ЖЭТФ, 2022, том 161, вып. 6, стр. 816–824

ФРУСТРИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА С ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ СПИНА $q = 4$ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. К. Рамазанов**, *А. К. Муртазаев*, *М. А. Магомедов

Институт физики Дагестанского федерального исследовательского центра Российской академии наук
367015, Махачкала, Россия

Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук
367000, Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 6 декабря 2021 г.,
после переработки 16 декабря 2021 г.
Принята к публикации 16 декабря 2021 г.

На основе репличного алгоритма методом Монте-Карло выполнены исследования магнитных структур основного состояния, фазовых переходов, магнитных и термодинамических свойств двумерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей во внешнем магнитном поле. Исследования проведены в интервале величины магнитного поля $0 \leq h \leq 7.0$ с шагом 0.5. Построены магнитные структуры основного состояния. Установлено, что в интервалах значений магнитного поля $0 < h < 1.0$ и $2.0 \leq h \leq 3.5$ наблюдается фазовый переход первого рода, а при значении поля $h = 1.5$ — фазовый переход второго рода. Показано, что в интервале $4.0 \leq h \leq 7.0$ магнитное поле снимает вырождение основного состояния, и фазовый переход размывается.

DOI: 10.31857/S0044451022060049
EDN: DUHOLM

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий наблюдается повышенный интерес к изучению эффектов фрустрации в спиновых решеточных моделях. Конкуренция обменных взаимодействий может привести к возникновению фрустраций в магнитных спиновых системах, которые не позволяют системе одновременно минимизировать все ее локальные взаимодействия, что приводит к бесконечно вырожденному основному состоянию [1–3]. Спиновые системы с фрустрациями обладают богатой природой фазовых переходов (ФП) и имеют особенности магнитного, термодинамического и критического поведения. Особый интерес имеет изучение влияния возмущений различной природы, таких как внешнее магнитное поле, взаимодействие вторых ближайших соседей, немагнитные примеси, тепловые и квантовые флуктуации и др., на физические свойства магнитных спиновых систем с фрустрациями. Включение этих возмущающих факторов может привести к совершенно новому физическому поведению таких систем [4–10]. Причина такого поведения заключается в высокой чувствительности фрустрированных систем к внешним возмущающим факторам. В данном исследовании нами изучается влияние внешнего магнитного поля на характер ФП, магнитные и термодинамические свойства двумерной модели Поттса с фрустрациями. При решении такого рода задач до сих пор ограничивались моделями Изинга и Гейзенберга. В настоящее время влияние внешних возмущающих факторов, в том числе и магнитного поля в модели Изинга и Гейзенберга, достаточно хорошо изучено [11–16]. Для фрустрированной модели Поттса существует совсем немного надежно установленных фактов. Большинство имеющихся результатов получены для двумерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 2$ и $q = 3$ [17–23]. Эта модель изучена достаточно хорошо и получены интересные результаты. Модель Поттса демонстрирует температурный ФП первого или второго порядка в зависимости от числа состояний спина q, пространственной размерности и геометрии решетки. Критические свойства ферромагнитной модели Поттса известны лишь в двумерном случае [23, 24]. Двумерная модель Поттса с числом состояний спина $q = 4$ довольно уникальна и до сих пор мало

* E-mail: sheikh77@mail.ru

изучена. Данная модель интересна и тем, что значение $q = 4$ является граничным значением интервала $2 \le q \le 4$, где наблюдается ФП второго рода, и области значений $q > 4$, в которой ФП происходит как переход первого рода [24]. Результаты исследований двумерной ферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на треугольной [25], гексагональной [26, 27] решетках и на решетке Кагоме [28], полученные методом Монте-Карло (МК), показывают, что в данной модели наблюдается ФП первого рода. Интерес к модели Поттса обусловлен еще и тем, что эта модель служит основой теоретического описания широкого круга физических свойств и явлений в физике конденсированных сред. К их числу относятся некоторые классы адсорбированных газов на графите, сложные анизотропные ферромагнетики кубической структуры, спиновые стекла, многокомпонентные сплавы и жидкие смеси [29]. На основе модели Поттса с различным числом состояний спина могут быть описаны структурные ФП во многих материалах [16]. Работ, посвященных изучению влияния внешнего магнитного поля как возмущающего фактора на ФП, магнитные и термодинамические свойства модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$, практически нет, и этот вопрос все еще остается открытым и малоизученным. В связи с этим, в данной работе нами предпринята попытка на основе метода МК изучить влияние внешнего магнитного поля на ФП, магнитные и термодинамические свойства двумерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке с учетом обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей. Исследования проводятся на основе современных методов и идей, что позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных с характером и природой ФП фрустрированных спиновых систем.

