной огибающей излучения,

значительная часть которого сосредоточена в ограниченной области, при его проникновении в пространственно-структурированную среду и как следует интерпретировать наблюдаемые эффекты. Ниже продемонстрировано, что для указанной ситуации удастся построить автомодельное решение, а затем использовать его совместно с развитым нами подходом, что позволяет найти критическое значение параметра ρ_0 , при котором качественная картина распространения волнового поля меняется кардинально.

По аналогии с одномерной газодинамикой [23], где подобные автомодельные движения, возникающие, в частности, в цилиндрической трубе при равномерном перемещении поршня, играют важную роль, в случае рассматриваемой дискретной системы анализ эволюции распределения поля изначально ступенчатой формы является одной из отправных точек для общего понимания специфики и выделения ключевых отличительных черт поведения локализованных образований.

Будем искать решение совокупности уравнений (10), (11) в виде

$$\rho(x, z) = \rho(\xi), \quad v(x, z) = v(\xi), \quad u(x, z) = \sin v(\xi),$$

где все перечисленные величины зависят только от безразмерной автомодельной переменной $\xi = x/z$ [23, 43, 55, 56]. Другими словами, предположим, что форма каждой отдельно взятой интересующей нас функции при различных конечных значениях $z > 0$ подобна самой себе и отличается лишь своим масштабом вдоль оси x , увеличивающимся пропорционально z . В результате придем к следующей совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} + \rho \frac{du}{d\xi} = 0, \quad (18)$$

$$2 \cos v \frac{d\rho}{d\xi} + (u - \xi) \frac{dv}{d\xi} = 0. \quad (19)$$

Для того чтобы найти нетривиальные решения данной системы, во-первых, исключим (например) из (18) производные, выразив и подставив их из (19). Эта процедура эквивалентна приравнению к нулю определителя системы (18), (19). В итоге находим, что в бездисперсионном приближении для решений, имеющих автомодельную форму, должно выполняться соотношение

$$\xi = x/z = u \pm \sqrt{2\rho \cos v}, \quad (20)$$

которое, в частности, лишний раз подчеркивает, что волны такого типа существуют только в области гиперболическости квазилинейных уравнений (18), (19),

т. е. при $\cos v(x, z) > 0$. Прежде чем переходить к дальнейшему изложению результатов данного раздела, обратим внимание, что в ситуации, когда $v(x, 0) = \gamma$, где $-\pi/2 < \gamma \leq 0$, а распределение $\rho(x, 0)$ в плоскости $z = 0$ достаточно хорошо аппроксимируется выражением (17), при $z > 0$ естественно ограничить возможные значения $v(x, z)$ интервалом $\gamma \leq v(x, z) < \pi/2$, а в (20) выбрать знак «-». Оправданность таких предположений обосновывается в первую очередь физическими соображениями и интуитивными представлениями, согласно которым граница резкого перехода между областью, занятой полем конечной амплитуды $\sqrt{\rho_0}$, и «вакуумом» (той частью пространства, где внутри структурных элементов решетки излучение практически отсутствует) должна постепенно размываться прежде всего за счет возникновения знакоопределенных градиентов фазы, что в гидродинамической терминологии отвечает процессу разлета «газа», а распространение малых возмущений по однородному фону с $\rho(x, z) = \rho_0$ и $v(x, z) = \gamma$ от места исходного разрыва происходит со скоростью $\sqrt{\rho_0}$, являющейся аналогом «скорости звука» [55, 56].

Подставив $\xi = u - \sqrt{2\rho \cos v}$ в (18) и проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение с учетом граничных условий $\rho(-\infty, z) = \rho_0$ и $v(-\infty, z) = \gamma$, найдем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\gamma}^v \sqrt{\cos w} dw = \\ &= \sqrt{2} \left(E(v/2, 2) - E(\gamma/2, 2) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

которое совместно с задействованным при его выводе выражением для ξ дает полное аналитическое решение интересующей нас задачи об эволюции полуограниченного пучка с кусочно-постоянным профилем интенсивности в рамках бездисперсионного приближения для ДНУШ. Отметим, что в (21) используется стандартное обозначение $E(v/2, 2)$ для неполного эллиптического интеграла второго рода.

