

# СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В КЭД С СИЛЬНЫМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

А. И. Бреев<sup>a\*</sup>, С. П. Гаврилов<sup>a,b\*\*</sup>, Д. М. Гитман<sup>a,c,d\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Томский государственный университет  
634050, Томск, Россия

<sup>b</sup> Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена  
191186, Санкт-Петербург, Россия

<sup>c</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия

<sup>d</sup> Институт физики, Университет Сан-Паулу  
05508-090, Сан-Паулу, Бразилия

Поступила в редакцию 29 сентября 2021 г.,  
после переработки 29 сентября 2021 г.  
Принята к публикации 18 октября 2021 г.

Построены и исследованы сингулярные функции в КЭД сильного поля с двумя типами внешних электромагнитных полей, которые принципиально различны. Первый тип относится к классу так называемых  $t$ -потенциальных электрических ступеней (электрические поля включаются и выключаются в начальный и конечный моменты времени), а второй — к классу так называемых  $x$ -потенциальных электрических ступеней (не зависящие от времени электрические поля постоянного направления, которые сосредоточены в ограниченном пространстве). Первый тип ( $T$ -постоянное электрическое поле) представляет собой однородное электрическое поле, которое действует в течение конечного промежутка времени  $T$ , а второй ( $L$ -постоянное электрическое поле) — постоянное электрическое поле, ограниченное двумя обкладками конденсатора, разделенными большим расстоянием  $L$ . Для обоих случаев найдены in- и out-решения уравнения Дирака в терминах переменных светового конуса. При помощи этих решений строятся интегральные представления Фока–Швингера по собственному времени для всех сингулярных функций, которые обеспечивают непертурбативные (по отношению к внешнему полю) вычисления любых амплитуд переходов и средних значений всех физических величин. Рассматривая  $T$ -постоянное и  $L$ -постоянное поля как различные регуляризации постоянного однородного электрического поля, можно показать их эквивалентность для достаточно больших  $T$  и  $L$ .

DOI: 10.31857/S0044451022020055

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) идеально описывает процессы с взаимодействующими заряженными частицами и фотонами. КЭД с внешним электромагнитным полем представляет собой удобную модель для рассмотрения процессов с небольшим количеством данных частиц на фоне, создаваемом огромным количеством фотонов, совокупность

которых при определенных обстоятельствах может быть описана полуклассически [1] и выглядит в модели как внешнее поле. Таким образом, в данной модели электромагнитное поле проявляется как внешнее классическое поле и фотоны, которые описываются чисто квантовым образом. Такая модель обычно называется КЭД сильного поля.

Внешнее поле в КЭД сильного поля не может трактоваться пертурбативно и должно учитываться точно, тогда как для процессов с заряженными частицами и фотонами можно построить теорию возмущений. В такой теории возмущений возникают процессы нулевого порядка без фотонов и процессы более высокого порядка с фотонами. Существенная и нетривиальная часть КЭД сильного

\* E-mail: breev@mail.tsu.ru

\*\* E-mail: gavrilovsergeyp@yahoo.com

\*\*\* E-mail: dmitrygitman@hotmail.com

поля связана с процессами нулевого порядка. Рождение частиц из вакуума сильными электрическими внешними полями (эффект Швингера [2], привлекающий внимание уже давно, или, другими словами, нестабильность вакуума), по сути, является проявлением процессов нулевого порядка. Для зависящих от времени внешних электрических полей, которые включаются и выключаются в начальный и конечный моменты времени, теория возмущений с учетом радиационных поправок и с точным учетом взаимодействия с сильным внешним полем была развита в работах [3]. Данные внешние поля постоянного направления называются  $t$ -электрическими ступеньками (далее —  $t$ -ступеньками). А теория возмущений использует существенно специальные наборы точных решений уравнения Дирака для соответствующих  $t$ -ступенек (примеры, когда такие решения могут быть найдены и все вычисления могут быть выполнены аналитически, мы называем точно решаемыми случаями). Она включает в себя технику расчета процессов нулевого порядка, модифицированные правила Фейнмана для расчета амплитуд рассеяния с заряженными частицами и фотонами и теорию возмущений для расчета средних значений. Для простоты эффекты рождения частиц обычно рассматриваются в однородных внешних электрических полях, зависящих от времени.

Подходы к рассмотрению квантовых эффектов в КЭД сильного поля в  $t$ -ступеньках не применимы напрямую к КЭД сильного поля в не зависящих от времени электрических внешних полях постоянного направления, которые сосредоточены в ограниченной пространственной области, в так называемых  $x$ -ступеньках электрического потенциала (далее —  $x$ -ступеньках). В работе [4] был построен пертурбативный подход для расчета процессов нулевого порядка в КЭД сильного поля в  $x$ -ступеньках. Соответствующая техника основана на использовании специальных наборов точных решений уравнения Дирака в  $x$ -ступеньке. Эти решения представляют собой стационарные плоские волны с заданными продольными импульсами  $p^L$  и  $p^R$  в макроскопических областях слева и справа от  $x$ -ступеньки, соответственно (см. [4–6]). По аналогии с КЭД сильного поля в  $t$ -ступеньках можно построить теорию возмущений для КЭД сильного поля в критических  $x$ -ступеньках по радиационным поправкам и с точным учетом взаимодействия с сильным полем.

Сингулярные функции спинорного поля в соответствующих внешних полях (обобщающие известные сингулярные функции в стандартной КЭД, см. [7]) являются ключевыми элементами для построения

теорий возмущений в КЭД сильного поля, как в  $t$ -ступеньках, так и в  $x$ -ступеньках. При этом амплитуды перехода и средние значения физических величин выражаются через причинный пропагатор (in–out-пропагатор)  $S^c(X, X')$ , так называемый in–in-пропагатор  $S_{in}^c(X, X')$  и out–out-пропагатор  $S_{out}^c(X, X')$ . В свою очередь, данные сингулярные функции связаны с in- и out-вакуумом следующим образом:

$$\begin{aligned} S^c(X, X') &= i \langle 0, \text{out} | \hat{T} \hat{\Psi}(X) \times \\ &\quad \times \hat{\Psi}^\dagger(X') \gamma^0 | 0, \text{in} \rangle / \langle 0, \text{out} | 0, \text{in} \rangle, \\ S_{in}^c(X, X') &= i \langle 0, \text{in} | \hat{T} \hat{\Psi}(X) \hat{\Psi}^\dagger(X') \gamma^0 | 0, \text{in} \rangle, \\ S_{out}^c(X, X') &= i \langle 0, \text{out} | \hat{T} \hat{\Psi}(X) \hat{\Psi}^\dagger(X') \gamma^0 | 0, \text{out} \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\hat{\Psi}(X)$  — оператор поля в представлении Гейзенберга, удовлетворяющий уравнению Дирака в соответствующем внешнем поле,

$$\begin{aligned} X = (X^\mu) &= (t, \mathbf{r}), \quad t = X^0, \quad \mathbf{r} = (X^k), \\ x = X^1, \quad \mu &= 0, 1, \dots, D, \quad k = 1, \dots, D, \end{aligned}$$

$\hat{T}$  обозначает операцию хронологического упорядочения;  $|0, \text{in}\rangle$  и  $|0, \text{out}\rangle$  — начальный и конечный вакуум, соответственно.

Отметим, что, несмотря на то, что формальные представления (1) верны в КЭД сильного поля как в  $t$ -ступеньках, так и в  $x$ -ступеньках, in- и out-решения строятся по-разному, так же, как и операторы рождения и уничтожения и соответствующие вакуумные состояния.

Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле заданным потенциалом  $A_\mu(X)$  в  $d$ -мерном пространстве-времени имеет вид ( $\hbar = c = 1$ )

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu P_\mu - m) \psi(X) &= 0, \\ P_\mu &= i\partial_\mu - qA_\mu(X), \end{aligned}$$

где  $\psi(X)$  —  $2^{[d/2]}$ -компонентный спинор,  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака,

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ &= 2\eta^{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_d), \\ d &= D + 1, \end{aligned}$$

$q = -e$ ,  $e > 0$  — заряд электрона,  $m$  — его масса.

Заметим, что в случае, когда вакуум нестабилен, все сингулярные функции (1) различны. Различия между функциями  $S_{in}^c(X, X')$ ,  $S_{out}^c(X, X')$  и причинным пропагатором  $S^c(X, X')$  обозначаются через  $S^p(X, X')$  и  $S^{\bar{p}}(X, X')$ ,

$$\begin{aligned} S^p(X, X') &= S_{in}^c(X, X') - S^c(X, X'), \\ S^{\bar{p}}(X, X') &= S_{out}^c(X, X') - S^c(X, X'). \end{aligned} \quad (2)$$

Перестановочная функция

$$\begin{aligned} S(X, X') &= i[\hat{\Psi}(X), \hat{\Psi}^\dagger(X')\gamma^0]_+, \\ S(X, X')|_{t=t'} &= i\gamma^0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (3)$$

является важной характеристикой спинорного поля. Ее вид существенно зависит от структуры внешнего поля. В работах [3] сформулированы правила построения всех необходимых сингулярных функций в виде сумм по соответствующим точным решениям уравнения Дирака для  $t$ -степенек. Те же идеи можно использовать для построения сингулярных функций в КЭД сильного поля в  $x$ -степенях.

В случае постоянного однородного электромагнитного поля причинный пропагатор электрона  $S^c(X, X')$  был найден в явном виде как интеграл по собственному времени Фока–Швингера много лет назад [2]. Этот вид основывается на методе эффективного действия, см. [8]. Очевидно, что постоянное однородное электромагнитное поле — это идеализация, которая полезна для описания эффектов в медленно меняющихся и слабо неоднородных полях. Случай постоянного однородного электромагнитного поля рассматривается как приближение в ведущем порядке теоретико-полевых расчетов [9, 10], т. е. приближения локально постоянного поля (см., например, работы [11–17] и ссылки в них).