2. МОДЕЛЬ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЙ

Гамильтониан модели Поттса с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей, а также внешнего магнитного поля имеет следующий вид:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j\rangle, i\neq j} S_i S_j - J_2 \sum_{\langle i,k\rangle, i\neq k} S_i S_k - h \times \sum_{\langle i,j\rangle} S_i = -J_1 \sum_{\langle i,j\rangle, i\neq j} \cos\theta_{i,j} - J_2 \sum_{\langle i,k\rangle, i\neq k} \cos\theta_{i,k} - h \sum_{\langle i\rangle} S_i, \quad (1)$$

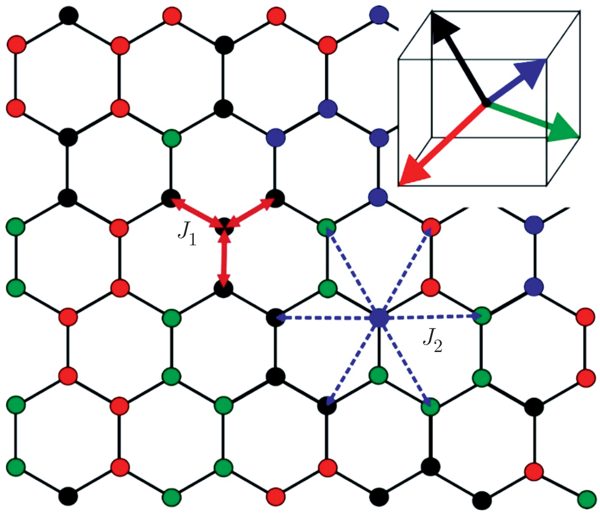

Рис. 1. Модель Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке. Кружками одного и того же цвета обозначены спины, имеющие одинаковое направление. На вставке для каждого из четырех возможных направлений спина приведено соответствующее цветовое представление

где J_1 и J_2 — параметры обменных ферро- ($J_1 > 0$) и антиферромагнитного ($J_2 < 0$) взаимодействий соответственно для первых и вторых ближайших соседей, $\theta_{i,j}$, $\theta_{i,k}$ — углы между взаимодействующими спинами $S_i - S_j$ и S_i–S_k, h — величина магнитного поля (h приводится в единицах J_1). В данном исследовании рассматривается случай, когда $|J_1| = |J_2| = 1$. Величина внешнего магнитного поля менялась в интервале $0 \le h \le 7.0$ с шагом 0.5. Магнитное поле направлено вдоль одного из направлений спина.

Схематическое и цветовое представление модели представлено на рис. 1. Спины, обозначенные кружками одного и того же цвета, имеют одинаковое направление. На вставке приведены направления спинов для каждого из четырех значений спина и соответствующее цветовое представление. На рисунке также представлены взаимодействия между первыми и вторыми ближайшими соседями. Как видно на рисунке, у каждого спина есть три ближайших (сплошные жирные линии красного цвета) и шесть следующих ближайших (пунктирные линии синего цвета) соседей. Направления спинов заданы таким образом, что выполняется равенство

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } S_i = S_j, \\ 109.47^\circ, & \text{если } S_i \neq S_j. \end{cases}$$

или

$$\cos\theta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j, \\ -1/3, & \text{если } S_i \neq S_j. \end{cases} \quad (2)$$

Согласно уравнению (2) для двух спинов S_i и S_j энергия парного обменного взаимодействия $E_{i,j} = -J_1$, если $S_i = S_j$. В случае когда $S_i \neq S_j$, энергия $E_{i,j} = J_1/3$. Таким образом, энергия парного взаимодействия спинов равна одной величине при их одинаковом направлении и принимает другое значение при не совпадении направлений спинов. Для модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ в трехмерном пространстве такое возможно только при ориентации спинов, как показано на рис. 1.

В настоящее время спиновые системы с фрустрациями на основе микроскопических гамильтонианов успешно изучаются на основе метода МК [9, 10, 30–37]. В последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК. Одним из наиболее эффективных для исследования подобных систем является репличный обменный алгоритм [38]. Поэтому в данном исследовании мы использовали этот алгоритм.

Репличный обменный алгоритм был использован нами в следующем виде:

1. Одновременно моделируются N реплик $X_1, X_2, \ldots, X_N$ с температурами $T_1, T_2, \ldots, T_N$.

2. После выполнения одного МК-шага/спин для всех реплик проводится обмен данными между парой соседних реплик X_i и X_{i+1} в соответствии со схемой Метрополиса с вероятностью

$$w(X_i \to X_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \leq 0; \\ \exp(-\Delta), & \text{если } \Delta > 0. \end{cases}$$

где

$$\Delta = -(U_i - U_{i+1})(1/T_i - 1/T_{i+1}),$$

U_i и U_{i+1} — внутренние энергии реплик.

Главное преимущество этого алгоритма перед другими репличными алгоритмами в том, что вероятность обмена априори известна, тогда как для других алгоритмов определение вероятности — процедура достаточно длительная и отнимает много времени. В репличном обменном алгоритме для каждой реплики реализуется случайное блуждание по «температурному интервалу», которая, в свою очередь, стимулирует случайное блуждание в поле потенциальной энергии. Это облегчает решение проблемы «застревания» системы в многочисленных состояниях с локальной минимальной энергией, которая характерна для спиновых систем с фрустрациями. Для повышения эффективности этого метода необходимо увеличение числа реплик, что требует серьезного роста компьютерных мощностей. Современные компьютеры обладают достаточной мощностью, что позволяет моделировать необходимое количество реплик и получать результаты с высокой точностью.