Согласно проведенному нами в предыдущем разделе анализу, до тех пор пока в каждой точке пространства выполняется неравенство $\cos v(x, z) > 0$, совокупность квазилинейных уравнений (7), (8) (как и эквивалентная ей форма записи (10), (11)) является всюду гиперболической. Следовательно, неоднородное распределение волнового поля при распространении не подвержено неустойчивости. Однако если возникают области, где $\cos v(x, z) < 0$, то малые возмущения на этих участках будут экспоненциально нарастать, что в конечном итоге должно

привести к разрушению пучка. Принимая во внимание данные обстоятельства и соотношение (21), справедливое для автомодельного решения, несложно показать, что гиперболичность системы (7), (8) сохраняется в процессе эволюции волнового пучка лишь при начальных интенсивностях ρ_0 , не превышающих критическое значение

$$\rho_{0cr} = 2 \left(E(\pi/2, 2) - E(\gamma/2, 2) \right)^2. \quad (22)$$

В итоге естественно ожидать, что в ситуациях, когда $\rho_0 > \rho_{0cr}$, дискретность среды принципиальным образом сказывается на динамике световых пучков в одномерной решетке волноводов и приводит к разрушению плавных распределений поля. Этот вывод подтверждается сравнением данных прямого численного моделирования эволюции поля в рамках ДНУШ (1) и НУШ (2), исходный профиль которого был задан в форме соответственно

$$\begin{aligned} \psi_n(0) &= \psi(x = n, 0)e^{-i\gamma n} \quad \text{и} \\ \psi(x, 0) &= \sqrt{\rho_0} \left[1 - \text{th}(x/\sigma) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

которая является часто используемой непрерывной аппроксимацией кусочно-постоянной функции.

На рис. 2 представлен случай, когда величина интенсивности ρ_0 ниже критического значения (22). Видно, что результаты расчетов для дискретной и континуальной задач практически совпадают не только качественно, но и количественно. Однако в ситуации, показанной на рис. 3 и отвечающей выбору $\rho_0 > \rho_{0cr}$, заметны существенные различия, объяснить которые можно развитием неустойчивости. В процессе эволюции в периферийной части волнового пучка возникает область, в которой поведение поля определяется эллиптической системой квазилинейных уравнений и малые возмущения нарастают экспоненциально, распространяясь к зону гиперболичности (см. рис. 3b, c).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что сделанный выше вывод не зависит от сосредоточенной в пучке мощности. Следовательно, для любых широких распределений произвольной амплитуды с исходно плоским ($v_n(0) = 0$) или слегка наклонным ($v_n(0) = \gamma$, где $|\gamma| < \pi/2$) фазовым фронтом начальная стадия эволюции достаточно хорошо описывается системой гиперболических квазилинейных уравнений и практически не отличается от того, что происходит с такими же волновыми полями в непрерывной зада-

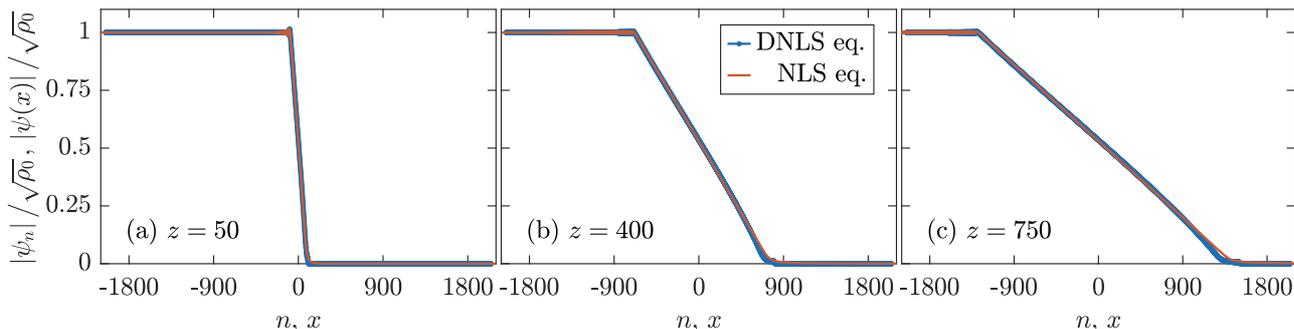


Рис. 2. (В цвете онлайн) То же, что на рис. 1, для пучков, заданных при $z = 0$ в форме (23). Представленные результаты отвечают параметрам $\gamma = -0.25$, $\sigma = 1.33$ и $\sqrt{\rho_0} = 0.85\sqrt{\rho_{0cr}}$, где $\rho_{0cr} \approx 0.493$ — рассчитанное по формуле (22) критическое значение интенсивности для данной ситуации. Результаты расчетов практически совпадают для всех представленных сечений $z = 50$ (a), $z = 400$ (b) и $z = 750$ (c). Отличия между ними можно считать несущественными, так как на сплошные кривые красного цвета фактически накладываются точки, соединенные между собой линиями синего цвета