Постоянное однородное электрическое поле можно рассматривать как предел  $T$ -постоянного электрического поля (однородное электрическое поле, которое действует в течение временного интервала  $T$ ) большой длительности или как предел  $L$ -постоянного электрического поля (постоянного электрического поля, заключенного между двумя обкладками конденсатора, разделенными расстоянием  $L$ ) большого пространственного масштаба. КЭД сильного поля для  $T$ -постоянного электрического поля и  $L$ -постоянного электрического поля описывает физически разные задачи. В этой работе мы получим явный вид для всех указанных выше сингулярных функций и покажем, что в пределе  $T, L \rightarrow \infty$  оба подхода приводят к одним и тем же результатам.

В данной работе мы строим и исследуем спинорные сингулярные функции в КЭД сильного поля в  $T$ -постоянном электрическом поле и в КЭД сильного поля в  $L$ -постоянном электрическом поле. С этой целью в разд. 2 мы находим in- и out-решения уравнения Дирака в  $T$ -постоянном электрическом поле, используя переменные светового конуса. С помощью этих решений мы строим интегральные представления Фока–Швингера по собственному времени для всех сингулярных функций, которые обеспечивают непертурбативные (по отношению к внешне-

му полю) вычисления любых амплитуд переходов и средних значений любых физических величин. Эти представления получены для произвольной ориентации внешнего электрического поля, что нетривиальным образом обобщает результаты работ [18, 19]. В разд. 3 мы находим соответствующие наборы in- и out-решений уравнения Дирака в  $L$ -постоянном электрическом поле в переменных светового конуса. При помощи данных наборов мы строим интегральные представления Фока–Швингера для соответствующих спинорных сингулярных функций. Полученные результаты обсуждаются в разд. 4. Рассматривая вычисления в  $T$ -постоянном поле и  $L$ -постоянном поле как различные регуляризации соответствующих вычислений в постоянном однородном электрическом поле, мы показываем их эквивалентность для достаточно больших значений  $T$  и  $L$ .

## 2. СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ В КЭД СИЛЬНОГО ПОЛЯ В $T$ -ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 2.1. In- и out-решения

В данном разделе мы рассмотрим случай  $t$ -ступеньки, которая представляет собой  $T$ -постоянное электрическое поле, действующее в течение большого промежутка времени.  $T$ -постоянное поле является одной из возможных регуляризаций постоянного однородного электрического поля в пределе  $T \rightarrow \infty$ . Для построения спинорных сингулярных функций нам понадобятся два полных набора решений уравнения Дирака, in-решения  $\{\zeta\psi_n(x)\}$  и out-решения  $\{\zeta\psi_n(x)\}$  со специальной асимптотикой при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$ , соответственно. Нижний индекс  $\zeta = +$  асимптотически соответствует электронам, а  $\zeta = -$  асимптотически соответствует позитронам. Поскольку явный вид искомым решений нетривиально зависит от ориентации электрического поля относительно оси  $x$ , ниже мы рассмотрим оба случая по отдельности.

Рассмотрим постоянное электрическое поле, которое имеет только одну ненулевую компоненту  $E_x$  вдоль оси  $x$ . Поле задается зависящим от времени электромагнитным потенциалом  $A_\mu(X)$ ,

$$A_\mu(X) = E_x t \delta_\mu^1, \quad E_x = \kappa E, \quad \kappa = \pm 1, \quad E > 0. \quad (4)$$

Случай  $\kappa = -1$  был рассмотрен в работах [18, 19]. Отметим, что в случае  $\kappa = +1$  направление поля совпадает с направлением поля в общей формулировке КЭД сильного поля в  $x$ -степенях, приведенной в [4].

Введем полный набор решений уравнения Дирака, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(X) &= (\gamma P + m) \Phi(X), \quad X = (t, x, \mathbf{r}_\perp), \\ \Phi(X) &= \phi(t, x) \varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp) v_{\chi, \sigma}, \\ \varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp) &= (2\pi)^{-(d-2)/2} \exp(i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}_\perp), \\ \mathbf{r}_\perp &= (X^2, \dots, X^D), \quad \mathbf{p}_\perp = (p^2, \dots, p^D), \\ \gamma_\perp &= (\gamma^2, \dots, \gamma^D), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $v_{\chi, \sigma}$  — набор постоянных ортонормированных спиноров,

$$\chi = \pm 1, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{[d/2]-1}), \quad \sigma_j = \pm 1.$$

Спиноры  $v_{\chi, \sigma}$  удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^0 \gamma^1 v_{\chi, \sigma} = \chi v_{\chi, \sigma}, \quad v_{\chi, \sigma}^\dagger v_{\chi', \sigma'} = \delta_{\chi, \chi'} \delta_{\sigma, \sigma'}.$$

Фактически, функции (5) соответствуют состояниям с заданными импульсами  $\mathbf{p}_\perp$  в направлении, перпендикулярном оси  $x$ . Квантовые числа  $\chi$  и  $\sigma_j$  описывают поляризацию спина и обеспечивают удобную параметризацию решений. Поскольку в измерениях  $(1+1)$  и  $(2+1)$  ( $d=2, 3$ ) нет спиновых степеней свободы, квантовые числа  $\sigma$  отсутствуют. Заметим, что в размерностях  $(2+1)$  существуют два неэквивалентных представления для  $\gamma$ -матриц, которые соответствуют разным сортам фермионов, которые параметризуются параметром  $\chi = \pm 1$ . В  $d$ -измерениях для любых заданных импульсов существует только  $J_{(d)} = 2^{[d/2]-1}$  различных состояний спина. Причем решения (5), которые различаются только значениями  $\chi$ , линейно зависимы. Без ограничения общности положим  $\chi = 1$  и введем обозначение  $v_\sigma = v_{1, \sigma}$ .

Скалярные функции  $\phi(t, x)$  удовлетворяют уравнению

$$\left\{ \partial_t^2 - \partial_x^2 + 2ie\kappa Et \partial_x + \left[ (eEt)^2 - ie\kappa E + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2 \right] \right\} \phi(t, x) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим решения уравнения Дирака с определенными значениями импульсов,

$$\begin{aligned} \psi_n(X) &= (\gamma P + m) \phi_n(t, x) \varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp) v_\sigma, \\ \phi_n(t, x) &= e^{ip_x x} \phi_n(t), \quad n = (p_x, \mathbf{p}_\perp, \sigma), \\ p_x &= p^1, \quad \hat{p}_x \psi_n(X) = p_x \psi_n(X), \quad \hat{p}_x = -i\partial_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Асимптотики решений (7) для  $\kappa = -1$  и  $\kappa = +1$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  были исследованы в работах [19] и [20], соответственно. Решения

$$\begin{aligned} {}^{\pm} \phi_n(t, x) &= C_n e^{ip_x x} D_{-\rho} [\pm(1+i)\xi], \quad \kappa = +1, \\ {}^{\mp} \phi_n(t, x) &= \check{C}_n e^{ip_x x} D_{\rho-1} [\pm(1-i)\xi], \quad \kappa = +1, \\ {}^{\mp} \phi_n(t, x) &= C_n e^{ip_x x} D_{\rho-1} [\pm(1-i)\xi], \quad \kappa = -1, \\ {}^{\pm} \phi_n(t, x) &= \check{C}_n e^{ip_x x} D_{\rho-1} [\pm(1+i)\xi], \quad \kappa = -1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$C_n = (4\pi eE)^{-1/2} e^{-\pi\lambda/8},$$

$$\check{C}_n = (2\pi\lambda eE)^{-1/2} e^{-\pi\lambda/8},$$

$$\rho = \frac{i}{2}\lambda + \frac{\kappa+1}{2},$$

$$\xi = \frac{eEt - \kappa p_x}{\sqrt{eE}},$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2}{eE},$$

уравнения (6) использованы для построения in-решений и out-решений. Будем говорить, что функции  ${}_\zeta \psi_n(t, x)$  соответствуют in-решениям  $\{\zeta \psi_n(X)\}$ , а функции  ${}^\zeta \psi_n(t, x)$  соответствуют out-решениям  $\{\zeta \psi_n(X)\}$ . В (8) функции  $D_\nu(x)$  — функции параболического цилиндра. In- и out-решения ортонормированы относительно стандартного скалярного произведения,

$$({}_\zeta \psi_n, {}_\zeta \psi_{n'}) = ({}^\zeta \psi_n, {}^\zeta \psi_{n'}) = \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp) \delta(p_x - p'_x) \delta_{\sigma, \sigma'},$$

$$(\psi, \psi') = \int \psi^\dagger(x) \psi'(x) d\mathbf{r},$$

$$d\mathbf{r} = dx^1 \dots dx^D.$$

Удобнее работать с решениями уравнения (6), которые зависят от координат на световом конусе

$$x_\pm = t \pm x.$$

Данные решения параметризуются набором квантовых чисел  $n_- = (p_-, \mathbf{p}_\perp, \sigma)$  и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} {}^{\pm\kappa} \phi_{n_-}(t, x) &= C_{n_-} \times \\ &\times \exp \left\{ -ie \frac{\kappa E}{2} \left( \frac{1}{2} x_-^2 - x^2 \right) - \frac{i}{2} p_- x_+ - \right. \\ &\left. - \frac{i}{2} [\kappa\lambda - 2i] \ln \left[ \frac{\mp \pi_-}{\sqrt{eE}} \exp \left( -\frac{i\pi}{2} \theta(\kappa) \right) \right] \right\}, \\ C_{n_-} &= (4\pi eE)^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{4} [(2\lambda \log 2 + \pi) \kappa + \pi(1+i\lambda)] \right\}, \\ \lambda &= \frac{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2}{eE}, \quad \pi_- = p_- + e\kappa E x_-. \end{aligned} \quad (9)$$

Для удобства мы ввели следующее обозначение:

$${}^{\pm\kappa} \phi = \begin{cases} {}^+ \phi, & \kappa = +1, \\ {}^- \phi, & \kappa = -1, \end{cases}$$

где  $\zeta\phi$  и  $\zeta\phi$  — различные наборы функций. Здесь  $p_-$  — импульс, принимающий непрерывные значения и являющийся собственным значением оператора  $2i(\partial/\partial x_+)$ . Знак  $\pm\kappa$ , отвечающий функциям  ${}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x)$ , совпадает со знаком кинетического импульса  $\pi_-$  при  $x_- \rightarrow \pm\infty$ . Далее мы покажем, что состояния (9) необходимы для построения специальных асимптотик при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Наборы решений (9) и (8) связаны между собой интегральным преобразованием

$$\begin{aligned} & {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_n(t, x) = \\ & = (2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} M^*(p_x, p_-) {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) dp_-, \\ & M(p_x, p_-) = \\ & = \exp\left\{-\frac{i\kappa}{4eE} [(p_- + 2p_x)^2 - 2(p_x)^2]\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} & {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) = \\ & = (2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} M(p_x, p_-) {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_n(t, x) dp_x. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что в случае постоянного однородного электрического поля преобразования (10) и (11) были рассмотрены в работе [21].