Для анализа природы и характера ФП использовался гистограммный метод анализа данных. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался участок длиной $\tau_0 = 4 \cdot 10^5$ шагов МК на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка. Усреднение термодинамических параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau = 500\tau_0$ шагов МК на спин. Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $L \times L = N$, $L = 12$–60, где L — линейный размер решетки, N — количество спинов в системе.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 представлены магнитные структуры основного состояния при разных значениях магнитного поля. На этом рисунке спины, имеющие одинаковое направление, обозначены кружками одного и того же цвета. Магнитное поле направлено вдоль спина, обозначенного черным цветом. На рисунке видно, что при отсутствии внешнего магнитного поля ($h = 0$) в данной модели в основном состоянии реализуется димерная структура, т. е. наблюдается магнитное состояние, при котором спины упорядочиваются попарно. Более подробно магнитные

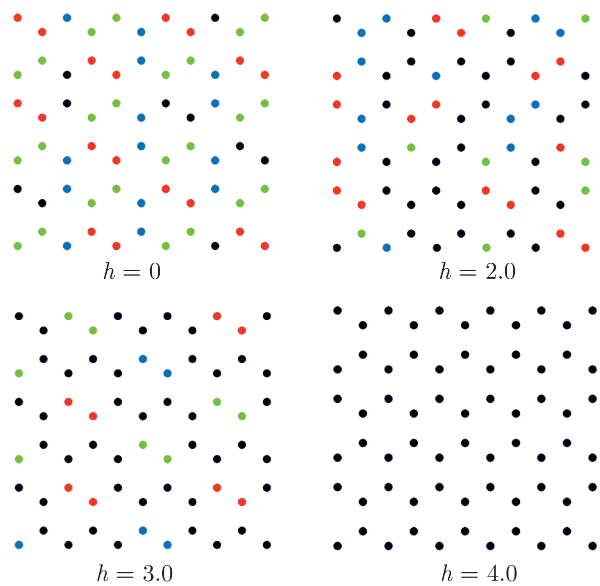

Рис. 2. Магнитные структуры основного состояния. Кружками одного и того же цвета обозначены спины, имеющие одинаковое направление

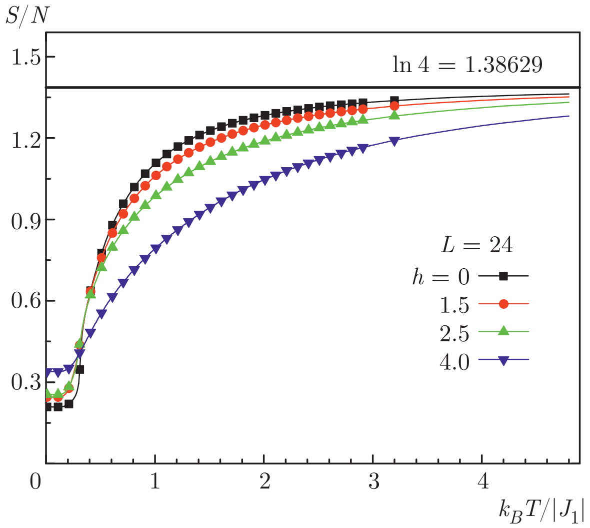

Рис. 3. Температурные зависимости энтропии S

структуры, полученные для данной модели без поля, описаны в работах [39, 40]. Магнитные структуры в слабых магнитных полях ($h \leq 3.5$) представлены в работе [41]. Для поля $h = 2.0$ наблюдается увеличение числа кружков черного цвета. Это связано с увеличением числа спинов, ориентированных вдоль внешнего поля. При этом на рисунке появляются области с частичным упорядочением спинов. При значении поля $h = 3.0$ в системе наблюдается страйповое упорядочение. Наблюдается магнитное состояние, при котором спины выстраиваются в полосовую структуру. Включение сильных полей ($h \geq 4.0$) приводит к упорядочению всех спинов в системе вдоль внешнего магнитного поля. Это свидетельствует о том, что внешнее магнитное поле приводит к изменению структуры магнитного упорядочения.

На рис. 3 приведены температурные зависимости энтропии S для различных значений магнитного поля при $L = 24$ (здесь и далее статистическая погрешность не превышает размеров символов, использованных для построения зависимостей). На рисунке видно, что с увеличением температуры энтропия для всех систем стремится к теоретически предсказанному значению $\ln 4$. При низких температурах, близких к абсолютному нулю, энтропия стремится к ненулевому значению для всех значений поля. Ненулевая остаточная энтропия является следствием вырождения основного состояния. Такое поведение энтропии свидетельствует о возникновении в системе фрустраций.