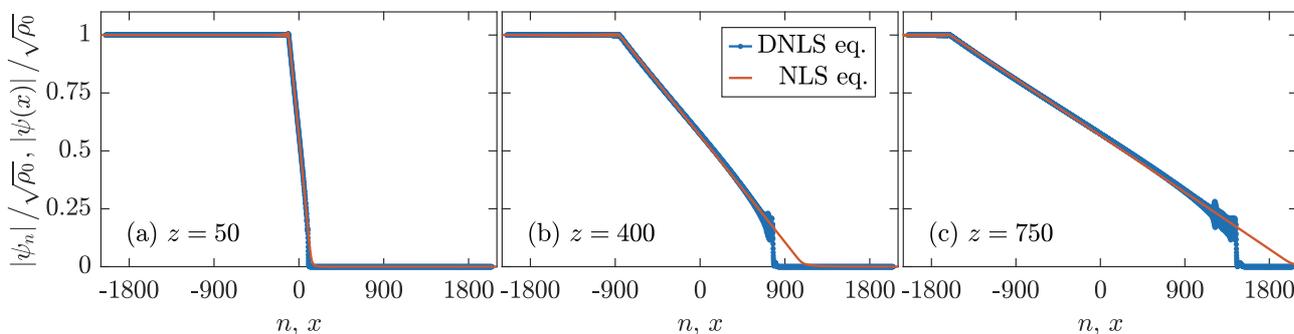


Рис. 3. (В цвете онлайн) То же, что и на рис. 2, только для $\sqrt{\rho_0} = 1.15\sqrt{\rho_{0cr}}$. В этой ситуации пороговое значение $\rho_{0cr} \approx 0.493$ превышено, что, согласно развитым нами теоретическим представлениям, должно приводить к разрушению профиля пучка в дискретном случае. Видно, что данный процесс начинается с нарастания возмущений на периферии плавного профиля поля, которое вызвано развитием неустойчивости на его фоне. В расчетах, выполненных в рамках НУШ (2), подобного эффекта не наблюдается

че при описании их динамики в рамках дефокусирующего НУШ. Другими словами, нелинейные эффекты в первую очередь приводят к расплыванию огибающей пучка, на фоне которого происходит локальное укручение поперечного профиля и образование резкого перепада аналогично тому, как протекают подобные процессы в газодинамике. Однако последующие этапы распространения в континуальной и дискретной моделях могут как совпадать, так и существенным образом различаться в зависимости от того, выполняется ли для разности фаз $v_n(z) = \theta_n(z) - \theta_{n-1}(z)$ комплексной волновой функции $\psi_n(z) = \phi_n(z) \exp[-i\theta_n(z)]$ в соседних элементах решетки условие $\cos v_n(z) > 0$ по-прежнему во всем пространстве или же возникают области, где $\cos v_n(z) < 0$. Как показывает проведенный нами анализ, данное условие позволяет находить крити-

ческие параметры начальных распределений поля, для которых следует ожидать развития неустойчивости, приводящей впоследствии к их разрушению.

Численное моделирование эволюции системы в рамках ДНУШ подтверждает сделанные выводы относительно динамики поля в дефокусирующем режиме. В работе приведены примеры различных вариантов эволюции неоднородных профилей интенсивности электромагнитных пучков, инжектируемых в одномерную решетку эквидистантно расположенных световодов. При этом наглядно продемонстрировано, что существуют сценарии, которые отсутствуют в аналогичных ситуациях в сплошной (неструктурированной) среде и характеризуются ростом малых возмущений и возникновением изрезанностей на периферии плавных распределений поля. В конечном счете этот

процесс распространяется на центральную часть волнового пучка. При дальнейшем увеличении амплитуды поля интенсивность мелкомасштабной неустойчивости увеличивается. Это означает, что волновые поля с амплитудой, превышающей критическое значение, теряют когерентность в процессе распространения в дефокусирующей среде. Естественно ожидать нарушения плавной структуры поля и при распространении его в активной среде. Такого рода нарушение когерентности наступает катастрофическим образом.