Как мы упоминали выше, функциям  ${}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_n(t, x)$  соответствуют out-решения  ${}_{-\kappa}^{+\kappa}\psi_n(X)$ , тогда как функциям  ${}_{-\kappa}^{-\kappa}\phi_n(t, x)$  соответствуют in-решения  ${}_{-\kappa}^{-\kappa}\psi_n(X)$ . Преобразования (11) позволяют нам построить in- и out-решения  ${}_{-\kappa}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X)$  и  ${}_{-\kappa}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X)$  с квантовыми числами  $n_-$ , соответственно:

$${}_{-\kappa}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X) = (\gamma P + m) {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) \varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp) v_\sigma.$$

На данном шаге мы введем два различных набора решений:

$$\begin{aligned} & \kappa = +1 : \\ & \begin{cases} {}_{+\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) = \theta(+\pi_-) {}_{+\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) g(+|+), \\ {}_{-\kappa}^{-\kappa}\phi_{n_-}(t, x) = \theta(-\pi_-) {}_{-\kappa}^{-\kappa}\phi_{n_-}(t, x) g(-|-), \end{cases} \\ & \kappa = -1 : \\ & \begin{cases} {}_{+\kappa}^{-\kappa}\phi_{n_-}(t, x) = \theta(+\pi_-) {}_{+\kappa}^{-\kappa}\phi_{n_-}(t, x) g(+|+), \\ {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) = \theta(-\pi_-) {}_{-\kappa}^{+\kappa}\phi_{n_-}(t, x) g(-|-), \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Мы можем проверить что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & (2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} M^*(p_x, p_-) {}_{+\kappa}^{-\kappa}\phi_{n_-}(t, x) dp_- = \\ & = {}_{+\kappa}^{-\kappa}\phi_n(t, x). \end{aligned}$$

Функциям  ${}_{-\kappa}^{-\kappa}\phi_n(t, x)$  соответствуют out-решения  ${}_{-\kappa}^{-\kappa}\psi_n(X)$ , тогда как функциям  ${}_{+\kappa}^{+\kappa}\phi_n(t, x)$  соответствуют in-решения  ${}_{+\kappa}^{+\kappa}\psi_n(X)$ . Преобразования (11) позволяют нам построить in- и out-решения  ${}_{+\kappa}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X)$  и  ${}_{+\kappa}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X)$  с квантовыми числами  $n_-$ :

$${}_{+\kappa}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X) = (\gamma P + m) {}_{+\kappa}^{-\kappa}\phi_{n_-}(t, x) \varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp) v_\sigma.$$

Таким образом, мы построили in- и out-решения для двух различных направлений электрического поля,  $\kappa = \pm 1$ . Причем имеют место преобразования данных решений друг через друга:

$$\begin{aligned} & \zeta\psi_{n_-}(X) = {}_{+\kappa}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X) g(+|\zeta) + {}_{-\kappa}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X) g(-|\zeta), \\ & \zeta\psi_{n_-}(X) = {}_{+\kappa}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X) g(+|\zeta) + {}_{-\kappa}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X) g(-|\zeta). \end{aligned}$$

Здесь  $g$ -коэффициенты определяются соотношениями

$$\begin{aligned} & g(\zeta|\zeta) = \frac{\sqrt{\pi\lambda} \exp(-\pi\lambda/4)}{\Gamma(1-i\zeta\lambda/2)}, \\ & g(-|+) = -g(+|-) = \kappa \exp(-\pi\lambda/2). \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.2. Представления собственного времени

Используя представления сингулярных функций в виде некоторых сумм решений уравнения Дирака, построенных в работах [3, 19], можно найти их представления по собственному времени. Таким образом, представления по собственному времени для сингулярных функций  $S^p(X, X')$  и  $S^{\bar{p}}(X, X')$  следуют из выражений

$$\begin{aligned} & S^p(X, X') = i \int_{-\infty}^{\infty} dp_- \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_{\sigma=\pm 1} {}_{-\kappa}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X) \times \\ & \quad \times \left[ g(+|-) g(-|-)^{-1} \right]^\dagger + \bar{\psi}_{n_-}(X'), \\ & S^{\bar{p}}(X, X') = -i \int_{-\infty}^{\infty} dp_- \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_{\sigma=\pm 1} {}_{+\kappa}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X) \times \\ & \quad \times \left[ g(+|+)^{-1} g(+|-) \right] - \bar{\psi}_{n_-}(X'). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что сингулярные функции (14) в работе [19] были обозначены по-другому, а именно, как  $-S^a(X, X')$  и  $-S^p(X, X')$ , соответственно. Учитывая (13) и (12), получим

$$\begin{aligned}
 S^p(X, X') &= \\
 &= -\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dp_- \theta(+\kappa\pi'_-) {}_+Y(X, X'; p_-), \\
 S^{\bar{p}}(X, X') &= \\
 &= +\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dp_- \theta(-\kappa\pi'_-) {}^{+\kappa}Y(X, X'; p_-), \\
 {}_+Y(X, X'; p_-) &= \\
 &= i \int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_{\sigma} {}_+\psi_{n_-}(X) {}_+\bar{\psi}_{n_-}(X'), \\
 {}^{+\kappa}Y(X, X'; p_-) &= \\
 &= i \int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_{\sigma} {}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X) {}^{+\kappa}\bar{\psi}_{n_-}(X').
 \end{aligned} \tag{15}$$

В соответствии с работой [19], причинный пропагатор и перестановочная функция могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 S^c(X, X') &= (\gamma P + m)\Delta^c(X, X'), \\
 \Delta^c(X, X') &= \int_{\Gamma_c} f(X, X'; s) ds,
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 S(X, X') &= (\gamma P + m)\Delta(X, X'), \\
 \Delta(X, X') &= \text{sgn}(t - t') \int_{\Gamma} f(X, X'; s) ds,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\text{sgn}(t - t') = \theta(t - t') - \theta(t' - t),$$

и функция

$$\begin{aligned}
 f(X, X'; s) &= \exp(-e\kappa E\gamma^0\gamma^1 s) f^{(0)}(X, X'; s), \\
 f^{(0)}(X, X'; s) &= -\left(\frac{-i}{4\pi}\right)^{d/2} \times \\
 &\quad \times \frac{eE}{s^{(d-2)/2} \sinh(eEs)} \times \\
 &\quad \times \exp\left[-ism^2 + ie\Lambda + \frac{i}{4s} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{4} eE \coth(eEs) (y_0^2 - y_1^2)\right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

представляет собой ядро Фока-Швингера [2, 22]. Здесь и далее мы вводим четыре-вектор

$$y_\mu = X_\mu - X'_\mu, \quad y_0 = t - t', \quad y_1 = x' - x.$$

Функция  $f(X, X'; s)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с начальным условием:

$$\begin{aligned}
 -i \frac{d}{ds} f(X, X'; s) &= (P^2 - m^2 + ieE\gamma^0\gamma^1) f(X, X'; s), \\
 \lim_{s \rightarrow \pm 0} f(X, X'; s) &= \pm i \delta(X - X').
 \end{aligned}$$

Заметим что только член  $\Lambda$  в (18) является калибровочно-зависимой величиной, которая может быть представлена в виде интеграла вдоль кривой, проходящей через точки  $X$  и  $X'$ ,

$$\Lambda = - \int_{X'}^X A_\mu(\tilde{X}) d\tilde{X}^\mu. \tag{19}$$

В рассматриваемой калибровке электромагнитный потенциал  $A_\mu(X)$  задается формулой (4), так что мы имеем

$$\Lambda = \kappa E y_1 (t + t')/2.$$

Контуры интегрирования показаны на рис. 1 и рис. 2. Контуры  $\Gamma_c$  и  $\Gamma_1$  обходят снизу все особые точки на вещественной оси, кроме начала координат. Функция  $f^{(0)}(X, X'; s)$  имеет две особые точки  $s_0 = 0$  и  $eEs_1 = -i\pi$  на комплексной плоскости между контурами  $\Gamma_c - \Gamma_1$  и  $\Gamma_p - \Gamma_3$ .

Контур  $\Gamma$  расположен в нижней части комплексной плоскости  $s$  в достаточно малой окрестности точки  $s = 0$ , а также соединяет точки  $s = +0$  и  $s = e^{-i\pi}0$ . Заметим, что интеграл по контуру  $\Gamma$  в (17) может быть представлен как интеграл по контуру  $\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1$ . Так как ядро  $f(X, X'; s)$  не имеет других особенностей в достаточно малой окрестности точки  $s = 0$ , то замыкание контура интегрирования  $\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1$  при  $\text{Re } s \rightarrow \pm\infty$ , дает контур интегрирования  $\Gamma$ .