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости C мы использовали выражение [42]

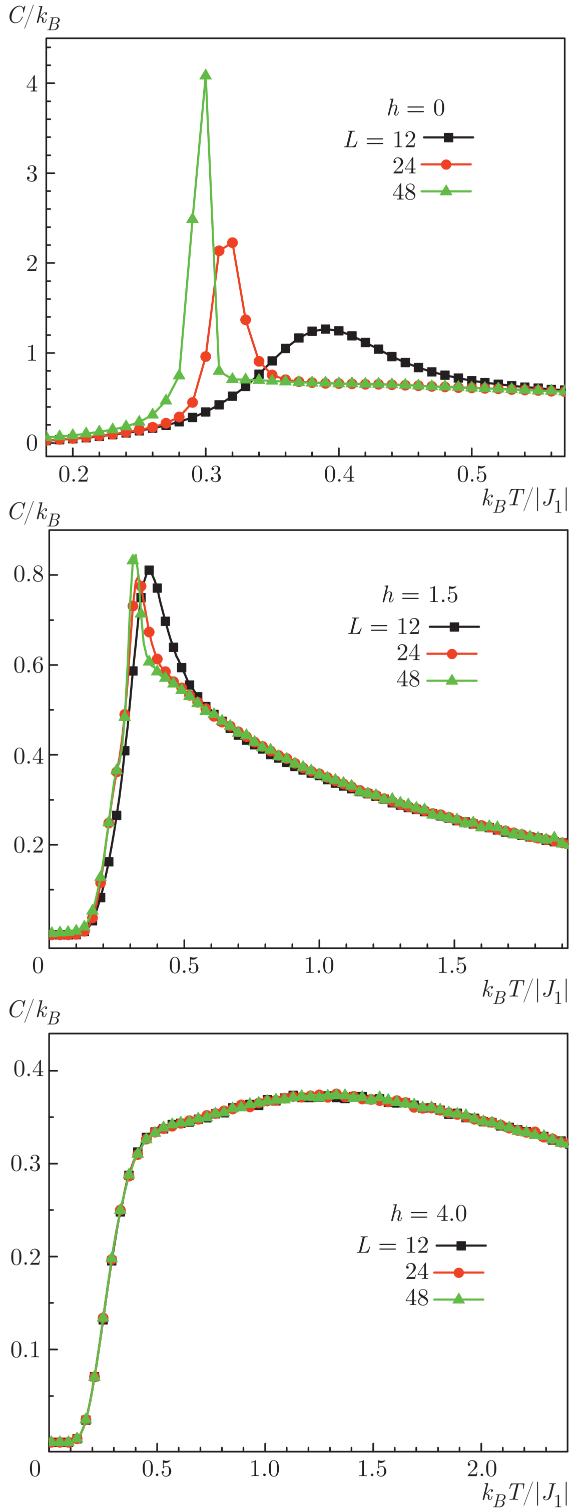

Рис. 4. Температурные зависимости теплоемкости C/k_B для систем с различными линейными размерами

$$C = (NK^2)(\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \qquad (3)$$

где $K = |J_1|/k_BT$, U — внутренняя энергия.

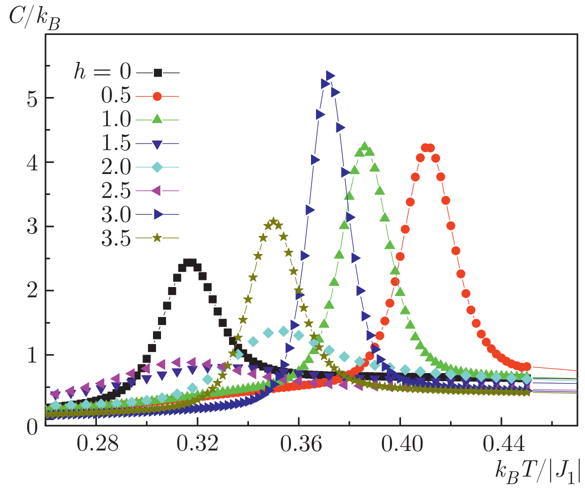

Рис. 5. Температурные зависимости теплоемкости C/k_B в интервале поля $0 \le h \le 3.5$

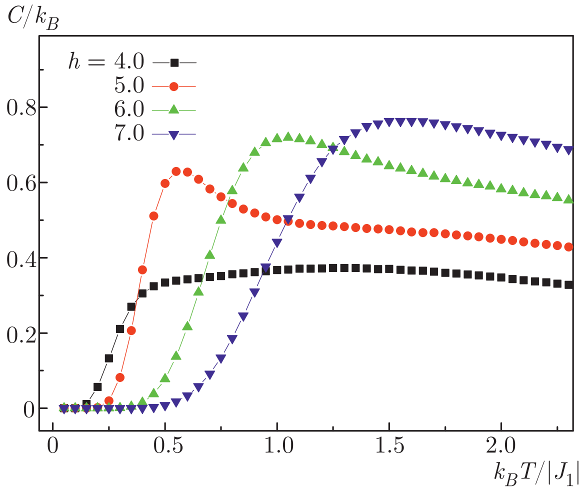

Рис. 6. Температурные зависимости теплоемкости C/k_B для поля $h \le 4.0$

На рис. 4 представлены характерные зависимости теплоемкости C от температуры для систем с линейными размерами $L = 12$; 24 и 48 для различных значений магнитного поля. Отметим, что для поля $h = 0$ на зависимости теплоемкости C от температуры для всех систем вблизи критической температуры наблюдаются хорошо выраженные максимумы, которые увеличиваются с ростом числа спинов в системе, причем эти максимумы с ростом L смещаются в сторону низких температур. Для поля $h = 1.5$ максимумы теплоемкости не меняются с ростом L и в пределах погрешности приходятся на одну и ту же температуру. Такая же картина наблюдается для поля $h = 4.0$. На этом рисунке видно, что температурные зависимости теплоемкости не зависят от линейных размеров системы. Такая картина температурной зависимости теплоемкости обычно наблюдается для фрустрированных спиновых систем.