Финансирование. Работа выполнена в Научном центре мирового уровня «Центр фотоники» при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2020-906).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Kevrekidis, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives*, Springer Science & Business Media (2009).
2. C. Denz, S. Flach, Yu S. Kivshar et al., *Nonlinearities in Periodic Structures and Metamaterials*, Springer (2010).
3. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides et al., *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
4. Yu. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 247 (2011).
5. I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rep.* **518**, 1 (2012).
6. Э. Скотт, *Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур*, Физматлит, Москва (2007).
7. Э. Инфельд, Дж. Роуланс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос*, Физматлит, Москва (2005).
8. J. Yang, *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*, SIAM (2010).
9. A. B. Aceves, C. De Angelis, T. Peschel et al., *Phys. Rev. E* **53**, 1172 (1996).
10. A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov, and S. A. Skobelev, *Phys. Rev. A* **94**, 063806 (2016).
11. А. Г. Литвак, В. А. Миронов, С. А. Скобелев, Л. А. Смирнов, *ЖЭТФ* **153**, 28 (2018).
12. A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov, and S. A. Skobelev, *Quant. Electr.* **48**, 720 (2018).
13. A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov, and S. A. Skobelev, *Laser Phys.* **28**, 045401 (2018).
14. A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. Mironov et al., *Laser Phys.* **28**, 105401 (2018).
15. O. Bang and P. D. Miller, *Opt. Lett.* **21**, 1105 (1996).
16. A. Trombettoni and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353 (2001).
17. A. Smerzi, A. Trombettoni, P. G. Kevrekidis, and A. R. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 170402 (2002).
18. T. Anker, M. Albiez, R. Gati et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020403 (2005).
19. R. Franzosi, R. Livi, G.-L. Oppo, and A. Politi, *Nonlinearity* **24**, R89 (2011).
20. H. Hennig and R. Fleischmann, *Phys. Rev. A* **87**, 033605 (2013).
21. H. Hennig, T. Neff, and R. Fleischmann, *Phys. Rev. E* **93**, 032219 (2016).
22. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2001).
24. S. Trillo and M. Conforti, in *Handbook of Optical Fibers*, ed. by G.-D. Peng, Springer Singapore (2019), pp. 373–419.
25. А. М. Камчатнов, *УФН* **191**, 52 (2021).
26. А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **154**, 1016 (2018).
27. А. М. Камчатнов, *Phys. Rev. E* **99**, 012203 (2019).
28. M. Isoard, A. M. Kamchatnov, and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **99**, 053819 (2019).
29. M. Isoard, A. M. Kamchatnov, and N. Pavloff, *Europhys. Lett.* **129**, 64003 (2020).
30. S. Ivanov and A. Kamchatnov, *Phys. Fluids* **31**, 057102 (2019).
31. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, *Phys. Fluids* **32**, 126115 (2020).
32. S. K. Ivanov, J.-E. Suchorski, A. M. Kamchatnov et al., *Phys. Rev. E* **102**, 032215 (2020).
33. G. Xu, A. Mussot, A. Kudlinski et al., *Opt. Lett.* **41**, 2656 (2016).

34. V. A. Brazhnyi, A. M. Kamchatnov, and V. V. Konotop, *Phys. Rev. A* **68**, 035603 (2003).
35. А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **125**, 1041 (2004).
36. Y. Kodama and S. Wabnitz, *Opt. Lett.* **20**, 2291 (1995).
37. Y. Kodama, S. Wabnitz, and K. Tanaka, *Opt. Lett.* **21**, 719 (1996).
38. Y. Kodama, *SIAM J. Appl. Math.* **59**, 2162 (1999).
39. G. Biondini and Y. Kodama, *J. Nonlinear Sci.* **16**, 435 (2006).
40. O. C. Wright, M. G. Forest, and K.-R. McLaughlin, *Phys. Lett. A* **257**, 170 (1999).
41. M. Forest, C. J. Rosenberg, and O. C. Wright, *Nonlinearity* **22**, 2287 (2009).
42. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **99**, 013609 (2019).
43. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, *Europhys. Lett.* **132**, 65001 (2020).
44. G. Marcucci, D. Pierangeli, S. Gentilini et al., *Adv. Phys. X* **4**, 1662733 (2019).
45. T. Bienaimé, M. Isoard, Q. Fontaine et al., *Phys. Rev. Lett.* **126**, 183901 (2021).
46. B. Wetzal, D. Bongiovanni, M. Kues et al., *Phys. Rev. Lett.* **117**, 073902 (2016).
47. D. Bongiovanni, B. Wetzal, P. Yang et al., *Opt. Lett.* **44**, 3542 (2019).
48. D. Bongiovanni, B. Wetzal, Z. Li et al., *Opt. Express* **28**, 39827 (2020).
49. M. A. Hoefler, P. Engels, and J. J. Chang, *Physica D* **238**, 1311 (2009).
50. B. G. Bale and S. Boscolo, *J. Opt.* **12**, 015202 (2009).
51. S. Wabnitz, *J. Opt.* **15**, 064002 (2013).
52. M. Conforti, F. Baronio, and S. Trillo, *Phys. Rev. A* **89**, 013807 (2014).
53. S. Bose, R. Chattopadhyay, and S. K. Bhadra, *Opt. Comm.* **412**, 226 (2018).
54. A. B. Shvartsburg, *Phys. Rep.* **83**, 107 (1982).
55. A. M. Kamchatnov, *J. Phys. Comm.* **2**, 025027 (2018).
56. S. K. Ivanov, *Phys. Rev. A* **101**, 053827 (2020).