Заметим что представление (16) имеет форму представления Швингера [2]. Представление (17) обладает универсальной структурой присущей представлению собственного времени для перестановочной функции, см. [18]. Отсюда следует, что интеграл (17) удовлетворяет уравнению Дирака и начальному условию

$$S(X, X')|_{t=t'} = i\gamma^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

В свою очередь, это показывает полноту двух наборов  $\{\pm\psi_{n_-}(x)\}$  и  $\{\pm\bar{\psi}_{n_-}(x)\}$  на гиперповерхности  $t = \text{const}$ .

Следуя процедуре, указанной в работе [19], и учитывая что

$$\mathbf{E}y = \kappa E y^1,$$

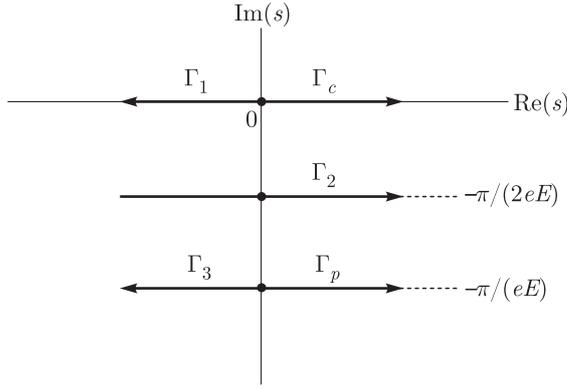


Рис. 1. Контуры интегрирования  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_c, \Gamma_p$

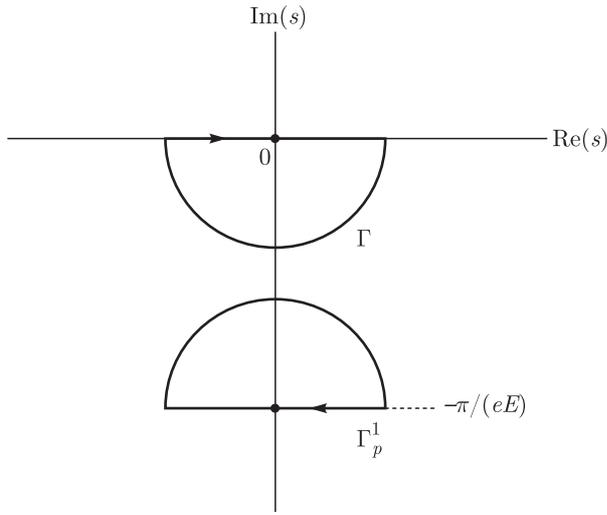


Рис. 2. Контуры интегрирования

мы можем представить сингулярные функции (15) в виде интегралов по собственному времени:

$$\begin{aligned}
 S^p(X, X') &= (\gamma P + m)\Delta^p(X, X'), \\
 S^{\bar{p}}(X, X') &= (\gamma P + m)\Delta^{\bar{p}}(X, X'), \\
 -\Delta^p(X, X') &= \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds + \\
 &+ \theta(\mathbf{E}\mathbf{y}) \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds, \\
 -\Delta^{\bar{p}}(X, X') &= \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds + \\
 &+ \theta(-\mathbf{E}\mathbf{y}) \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Контур интегрирования  $\Gamma_p^1$  (радиус которого стремится к нулю) соединяет точки

$$s = e^{-i\pi}0 - i\pi/(eE)$$

и

$$s = +0 - i\pi/(eE).$$

Заметим, что интеграл по контуру  $\Gamma_p^1$  в (20) сводится к интегралу по контуру  $\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p$ , так как, замыкая контур интегрирования  $\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p$  при  $\text{Re } s \rightarrow \pm\infty$ , мы можем преобразовать его в контур  $\Gamma_p^1$ .

Используя (20), получаем представление по собственному времени для сингулярных функций  $S_{\text{in/out}}^c(X, X')$ :

$$S_{\text{in/out}}^c(X, X') = S^{p/\bar{p}}(X, X') + S^c(X, X'). \tag{21}$$

Представления (16), (17) и (20) могут быть записаны в ковариантной форме при помощи тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ , см. работы [18,19]. Например, для  $d = 4$  получим

$$\begin{aligned}
 f(X, X'; s) &= \\
 &= \exp\left(-\frac{e}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}s\right) f^{(0)}(X, X'; s), \\
 f^{(0)}(X, X'; s) &= \frac{e^2 EB \exp(-ie\Lambda')}{(4\pi)^2 \sinh(eEs) \sin(eBs)} \times \\
 &\times \exp\left[-im^2s - i\frac{1}{4}yqF \coth(qFs)y\right],
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\Lambda' = -\int_{X'}^X \left(A_\mu^E(\tilde{X}) + A_\mu^B(\tilde{X})\right) d\tilde{X}^\mu,$$

где  $E$  и  $B$  — электрические и магнитные поля в  $F_{\mu\nu}$ ,  $A_\mu^E + A_\mu^B$  — потенциалы электрических ( $E$ ) и магнитных ( $B$ ) компонент тензора  $F_{\mu\nu}$ , соответственно. Интеграл в (22) берется вдоль кривой соединяющей точки  $X$  и  $X'$ .

Как следует из (18) и (20), для функций  $S^{p/\bar{p}}(X, X')$  (а также для  $S_{\text{in/out}}^c(X, X')$ ), замена  $E_x = E \rightarrow E_x = -E$  эквивалентна замене

$$x \rightarrow -x, \quad x' \rightarrow -x', \quad \gamma^1 \rightarrow -\gamma^1.$$

Причем проекция

$$\mathbf{E}\mathbf{y}/E = (E_x/E)y^1$$

вектора смещения

$$\mathbf{y} = (y^2, \dots, y^D)$$

на направление поля и функция  $f(X, X'; s)$  не меняются. Это означает, что средний ток созданных

частиц остается направленным вдоль электрического поля.

Заметим, что контуры интегрирования в представлениях собственного времени для причинного пропагатора и перестановочной функции нечувствительны к направлению электрического поля. Однако контуры интегрирования в представлениях собственного времени для сингулярных функций  $S^{p,\bar{p}}(X, X')$  зависят от проекции  $\mathbf{E}y$ . Это естественно, поскольку именно эти сингулярные функции определяют влияние внешнего электрического поля на электрические токи создаваемых частиц. Такое наблюдение невозможно было сделать из представлений, полученных в работах [18, 19] для конкретного выбора системы координат.

### 3. СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ В КЭД В $L$ -ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

#### 3.1. In- и out-решения

В этом разделе мы построим спинорные сингулярные функции в КЭД в  $L$ -постоянном электрическом поле. Данное поле имеет только одну ненулевую компоненту  $E_x$  вдоль оси  $x$ ,

$$E_x(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -L/2] \cup [L/2, \infty), \\ E, & x \in S_{\text{int}} = (-L/2, L/2), \end{cases} \quad L > 0.$$

Будем предполагать, что соответствующая потенциальная ступенька имеет достаточно большую высоту,  $eEL \gg 2m$  (такая ступенька называется критической). В этом случае поле  $E_x(x)$  и ведущие вклады в вакуумные средние можно рассматривать как макроскопические физические величины. В этом смысле  $L$ -постоянное электрическое поле является слабо неоднородным, и характеристики вакуумной нестабильности имеют некоторые универсальные особенности, см. [15]. Эффект рождения пар связан с наличием зоны Клейна. Подчеркнем, что в пределе  $L \rightarrow \infty$   $L$ -постоянное электрическое поле является одной из возможных регуляризаций постоянного однородного электрического поля.

Некоторые характеристики вакуумной нестабильности, в частности, деформации спинорных сингулярных функций в КЭД в  $L$ -постоянном электрическом поле при больших  $L$ , могут быть приближенно вычислены в КЭД с постоянным однородным электрическим полем. Последняя задача важна сама по себе, и ее решение в рамках последовательной формулировки КЭД [4] дается ниже, см. также результаты, полученные в работе [5] для  $L$ -постоянного электрического поля.

Выберем электромагнитные потенциалы, описывающие постоянное однородное электрическое поле  $E$ , направленное вдоль оси  $x$ , следующим образом:

$$A_0(X) = -Ex, \quad A_k(X) = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим полный набор стационарных решений уравнения Дирака в электромагнитном поле (23) вида

$$\begin{aligned} \psi_{n_0}(X) &= (\gamma P + m) \Phi_{n_0}(X), \\ \Phi_{n_0}(X) &= \varphi_{n_0}(t, x) \varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp) v_{\chi, \sigma}, \\ n_0 &= (p_0, \mathbf{p}_\perp, \sigma), \\ \varphi_{n_0}(t, x) &= (2\pi)^{-1/2} \exp(-ip_0 t) \varphi_{n_0}(x), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)$  и  $v_{\chi, \sigma}$  даны в (5). В силу причин, описанных выше в разд. 2, выберем  $\chi = 1$ . Скалярные функции  $\varphi_{n_0}(x)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{p}_x^2 - iU'(x) - [p_0 - U(x)]^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2 \right\} \times \\ \times \varphi_{n_0}(x) = 0, \\ U(x) = -eA_0(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Решения уравнения Дирака с хорошо определенными левыми и правыми асимптотиками обозначим как  $\zeta\psi_{n_0}(X)$  и  $\varsigma\psi_{n_0}(X)$ ,

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \zeta\psi_{n_0}(X) &= p^L \zeta\psi_{n_0}(X), \quad x \rightarrow -\infty, \quad \zeta = \text{sgn}(p^L), \\ \hat{p}_x \varsigma\psi_{n_0}(X) &= p^R \varsigma\psi_{n_0}(X), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \varsigma = \text{sgn}(p^R). \end{aligned}$$

Решения  $\zeta\psi_{n_0}(X)$  и  $\varsigma\psi_{n_0}(X)$  описывают асимптотически частицы с определенными импульсами  $p^L$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $p^R$  при  $x \rightarrow +\infty$ , соответственно. Мы видим, что решения  $\zeta\psi_{n_0}(X)$  и  $\varsigma\psi_{n_0}(X)$  имеют вид (24), при этом функции  $\varphi_{n_0}(x)$  обозначены как  $\zeta\varphi_{n_0}(x)$  и  $\varsigma\varphi_{n_0}(x)$ , соответственно. Они имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \zeta\varphi_{n_0}(x) &= \zeta C \exp[ip^L x], \quad x \rightarrow -\infty, \\ \varsigma\varphi_{n_0}(x) &= \varsigma C \exp[ip^R x], \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta C$  и  $\varsigma C$  — нормировочные множители.