На рис. 5 и 6 представлены температурные зависимости теплоемкости C для различных значений магнитного поля при $L = 24$. На рис. 5 видно, что в интервале $0 \le h \le 3.5$ вблизи критической области наблюдаются хорошо выраженные максимумы теплоемкости, кроме значений поля $h = 1.5$ и $h = 2.5$. Отметим, что при значении поля $h = 1.5$ и $h = 2.5$ для теплоемкости наблюдается необычное поведение, которое характеризуется отсутствием ярко выраженного пика. Максимумы теплоемкости в данном случае вместо острых пиков имеют сглаженные пики. Для значения поля $h = 2.0$ максимум теплоемкости становится более плавными. Можно предположить, что такое поведение теплоемкости связано с изменением структуры магнитного упорядочения. При включении слабого магнитного поля ($h = 0.5$) максимум теплоемкости смещается в сторону высоких температур. Дальнейший рост поля приводит к сдвигу максимума теплоемкости в сторону низких температур. Такое поведение теплоемкости объясняется тем, что увеличение величины магнитного поля приводит к быстрому упорядочению системы, уменьшению флуктуаций и соответственно уменьшению температуры ФП. На рис. 6 видно, что при значениях магнитного поля $h \ge 4.0$ характерные пики теплоемкости не наблюдаются. Это говорит о том, что дальнейшее увеличение величины магнитного поля приводит к подавлению ФП в системе.

Параметр порядка системы m вычислялся по формуле

$$m = \frac{1}{N}\,\frac{4N_{max} - N_1 - N_2 - N_3 - N_4}{3}, \qquad (4)$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 — число спинов, соответствующих одному из четырех направлений спина.

На рис. 7 и 8 представлены графики зависимости параметра порядка m от температуры для разных значений магнитного поля. При отсутствии внешнего магнитного поля в системе отсутствует порядок и значение параметра порядка близко к нулю. При включении поля в системе наблюдается частичное упорядочение и параметр порядка в низкотемпературной области имеет отличные от нуля значения. Это объясняется тем, что магнитное поле выстраивает спины вдоль своего направления и в системе возникает частичный порядок. С ростом величины магнитного поля увеличивается число спинов, которые выстраиваются вдоль внешнего поля. Этим

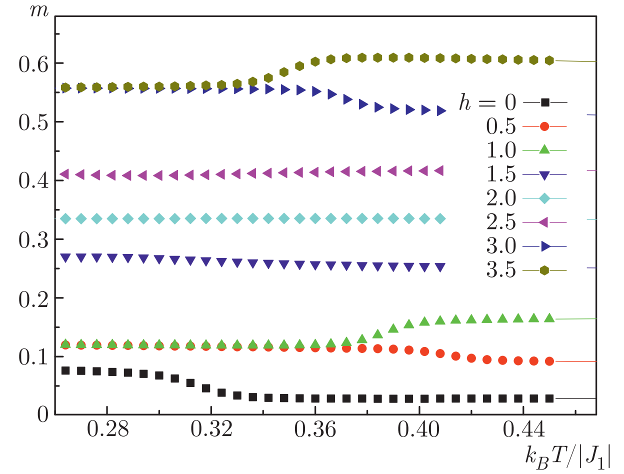

Рис. 7. Температурные зависимости параметра порядка в интервале поля $0 \le h \le 3.5$

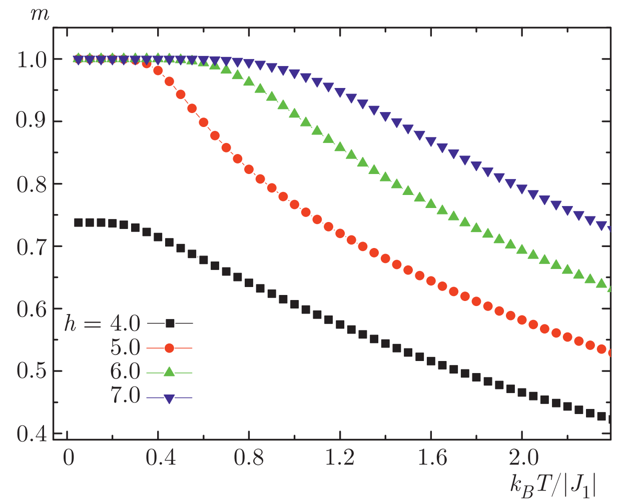

Рис. 8. Температурные зависимости параметра порядка для поля $h \ge 4.0$

обусловлено то, что параметр порядка в низкотемпературной области растет с увеличением поля. При значениях поля $h \ge 5.0$ в низкотемпературной области параметр порядка $m = 1.0$. Это свидетельствует, о том, что при высоких значениях поля все спины в системе упорядочены вдоль внешнего поля.

На рис. 9 приведен график зависимости параметра порядка m от величины магнитного поля h в низкотемпературной области. На рисунке мы наблюдаем ступенчатую зависимость параметра порядка. Наблюдаются четыре ступеньки: I, II, III и IV. Ступенька I соответствует магнитному упорядочению, при котором только одно состояние спина (черный цвет) совпадает с направлением внешнего поля, а остальные три состояния спина направлены так,

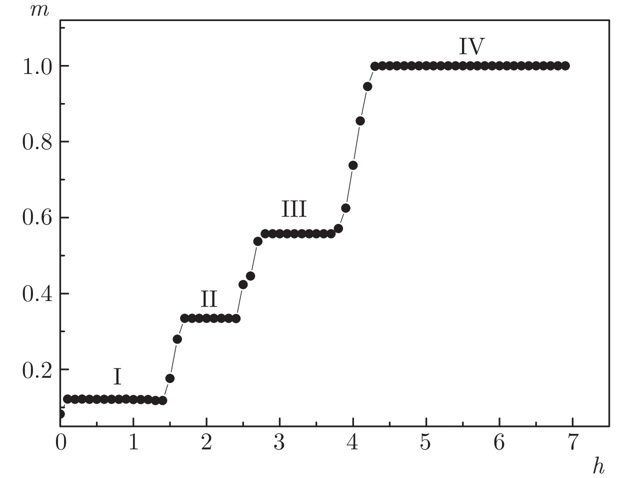

Рис. 9. Фазовая диаграмма зависимости параметра порядка от магнитного поля. Магнитное поле h приводится в единицах J_1

как изображено на рис. 1. При увеличении внешнего магнитного поля ($h = 1.5$) еще одно состояние спина (второе) выстраивается вдоль внешнего поля. В системе возникает частичный порядок. Это приводит к возникновению ступеньки II на графике. При дальнейшем увеличении поля ($h = 3.0$) вдоль внешнего поля выстраивается еще одно состояние спина (третье). Этим обусловлено возникновение ступеньки III на графике. При значении поля $h = 4.5$ вдоль внешнего поля выстраивается следующее состояние спина (четвертое). С этим связано возникновение ступеньки IV на графике. Анализируя рис. 9, можно предположить, что поля $h = 1.5$, 2.5 и 4.0 являются для данной модели фрустрирующими полями. Это также подтверждается поведением температурной зависимости теплоемкости (рис. 5 и 6). Видно, что теплоемкость в этих полях пологая и значительно ниже, чем в остальных (нефрустрирующих) полях.

Для определения критической температуры T_C мы использовали метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [43]:

$$V_L = 1 - \frac{\langle U^4\rangle_L}{3\langle U^2\rangle_L^2}, \tag{5}$$

$$U_L = 1 - \frac{\langle m^4\rangle_L}{3\langle m^2\rangle_L^2}, \tag{6}$$

где V_L — энергетический кумулянт, U_L — магнитный кумулянт.

Выражения (5) и (6) позволяют определить критическую температуру T_C с большой точностью для

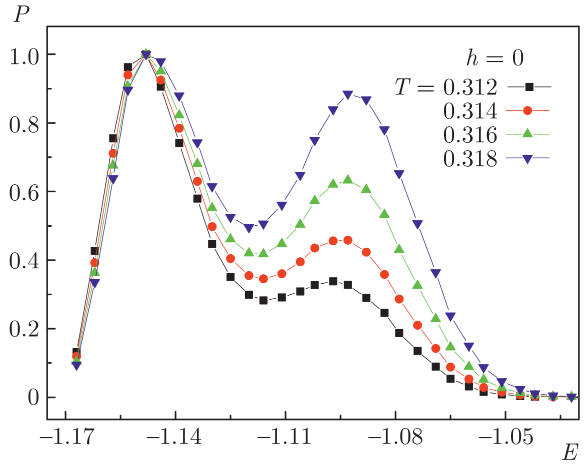

Рис. 10. Гистограммы распределения энергии для поля $h = 0$. Здесь и далее энергия E приведена в единицах J_1