Решения  $\zeta\psi_{n_0}(X)$  и  $\varsigma\psi_{n_0}(X)$  удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности на гиперповерхности  $x = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} (\zeta\psi_{n_0}, \zeta'\psi_{n'_0})_x &= \zeta\delta_{\zeta, \zeta'}\delta_{n_0, n'_0}, \\ (\varsigma\psi_{n_0}, \varsigma'\psi_{n'_0})_x &= -\varsigma\delta_{\varsigma, \varsigma'}\delta_{n_0, n'_0}, \\ (\psi, \psi')_x &= \int \psi^\dagger(X) \gamma^0 \gamma^1 \psi'(X) dt d\mathbf{r}_\perp, \\ \delta_{n_0, n'_0} &= \delta_{\sigma, \sigma'} \delta(p_0 - p'_0) \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp). \end{aligned} \quad (26)$$

Они выражаются друг через друга следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta\psi_{n_0}(X) &= \\ &= +\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(+|\zeta) - \psi_{n_0}(X)\tilde{g}(-|\zeta), \\ \zeta\psi_{n_0}(X) &= \\ &= -\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(-|\zeta) - +\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(+|\zeta), \end{aligned} \quad (27)$$

где коэффициенты разложения определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \left(\zeta\psi_{n_0}, \zeta'\psi_{n'_0}(X)\right)_x &= \tilde{g}\left(\zeta|\zeta'\right)\delta_{n_0, n'_0}, \\ \tilde{g}\left(\zeta'|\zeta\right) &= \tilde{g}\left(\zeta|\zeta'\right)^*. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты  $\tilde{g}$  отличаются от коэффициентов  $g$ , которые имеют место в КЭД в  $t$ -степенях, см. разд. 2. Коэффициенты  $\tilde{g}$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(-|+)|^2 &= |\tilde{g}(+|-)|^2, \\ |\tilde{g}(+|+)|^2 &= |\tilde{g}(-|-)|^2, \\ \frac{\tilde{g}(+|-)}{\tilde{g}(-|-)} &= \frac{\tilde{g}(+|+)}{\tilde{g}(-|+)}, \\ |\tilde{g}(+|-)|^2 - |\tilde{g}(+|+)|^2 &= 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Вернемся к решению уравнения (25), которое мы можем записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 + i - \lambda\right]\varphi_{n_0}(x) = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{eEx - p_0}{\sqrt{eE}}, \\ \lambda &= \frac{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2}{eE}. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (29) полностью определяется подходящей парой линейно независимых функций параболического цилиндра. А именно, парой

$$D_\rho[(1-i)\xi], \quad D_{-1-\rho}[(1+i)\xi]$$

или парой

$$D_\rho[-(1-i)\xi], \quad D_{-1-\rho}[-(1+i)\xi],$$

где

$$\rho = -i\lambda/2 - 1.$$

Учитывая асимптотические разложения функций параболического цилиндра, мы можем классифицировать решения по знаку импульсов  $p^L$  и  $p^R$ . В

результате получим четыре набора решений уравнения (29):

$$\begin{aligned} +\varphi_{n_0}(x) &= \\ &= +CD_{-1-\rho}[-(1+i)\xi] \propto e^{-i\xi^2/2}, \quad \xi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} -\varphi_{n_0}(x) &= \\ &= -CD_\rho[-(1-i)\xi] \propto e^{i\xi^2/2}, \quad \xi \rightarrow -\infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\varphi_{n_0}(x) &= \\ &= +CD_\rho[(1-i)\xi] \propto e^{i\xi^2/2}, \quad \xi \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\varphi_{n_0}(x) &= \\ &= -CD_{-1-\rho}[(1+i)\xi] \propto e^{-i\xi^2/2}, \quad \xi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} -\zeta C = \zeta C &= (eE)^{-1/2} e^{\pi\lambda/8} \times \\ &\times \left[\frac{\lambda}{2}(1+\zeta) + 1 - \zeta\right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Что позволяет нам построить соответствующие дираковские спиноры, которые являются in- и out-решениями:

$$\begin{aligned} \text{in-solutions: } &-\psi_{n_0}(X), \quad -\psi_{n_0}(X), \\ \text{out-solutions: } &+\psi_{n_0}(X), \quad +\psi_{n_0}(X). \end{aligned} \quad (32)$$

Коэффициенты  $\tilde{g}$  имеют вид

$$\tilde{g}(-|+) = \tilde{g}(+|-) = e^{\pi\lambda/2}. \quad (33)$$

Согласно общей теории [4], дифференциальные средние числа рожденных пар определяются соотношением

$$N_{n_0}^{\text{cr}} = |\tilde{g}(+|-)|^{-2} = e^{-\pi\lambda}.$$

Действуя тем же образом, как и в разд. 2 при вычислении спинорных сингулярных функций (1) и (2), построим полные наборы решений уравнения Дирака с корректно определенными левыми и правыми асимптотиками в терминах переменных светового конуса  $x_\pm = t \pm x$ . С этой целью мы рассмотрим спиноры  $\tilde{\psi}_{n_-}(X)$ , параметризованные квантовыми числами  $n_- = (p_-, p_\perp, \sigma)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (\gamma P + m)\Phi_{n_-}(X), \\ \Phi_{n_-}(X) &= \varphi_{n_-}(t, x)\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)v_\sigma, \end{aligned} \quad (34)$$

где функции  $\varphi_{n_-}(t, x)$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \left\{\hat{p}_x^2 - iU'(x) - [\hat{p}_0 - U(x)]^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2\right\} \times \\ \times \varphi_{n_-}(t, x) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Построим нестационарные решения уравнения (35). Заметим, что данное уравнение допускает интегралы движения  $\hat{Y}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_0 &= ie, \quad \hat{Y}_1 = \partial_t, \quad \hat{Y}_2 = \partial_x + ieEt, \\ \hat{Y}_3 &= x\partial_t + t\partial_x + \frac{ieE}{2}(t^2 + x^2). \end{aligned}$$

Операторы  $\hat{Y}_\alpha$  образуют четырехмерную алгебру Ли  $\mathcal{L}$ , заданную ненулевыми коммутационными соотношениями:

$$[\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = E\hat{Y}_0, \quad [\hat{Y}_1, \hat{Y}_3] = \hat{Y}_2, \quad [\hat{Y}_2, \hat{Y}_3] = \hat{Y}_1.$$

Уравнение (35) представляет собой уравнение на собственные функции оператора Казимира

$$\hat{K} = 2E\hat{Y}_0\hat{Y}_3 - \hat{Y}_1^2 + \hat{Y}_2^2,$$

а именно,

$$\hat{K}\varphi_{n_-}(t, x) = (\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)\varphi_{n_-}(t, x), \quad [\hat{K}, \hat{Y}_a] = 0.$$

Для построения полных наборов решений такого рода уравнений эффективно применение метода некоммутативного интегрирования [23–25], основанного на алгебре симметрии уравнения Дирака. Сначала определим неприводимое  $\lambda$ -представление алгебры Ли в пространстве функций от переменной  $p_- \in (-\infty, +\infty)$  при помощи операторов

$$\ell_\alpha(p_-, \partial_{p_-}, j), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad j \in (0, \infty),$$

получим

$$\begin{aligned} \ell_0(p_-, \partial_{p_-}, j) &= ie, \\ \ell_1(p_-, \partial_{p_-}, j) &= -eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_-, \\ \ell_2(p_-, \partial_{p_-}, j) &= eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_-, \\ \ell_3(p_-, \partial_{p_-}, j) &= -p_-\partial_{p_-} + ij - 1, \\ \ell_1^2(p_-, \partial_{p_-}, j) - \ell_2^2(p_-, \partial_{p_-}, j) - \\ &- 2E\ell_0(p_-, \partial_{p_-}, j)\ell_3(p_-, \partial_{p_-}, j) = (2eE)j. \end{aligned}$$

Интегрируя систему уравнений

$$[\hat{Y}_a + \ell_a(p_-, \partial_{p_-}, j)]\varphi_{n_-}(t, x) = 0$$

вместе с уравнением (35), получим алгебраическое уравнение  $j = -\lambda/2$  и два его полных набора решений  ${}_{-}\varphi_{n_-}$  и  ${}_{+}\varphi_{n_-}$ . Данные решения параметризуются набором квантовых чисел  $n_-$ :

$$\begin{aligned} {}_{\pm}\varphi_{n_-}(t, x) &= C' \exp \left[ ie\frac{E}{2} \left( \frac{1}{2}x_-^2 - t^2 \right) - \right. \\ &\left. - \frac{i}{2}(\lambda - 2i) \ln \frac{\pm i\pi_-}{\sqrt{eE}} - \frac{i}{2}p_-x_+ \right], \quad (36) \end{aligned}$$

$$\pi_- = p_- + eEx_-.$$

Квантовое число  $p_-$  является собственным значением оператора симметрии  $i(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)$ :

$$i(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2) {}_{\pm}\varphi_{n_-}(t, x) = p_- {}_{\pm}\varphi_{n_-}(t, x).$$

В этом случае решения уравнения Дирака имеют вид (34) с функциями (36):

$$\begin{aligned} {}_{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (\gamma P + m) {}_{\pm}\Phi_{n_-}(X), \\ {}_{\pm}\Phi_{n_-}(X) &= {}_{\pm}\varphi_{n_-}(t, x)\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)v_\sigma, \end{aligned} \quad (37)$$

Построим прямое и обратное интегральные преобразования, которые связывают функции (36) с функциями (30) и (31). Посмотрим на решения уравнения (25) вида

$$\begin{aligned} {}_{\pm}\varphi_{n_0}(t, x) &= (2\pi eE)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-) {}_{\pm}\varphi_{n_-}(t, x) dp_-, \end{aligned} \quad (38)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\hat{p}_0 {}_{\pm}\varphi_{n_0}(t, x) = p_0 {}_{\pm}\varphi_{n_0}(t, x). \quad (39)$$

Подставляя (38) в (39) с учетом условия

$$\left[ \partial_t - eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_- \right] \varphi_{n_-}(t, x) = 0,$$

видим, что функция  $\tilde{M}(p_0, p_-)$  определяется как решение уравнения

$$-i \left( -eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_- \right) \tilde{M}(p_0, p_-) = p_0 \tilde{M}(p_0, p_-).$$

Выберем частное решение

$$\tilde{M}(p_0, p_-) = \exp \frac{i}{4eE} (p_-^2 - 4p_-p_0 + 2p_0^2),$$

которое удовлетворяет условию ортогональности

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-) \tilde{M}(p_0, p'_-) dp_0 = \\ = 2\pi eE \delta(p_- - p'_-). \end{aligned} \quad (40)$$

Запишем обратное преобразование

$$\begin{aligned} {}_{\pm}\varphi_{n_-}(t, x) &= (2\pi eE)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(p_0, p_-) {}_{\pm}\varphi_{n_0}(t, x) dp_0. \end{aligned} \quad (41)$$

Для совместности преобразований (38) и (41), в выражениях (30), (31) положим

$$C' = 2^{i\lambda/4} e^{\pi\lambda/4} (4\pi e E)^{-1/2}.$$

Обратное преобразование (41) показывает, что функции  ${}^{\pm}\varphi_{n_0}(t, x)$  выражаются через функции  ${}^{\pm}\varphi_{n_0}(t, x)$  с хорошо определенными левыми и правыми асимптотиками.

Из преобразований (38) и (41) следуют соответствующие соотношения между решениями уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} {}^{\pm}\psi_{n_0}(X) &= (2\pi e E)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-) {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X) dp_-, \\ {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (2\pi e E)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(p_0, p_-) {}^{\pm}\psi_{n_0}(X) dp_0, \end{aligned} \quad (42)$$

где  ${}^{\pm}\psi_{n_0}(X)$  даны в (24) с функциями  $\varphi_{n_0}(x)$ , обозначенными как  ${}^{\pm}\varphi_{n_0}(x)$ , функции  ${}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$  даются выражением (37). Из второго преобразования в (42) и соотношения (40) следует, что спиноры  ${}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$  удовлетворяют условию ортогональности на гиперповерхности  $x = \text{const}$ :

$$\left( {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}, {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n'_-} \right)_x = -\delta_{n_-, n'_-}.$$

В соответствии с (32), функции  ${}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X)$  описывают out-решения, а функции  ${}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X)$  — in-решения. Коэффициенты  $\tilde{g}(-|+)$  даны в (33) и не зависят от  $p_0$  и  $p_-$ , а также связывают между собой наборы решений  ${}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}$ .

При помощи (37) мы построили два полных и ортогональных набора решений  $\left\{ {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(x) \right\}$  и  $\left\{ {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(x) \right\}$  уравнения Дирака; дополнительные наборы решений выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= -\theta(\pi_-) {}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X) \tilde{g}(-|^-), \\ {}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= -\theta(-\pi_-) {}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X) \tilde{g}(+|+). \end{aligned} \quad (43)$$

Они могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (\gamma P + m) {}^{\pm}\Phi_{n_-}(X), \\ {}^{\pm}\Phi_{n_-}(X) &= {}^{\pm}\varphi_{n_-}(t, x) \varphi_{\mathbf{p}_{\perp}}(\mathbf{r}_{\perp}) v_{\chi, \sigma}, \\ {}^{\pm}\varphi_{n_-}(t, x) &= (2\pi)^{-1/2} \exp(-ip_0 t) {}^{\pm}\varphi_{n_-}(x), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} {}^-\varphi_{n_-}(t, x) &= -\theta(\pi_-) {}^-\varphi_{n_-}(t, x) \tilde{g}(-|^-), \\ {}^+\varphi_{n_-}(t, x) &= -\theta(-\pi_-) {}^+\varphi_{n_-}(t, x) \tilde{g}(+|+). \end{aligned} \quad (45)$$

Применяя интегральное преобразование типа (38) к решениям (45), получим

$$(2\pi e E)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-) {}^-\varphi_{n_-}(t, x) dp_- = {}^-\varphi_{n_0}(t, x),$$

$$(2\pi e E)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-) {}^+\varphi_{n_-}(t, x) dp_- = {}^+\varphi_{n_0}(t, x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}^{\pm}\psi_{n_0}(X) &= \\ &= (2\pi e E)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-) {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X) dp_-, \\ {}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= \\ &= (2\pi e E)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(p_0, p_-) {}^{\pm}\psi_{n_0}(X) dp_0, \end{aligned} \quad (46)$$

где  ${}^{\pm}\psi_{n_0}(X)$  даны в (24), а функции  $\varphi_{n_0}(x)$  обозначены как  ${}^{\pm}\varphi_{n_0}(X)$ . Функции  ${}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$  даны в (44).

Используя второе преобразование в (46) и соотношения (26), мы видим что выполняются соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned} \left( {}^+\tilde{\psi}_{n_-}, {}^-\tilde{\psi}_{n'_-} \right)_x &= 0, \\ \left( {}^-\tilde{\psi}_{n_-}, {}^+\tilde{\psi}_{n'_-} \right)_x &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} {}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= 0, \quad \pi_- > 0, \\ {}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= 0, \quad \pi_- < 0. \end{aligned}$$

Используя (42) и (46) и учитывая, что коэффициенты  $\tilde{g}'$  не зависят от  $p_0$ , из (27), находим

$$\begin{aligned} {}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= \tilde{g}(+|^-)^{-1} \times \\ &\times \left[ {}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X) \tilde{g}(-|^-) + {}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X) \right] = 0, \quad \pi_- > 0, \\ {}^-\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= \tilde{g}(-|+)^{-1} \times \\ &\times \left[ {}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X) \tilde{g}(+|+) + {}^+\tilde{\psi}_{n_-}(X) \right] = 0, \quad \pi_- < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (43) справедливы для всех  $\tilde{g}(-|^-)$  и  $\tilde{g}(+|+)$ , удовлетворяющих условиям (28).

Заметим, что подобные наборы решений уравнения Клейна–Гордона для скалярных частиц, находящихся между двумя обкладками конденсатора, получены в работе [26]. Эти решения связаны между собой при помощи интегральных преобразований, аналогичных преобразованиям (42) и (46).

### 3.2. Представления собственного времени

Спинорные сингулярные функции в КЭД в  $x$ -ступеньках определяются уравнениями (1), (2) и (3). В случае  $L$ -постоянного электрического поля их можно найти как суммы по построенным выше решениям, см. [4]. Отметим, что для  $L \rightarrow \infty$  достаточно рассматривать суммы только в зоне Клейна. В этой зоне решения (30) и (31) удовлетворяют следующим соотношениям ортонормированности на гиперплоскости  $t = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} (\zeta\psi_{n_0}, \zeta\psi_{n'_0}) &= (\zeta\psi_{n_0}, \zeta\psi_{n'_0}) = \\ &= \delta_{\sigma,\sigma'}\delta(p_0 - p'_0)\delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp)\mathcal{M}_{n_0}, \\ (\zeta\psi_{n_0}, \zeta\psi_{n'_0}) &= 0, \\ (\psi, \psi') &= \int \psi^\dagger(X)\psi'(X) d\mathbf{r}, \\ \mathcal{M}_{n_0} &= |\tilde{g}(+|-)|^2 = e^{\pi\lambda}. \end{aligned}$$

Тогда сингулярные функции можно представить в виде

$$\begin{aligned} S^c(X, X') &= \\ &= \theta(t - t')S^-(X, X') - \theta(t' - t)S^+(X, X'), \\ S^-(X, X') &= i \sum_{n_0} \mathcal{M}_{n_0}^{-1} \times \\ &\times {}^+\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(+|-)\tilde{g}(-|-)^{-1} - \bar{\psi}_{n_0}(X'), \quad (47) \\ S^+(X, X') &= i \sum_{n_0} \mathcal{M}_{n_0}^{-1} \times \\ &\times -\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(-|+)\tilde{g}(+|+)^{-1} + \bar{\psi}_{n_0}(X'); \\ S(X, X') &= S^-(X, X') + S^+(X, X'); \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{in/out}}^c(X, X') &= \\ &= \theta(t - t')S_{\text{in/out}}^-(X, X') - \theta(t' - t)S_{\text{in/out}}^+(X, X'), \\ S_{\text{in/out}}^-(X, X') &= \\ &= i \sum_{n_0} \mathcal{M}_{n_0}^{-1} {}^\mp\psi_{n_0}(X) {}^\mp\bar{\psi}_{n_0}(X'), \quad (49) \\ S_{\text{in/out}}^+(X, X') &= i \sum_{n_0} \mathcal{M}_{n_0}^{-1} {}^\mp\psi_{n_0}(X) {}^\mp\bar{\psi}_{n_0}(X'), \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger\gamma^0. \end{aligned}$$

Используя соотношения (27), представим сингулярные функции  $S^p(X, X')$  и  $S^{\bar{p}}(X, X')$  в (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} S^p(X, X') &= \\ &= i \sum_{n_0} \mathcal{M}_{n_0}^{-1} -\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(-|-)^{-1} - \bar{\psi}_{n_0}(X'), \\ S^{\bar{p}}(X, X') &= \\ &= -i \sum_{n_0} \mathcal{M}_{n_0}^{-1} +\psi_{n_0}(X)\tilde{g}(+|+)^{-1} + \bar{\psi}_{n_0}(X'). \end{aligned} \quad (50)$$

Подчеркнем, что если вакуум стабилен, то обе функции обращаются в нуль.