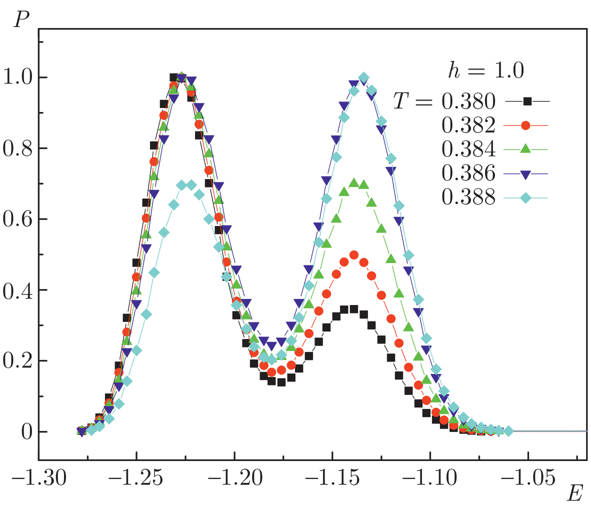

Рис. 11. Гистограммы распределения энергии для поля $h = 1.0$

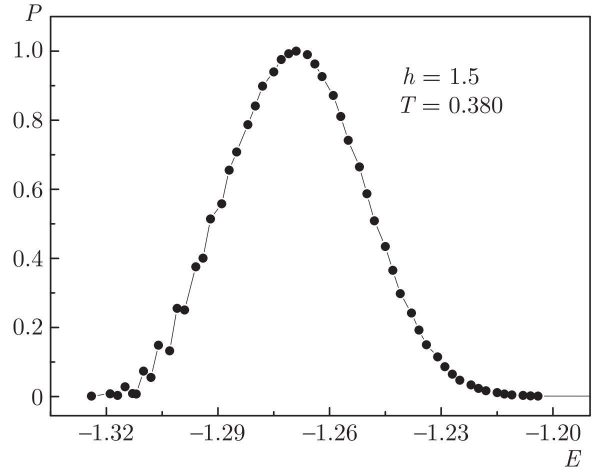

Рис. 12. Гистограммы распределения энергии для поля $h = 1.5$

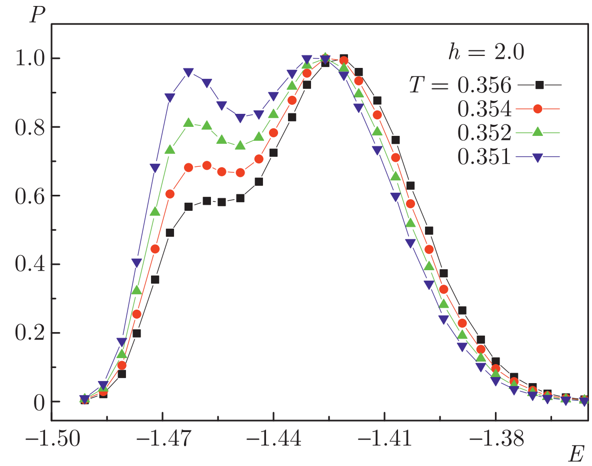

Рис. 13. Гистограммы распределения энергии для поля $h = 2.0$

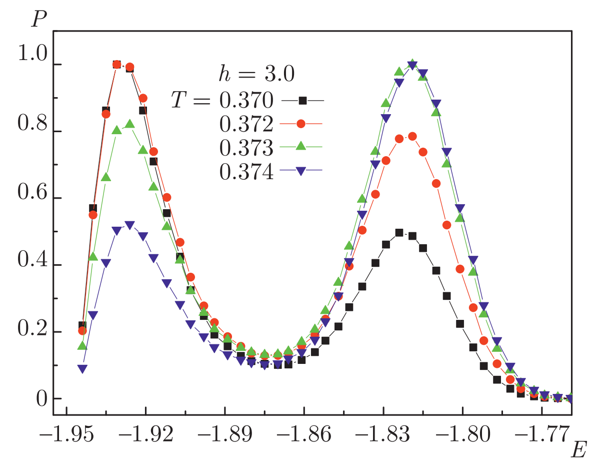

Рис. 14. Гистограммы распределения энергии для поля $h = 3.0$

ФП соответственно первого и второго родов. Применение кумулянтов Биндера позволяет также хорошо тестировать тип ФП в системе. Однако результаты, полученные в работе [44], показывают, что для данной модели этим методом не удается однозначно определить тип ФП. Поэтому в данном исследовании для анализа рода ФП мы использовали гистограммный анализ данных метода МК [45, 46]. Этот метод позволяет надежно определить род ФП. Методика определения рода ФП этим методом подробно описана в работе [30].

Результаты, полученные на основе гистограммного анализа данных, показывают, что в данной модели для значений поля в диапазоне $0 \le h \le 3.5$ кроме значения поля $h = 1.5$ наблюдается ФП первого рода. Это продемонстрировано на рис. 10–14. На этих рисунках представлены гистограммы распределения энергии для системы с линейными размерами $L = 60$ для значений поля $h = 0$, 1.0, 1.5, 2.0 и 3.0 . Графики построены при различных температурах близких критической температуре. На рис. 10–14 видно, что в зависимости вероятности P от энергии E для значений поля $h = 0$, 1.0, 2.0 и 3.0 наблюдаются два хорошо выраженных максимума, которые свидетельствует о ФП первого рода. Наличие двойного пика на гистограммах распределения энергии является достаточным условием для ФП первого рода. Двойные пики на гистограммах распределения для исследуемой модели наблюдаются для значений поля в интервале $0 \leq h \leq 3.5$, кроме значения поля $h = 1.5$. Это позволяет нам утверждать о том, что в рассмотренном интервале значений поля наблюдаются ФП первого рода. На рис. 12 видно, что для значения поля $h = 1.5$ наблюдается один максимум. Наличие одного максимума на гистограмме распределения энергии свидетельствует в пользу ФП второго рода. Можно предположить, что смена типа ФП связана с изменением магнитной структуры основного состояния под влиянием внешнего магнитного поля. Для значений поля $h \geq 4.0$ магнитное поле снимает вырождение основного состояния и ФП размывается.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование влияния магнитного поля на фазовые переходы, магнитные структуры основного состояния и термодинамические свойства двумерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей выполнено с использованием репличного обменного алгоритма метода Монте-Карло. На основе гистограммного метода проведен анализ характера фазовых переходов. Получены магнитные структуры основного состояния в широком интервале значений поля. Построена фазовая диаграмма зависимости параметра порядка от величины магнитного поля. Показано, что в интервале значений магнитного поля $0 \leq h \leq 3.5$, кроме значения $h = 1.5$, наблюдается фазовый переход первого рода. Для поля $h = 1.5$ наблюдается фазовый переход второго рода. Обнаружено, что при сильных полях $h \geq 4.0$ магнитное поле снимает вырождение основного состояния и фазовый переход в системе размывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Toulouse, Commun. Phys. **2**, 115 (1977).