Используя (42), (46) и (43), получим следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} S^-(X, X') &= -i \sum_{\sigma} \int dp_- d\mathbf{p}_\perp \times \\ &\times \theta(+\pi'_-) e^{-\pi\lambda/2} +\tilde{\psi}_{n_-}(X) - \bar{\psi}_{n_-}(X'), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} S^+(X, X') &= -i \sum_{\sigma} \int dp_- d\mathbf{p}_\perp \times \\ &\times \theta(-\pi'_-) e^{-\pi\lambda/2} -\tilde{\psi}_{n_-}(X) + \bar{\psi}_{n_-}(X'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^p(X, X') &= -i \sum_{\sigma} \int dp_- d\mathbf{p}_\perp \times \\ &\times \theta(+\pi'_-) e^{-\pi\lambda} -\tilde{\psi}_{n_-}(X) - \bar{\psi}_{n_-}(X'), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} S^{\bar{p}}(X, X') &= i \sum_{\sigma} \int dp_- d\mathbf{p}_\perp \times \\ &\times \theta(-\pi'_-) e^{-\pi\lambda} +\tilde{\psi}_{n_-}(X) + \bar{\psi}_{n_-}(X'). \end{aligned}$$

Учитывая (37) и (43) и выполнив суммирование по квантовым числам  $\sigma$ ,

$$\sum_{\sigma} v_{1,\sigma} v_{1,\sigma}^\dagger = \sum_{\sigma} (v_{1,\sigma} \otimes v_{1,\sigma}^\dagger) = \Xi_+ = \frac{1}{2} (1 + \gamma^0 \gamma^1),$$

перепишем представление (51) следующим образом:

$$\begin{aligned}
S^\pm(X, X') &= \int \theta(\mp\pi'_-) Y^{(\pm)}(X, X'; p_-) dp_-, \\
Y^{(\pm)}(X, X'; p_-) &= \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma^0 + \frac{(m - \gamma_\perp \hat{\mathbf{p}}_\perp)}{\pi_-} \right] \Xi_+ \times \\
&\quad \times \left[ \gamma^0 + \frac{(m + \gamma_\perp \hat{\mathbf{p}}'_\perp)}{\pi'_-} \right] \gamma^0 \bar{+}F, \\
\bar{+}F &= \frac{i}{(2\pi)^{d-2}} I_1 \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[ eE \left( \frac{x_-^2 - x'^2_-}{2} - t^2 + t'^2 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p_-(x_+ - x'_+) \right] - im^2 \bar{+}a \right\}, \\
I_1 &= \int \exp \left[ -i \bar{+}ap_\perp^2 + i(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \mathbf{p}_\perp \right] d\mathbf{p}_\perp, \\
\bar{+}a &= \frac{1}{2eE} \left\{ \ln(\mp i \tilde{\pi}_-) - [\ln(\pm i \tilde{\pi}'_-)]^* \right\}, \\
\tilde{\pi}_- &= \pi_- / \sqrt{eE}, \quad \tilde{\pi}'_- = \pi'_- / \sqrt{eE}.
\end{aligned}$$

Для комплексной переменной  $\bar{+}a$  выберем главную ветвь логарифма:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\bar{+}a) &= \frac{1}{2eE} \ln \left| \frac{\pi_-}{\pi'_-} \right|, \\
\operatorname{Im}(\bar{+}a) &= \mp \frac{\pi}{2eE} \operatorname{sgn}(\pi_-) \theta(-\pi_- \pi'_-).
\end{aligned}$$

Вычисляя гауссовый интеграл  $I_1$ , получим

$$\begin{aligned}
\bar{+}F(X, X'; p_-) &= i \left( \frac{-i}{4\pi \bar{+}a} \right)^{(d-2)/2} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \frac{\pi_- + \pi'_-}{4} y_+ + \right. \\
&\quad \left. + ie\Lambda - i \bar{+}am^2 + \frac{i}{4 \bar{+}a} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2 \right\}, \\
\Lambda &= -Ey_0(x + x')/2, \quad y_\pm = x_\pm - x'_\pm.
\end{aligned} \tag{53}$$

Учитывая данный результат, можно записать функции  $S^\pm(X, X')$  в виде

$$\begin{aligned}
S^\pm(X, X') &= \mp(\gamma P + m) \Delta^\pm(X, X'), \\
\Delta^\pm(X, X') &= \int dp_- \theta(\mp\pi'_-) \bar{+}f(X, X'; p_-), \\
\bar{+}f(X, X'; p_-) &= \exp(-eE\gamma^0\gamma^1 \bar{+}a) \bar{+}f^{(0)}, \\
\bar{+}f^{(0)} &= - \left( \frac{-i}{4\pi} \right)^{d/2} (\bar{+}a)^{(2-d)/2} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \bar{+}am^2 + \frac{i}{4 \bar{+}a} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2 - i \frac{\pi_- + \pi'_-}{4} y_+ + \right. \\
&\quad \left. + ie\Lambda - \frac{1}{2} \left\{ \ln(\mp i \pi_-) + [\ln(\mp i \pi'_-)]^* \right\} \right\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Полагая  $y_- \neq 0$ , выполним замену переменной  $s = -a$  в интеграле  $\Delta^+(X, X')$  и замену переменной  $s = +a$  в интеграле  $\Delta^-(X, X')$ :

$$\begin{aligned}
\Delta^+(X, X') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(-\pi'_-) \bar{+}f(X, X'; p_-) dp_- = \\
&= \int_{\Gamma_c} \tilde{f}(X, X'; s) \frac{eE ds}{\sinh(eEs)} - \\
&\quad - \theta(+y_-) \int_{\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1} \tilde{f}(X, X'; s) \frac{eE ds}{\sinh(eEs)}, \\
\Delta^-(X, X') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(+\pi'_-) \bar{+}f(X, X'; p_-) dp_- = \\
&= \int_{\Gamma_c} \tilde{f}(X, X'; s) \frac{eE ds}{\sinh(eEs)} - \\
&\quad - \theta(-y_-) \int_{\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1} \tilde{f}(X, X'; s) \frac{eE ds}{\sinh(eEs)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(X, X'; s) &= \\
&= - \left( \frac{-i}{4\pi s} \right)^{d/2} \frac{1}{s} \exp \left[ -eE\gamma^0\gamma^1 s + ie\Lambda - ism^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{4s} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2 - \frac{i}{4} eE \coth(eEs) (y_0^2 - y_1^2) \right].
\end{aligned}$$

Все контуры интегрирования показаны на рис. 1. Замыкая контур интегрирования  $\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1$  на  $\operatorname{Re} s \rightarrow \pm\infty$ , преобразуем его в контур  $\Gamma$  (см. рис. 2).

В итоге получим

$$\begin{aligned}
S^\pm(X, X') &= (\gamma P + m) \Delta^\pm(X, X'), \\
\mp \Delta^\pm(X, X') &= \int_{\Gamma_c} f(X, X'; s) ds - \\
&\quad - \theta(\pm y_-) \int_{\Gamma} f(X, X'; s) ds.
\end{aligned} \tag{55}$$

Ядро Фока-Швингера  $f(X, X'; s)$  дано выражением (18) с калибровочно-зависимым членом  $\Lambda$  в (53). Заметим, что этот член может быть представлен как интеграл по кривой (19), где в нашем случае потенциал  $A_\mu(X)$  определяется выражением (23).

В работе [18], было показано что

$$\int_{\Gamma} F(X, X'; s) ds = 0, \quad y_\mu y^\mu < 0,$$

откуда следует, что интегралы  $\Delta^\pm(X, X')$  в (55) могут быть записаны следующим образом:

$$\mp \Delta^\pm(X, X') = \int_{\Gamma_c} f(X, X'; s) ds - \theta(\pm y_0) \int_{\Gamma} f(X, X'; s) ds. \quad (56)$$

Таким образом, мы вывели интегральное представление Швингера (16) для причинного пропагатора (47) и продемонстрировали, что перестановочная функция (48) имеет универсальную структуру (17):

$$\begin{aligned} S^c(X, X') &= (\gamma P + m) \Delta^c(X, X'), \\ \Delta^c(X, X') &= \int_{\Gamma_c} f(X, X'; s) ds, \\ S(X, X') &= (\gamma P + m) \Delta(X, X'), \\ \Delta(X, X') &= \text{sgn}(t - t') \int_{\Gamma} f(X, X'; s) ds. \end{aligned}$$

Фактически, приведенный выше результат представляет собой косвенное доказательство полноты построенных выше наборов решений на гиперплоскости  $t = \text{const}$ . Представление (56) верно для произвольных  $X$  и  $X'$ , несмотря на то, что замена переменных в интеграле (54) проводилась при условии  $y_- \neq 0$ . Все это подтверждает, что представление (56) эквивалентно представлению (47).