2. J. Villain, J. Phys. **46**, 1840 (1985).

3. H. T. Diep, *Frustrated Spin Systems*, World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., Singapore (2004).

4. С. Е. Коршунов, УФН **176**, 233 (2006).

5. A. Malakis, P. Kalozoumis, and N. Tyraskis, Eur. Phys. J. B **50**, 63 (2006).

6. С. С. Сосин, Л. А. Прозорова, А. И. Смирнов, УФН **175**, 92 (2005).

7. Л. Е. Свистов, А. И. Смирнов, Л. А. Прозорова и др., Письма в ЖЭТФ **80**, 231 (2004).

8. M. Kazuaki and O. Yukiyasu, Phys. Rev. B **101**, 184427 (2020).

9. R. Masrour and A. Jabar, Physica A **541**, 123377 (2020).

10. R. Masrour and A. Jabar, Physica A **491**, 926 (2018).

11. H. Kawamura, J. Phys. Soc. Jpn **61**, 1299 (1992).

12. M. Gvozdikova, P. Melchy, and M. Zhitomirsky, J. Phys.: Condens. Matter **23**, 164209 (2011).

13. A. Chubokov and D. Golosov, J. Phys.: Condens. Matter **3**, 69 (1991).

14. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Письма в ЖЭТФ **106**, 72 (2017).

15. А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Рамазанов, Письма в ЖЭТФ **107**, 265 (2018).

16. H. Kawamura, A. Yamamoto, and T. Okubo, J. Phys. Soc. Jpn. **97**, 043301 (2018).

17. N. Schreiber, R. Cohen, and S. Haber, Phys. Rev. E **97**, 032106 (2018).

18. D. P. Foster and C. Gérard, Phys. Rev. B **70**, 014411 (2004).

19. I. Puha and H. T. Diep, J. Appl. Phys. **87**, 5905 (2000).

20. M. Nauenberg and D. J. Scalapino, Phys. Rev. Lett. **44**, 837 (1980).

21. J. L. Cardy, M. Nauenberg, and D. J. Scalapino, Phys. Rev. B **22**, 2560 (1980).

22. M. K. Ramazanov, A. K. Murtazaev, and M. A. Magomedov, Physica A **521**, 543 (2019).

23. F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).

24. R. J. Baxter, J. Phys. C **6**, 445 (1973).

25. А. К. Муртазаев, Д. Р. Курбанова, М. К. Рамазанов, ФТТ **61**, 2195 (2019).

26. А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, М. К. Мазагаева, М. А. Магомедов, ЖЭТФ **156**, 502 (2019).

27. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Мазагаева, ФТТ **62**, 442 (2020).

28. M. K. Ramazanov, A. K. Murtazaev, M. A. Magomedov, T. R. Rizvanova, and A. A. Murtazaeva, Low Temp. Phys. **47**, 396 (2021).

29. E. Domany, M. Schick, and J. S. Walker, Phys. Rev. Lett. **38**, 1148 (1977).

30. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Письма в ЖЭТФ **109**, 610 (2019).

31. A. K. Murtazaev, M. K. Ramazanov, D. R. Kurbanova, M. A. Magomedov, and K. Sh. Murtazaev, Mat. Lett. **236**, 669 (2019).

32. А. К. Муртазаев, Д. Р. Курбанова, М. К. Рамазанов, ЖЭТФ **156**, 980 (2019).

33. A. K. Murtazaev, M. K. Badiev, M. K. Ramazanov, and M. A. Magomedov, Physica A **555**, 124530 (2020).

34. R. Masrour, A. Jabar, A. Benyoussef, and M. Hamedoun, J. Magn. Magn. Mater. **401**, 695 (2016).

35. A. A. Gangat and Y.-J. Kao, Phys. Rev. B **100**, 094430 (2019).

36. V. T. Ngo, D. T. Hoang, and H. T. Diep, J. Phys.: Cond. Matt. **23**, 226002 (2011).

37. А. О. Сорокин, Письма в ЖЭТФ **111**, 34 (2020).

38. A. Mitsutake, Y. Sugita, and Y. Okamoto, Biopolymers (Peptide Science) **60**, 96 (2001).

39. А. К. Муртазаев, М. К. Мазагаева, М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, А. А. Муртазаева, ФТТ **63**, 622 (2021).

40. А. К. Муртазаев, М. К. Мазагаева, М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, ФММ **122**, 460 (2021).

41. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Мазагаева, Письма в ЖЭТФ **114**, 762 (2021).

42. P. Peczak, A. M. Ferrenberg, and D. P. Landau, Phys. Rev. B **43**, 6087 (1991).

43. K. Binder, D. Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics: An Introduction*, Springer, Berlin, Heidelberg (2010).

44. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Мазагаева, М. Р. Джамалудинов, ФТТ **64**, 237 (2022).

45. F. Wang and D. P. Landau. Phys. Rev. E **64**, 0561011–1 (2001).

46. F. Wang and D. P. Landau. Phys. Rev. Lett. **86**, 2050 (2001).