Действуя аналогично, представим сингулярные функции  $S^p(X, X')$  и  $S^{\bar{p}}(X, X')$  в (52) следующим образом:

$$\begin{aligned} S^p(X, X') &= \int dp_- \theta(+\pi'_-) \tilde{Y}^{(-)}(X, X'; p_-), \\ S^{\bar{p}}(X, X') &= \int dp_- \theta(-\pi'_-) \tilde{Y}^{(+)}(X, X'; p_-), \\ \tilde{Y}^{(\pm)}(X, X'; p_-) &= \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma^0 + \frac{(m - \gamma_\perp \hat{\mathbf{p}}_\perp)}{\pi_-} \right] \Xi_+ \times \\ &\quad \times \left[ \gamma^0 + \frac{(m + \gamma_\perp \hat{\mathbf{p}}_\perp^*)}{\pi'_-} \right] \gamma^0 \tilde{F}^{(\pm)}, \\ \tilde{F}^{(\pm)} &= \frac{\pm i I_2}{(2\pi)^{d-2}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[ eE \left( \frac{x_-^2 - x'^2}{2} - t^2 + t'^2 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p_-(x_+ - x'_+) \right] - i \left( b_\pm - \frac{i\pi}{2eE} \right) m^2 \right\}, \\ I_2 &= \int \exp \left[ -i \left( b_\pm - \frac{i\pi}{2eE} \right) p_\perp^2 + i(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \mathbf{p}_\perp \right] d\mathbf{p}_\perp, \\ b_\pm &= \left( \ln(\pm i \tilde{\pi}_-) - [\ln(\pm i \tilde{\pi}'_-)]^* \right) / (2eE). \end{aligned}$$

Полагая  $y_- \neq 0$ , выполним в интеграле  $S^p(X, X')$  замену переменных

$$s = b_- - i\pi / (2eE),$$

так что

$$\begin{aligned} \text{Re}(s) &= \frac{1}{2eE} \log \left| \frac{\pi_-}{\pi'_-} \right|, \\ \text{Im}(s) &= -\frac{\pi}{2eE} [\theta(+\pi_-) + \theta(-\pi_-)], \end{aligned}$$

а в интеграле  $S^{\bar{p}}(X, X')$  — замену переменных

$$s = b_+ - i\pi / (2eE),$$

так что

$$\begin{aligned} \text{Re}(s) &= \frac{1}{2eE} \log \left| \frac{\pi_-}{\pi'_-} \right|, \\ \text{Im}(s) &= -\frac{\pi}{2eE} [\theta(-\pi_-) + \theta(-\pi'_-)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S^p(X, X') &= - \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds - \\ &\quad - \theta(-y_-) \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p} f(X, X'; s) ds, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} S^{\bar{p}}(X, X') &= - \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds - \\ &\quad - \theta(+y_-) \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p} f(X, X'; s) ds. \end{aligned}$$

Замыкая контур интегрирования  $\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p$  при  $\text{Re } s \rightarrow \pm\infty$  трансформируем его в контур  $\Gamma_p^1$  (см. рис. 2) с радиусом, стремящимся к нулю:

$$\begin{aligned} S^p(X, X') &= (\gamma P + m) \Delta^p(X, X'), \\ \Delta^p(X, X') &= - \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds - \\ &\quad - \theta(-y_-) \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds; \\ S^{\bar{p}}(X, X') &= (\gamma P + m) \Delta^{\bar{p}}(X, X'), \\ \Delta^{\bar{p}}(X, X') &= - \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds - \\ &\quad - \theta(+y_-) \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds. \end{aligned} \quad (58)$$

Заметим, что в пределе  $s \rightarrow \pm 0 - i\pi / eE$  мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm 0 - i\pi/eE} f(X, X'; s) &= \\ &= \pm f_{\perp}(X, X') \delta(y^0) \delta(y^1), \\ f_{\perp}(X, X') &= -i \left( \frac{eE}{4\pi^2} \right)^{(d-2)/2} \times \\ &\times \exp \left( i\pi\gamma^0\gamma^1 - \frac{\pi m^2}{eE} - \frac{eE}{4\pi} |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|^2 \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Принимая во внимание (59), можно выделить все особенности в интеграле (58):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds &= \theta(y_1^2 - y_0^2) \Delta_R^p(X, X'), \\ \Delta_R^p(X, X') &= \int_{\Gamma_R^p} f(X, X'; s) ds. \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma_R^p$  — контур интегрирования проходящий по часовой стрелке в виде круга с центром  $s = -i\pi/eE$  и достаточно малого радиуса  $R$ , так что внутри данного контура функция  $f(x, x', s)$  не имеет других особенностей.

Приведем окончательный вид сингулярных функций  $S^{p/\bar{p}}$ :

$$\begin{aligned} S^{p/\bar{p}}(X, X') &= (\gamma P + m) \Delta^{p/\bar{p}}(X, X'), \\ -\Delta^p(X, X') &= \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds + \\ &+ \theta(y^1) \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds, \\ -\Delta^{\bar{p}}(X, X') &= \int_{\Gamma_p} f(X, X'; s) ds + \\ &+ \theta(-y^1) \int_{\Gamma_p^1} f(X, X'; s) ds. \end{aligned} \quad (60)$$

Заметим, что контур  $\Gamma_p^1$  трансформируется в контур  $\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p$ . Ступенчатая функция  $\theta(\pm y^1)$  может быть представлена как функция  $\theta(\mathbf{yE}/E)$  от проекции  $\mathbf{yE}/E$  вектора смещения  $\mathbf{y}$  на направление электрического поля.

Учитывая (60), мы получаем представление по собственному времени для сингулярных функций  $S_{in/out}^c(X, X')$  и  $S_{in/out}^{\mp}(X, X')$ :

$$\begin{aligned} S_{in/out}^c(X, X') &= S^{p/\bar{p}}(X, X') + S^c(X, X'), \\ S_{in/out}^{\mp}(X, X') &= \mp S^{p/\bar{p}}(X, X') + S^{\pm}(X, X'). \end{aligned} \quad (61)$$

Заметим, что замена переменных в интеграле (57) была выполнена при условии  $y_- \neq 0$ . Однако представления (52) справедливы для всех  $y_-$ .

Можно проверить, что представления (60) (и следовательно, представления (61)) справедливы для произвольных  $X$  и  $X'$ . Для этого мы нужно показать, что для всех  $X$  и  $X'$  представления (60) удовлетворяют тому же самому уравнению Дирака, что и представления (50). Сначала мы должны проверить, что интегралы (60) удовлетворяют уравнению Дирака для всех  $X$  и  $X'$ . Затем остается убедиться, что при  $t = t'$  условия Коши для обобщенных функций (50) совпадают с условиями для выражений (60).

Заметим, что соответствующие скалярные сингулярные функции могут быть получены из представлений для спинорных функций  $\Delta^{\pm}(X, X')$ ,  $\Delta^c(X, X')$ ,  $\Delta(x, x')$  и  $\Delta^{p/\bar{p}}(X, X')$ , если формально положить все  $\gamma$ -матрицы равными нулю.

Мы рассмотрели случай, когда  $L$ -постоянное электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ ,  $E_x = E$ . Ясно, что выбор противоположного направления соответствует отражению  $x \rightarrow -x$ ,  $x' \rightarrow -x'$  и замене  $\gamma^1 \rightarrow -\gamma^1$ . Поэтому достаточно рассмотреть случай одного направления электрического поля. Мы видим, что представления (60) и (61) с точностью до калибровочного слагаемого совпадают с представлениями (20) и (21). Их легко записать в ковариантном виде с помощью тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ , см. (22). Напомним, что выражение (22) было найдено для постоянного электрического поля, задаваемого нестационарным потенциалом в рамках общей формулировки КЭД для такого случая [3].

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе построены и исследованы сингулярные функции в КЭД сильного поля в  $T$ -постоянном электрическом поле и в КЭД сильного поля в  $L$ -постоянном электрическом поле. Для обоих случаев найдены in- и out-решения уравнения Дирака специального вида в переменных светового конуса. С помощью этих решений построены интегральные представления Фока – Швингера по собственному времени для всех видов сингулярных функций, необходимых для вычисления амплитуд вероятностей процессов и средних значений физических величин. Впервые получены интегральные представления Фока – Швингера для сингулярных функций в КЭД сильного поля в  $L$ -постоянном электрическом поле. Получены представления сингулярных функций в КЭД сильного поля в  $T$ -постоянном электрическом поле для произвольной ориентации внеш-

него электрического поля, что нетривиальным образом обобщает результаты работ [18, 19].

После стандартной ультрафиолетовой регуляризации и перенормировки все физические величины, которые могут быть получены при помощи причинного пропагатора  $S^c(X, X')$ , конечны в пределе  $L \rightarrow \infty$  и  $T \rightarrow \infty$ . К примеру, это видно для вакуумных матричных элементов тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle^c &= \langle 0, \text{out} | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle c_v^{-1}, \\ T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^{\text{can}} + T_{\nu\mu}^{\text{can}}), \\ T_{\mu\nu}^{\text{can}} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[ \hat{\Psi}^\dagger(X) \gamma^0, \gamma_\mu P_\nu \hat{\Psi}(X) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ P_\nu^* \hat{\Psi}^\dagger(X) \gamma^0, \gamma_\mu \hat{\Psi}(X) \right] \right\}, \end{aligned}$$

которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle^c &= i \operatorname{tr} [A_{\mu\nu} S^c(X, X')] |_{X=X'}, \\ A_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} [\gamma_\mu (P_\nu + P_\nu^*) + \gamma_\nu (P_\mu + P_\mu^*)]. \end{aligned}$$

Естественно, что проблемы нестабильности вакуума и ее проявления совершенно различны в  $L$ -постоянном поле и  $T$ -постоянном поле для конечных интервалов  $T$  и  $L$ . Однако в пределе  $T, L \rightarrow \infty$  соответствующие характеристики нестабильности вакуума оказываются одинаковыми. В частности, этот факт можно интерпретировать следующим образом: оба случая представляют собой разные регуляризации в идеализированном случае постоянного однородного электрического поля. Однако эта эквивалентность может отсутствовать для средних значений физических величин, которые могут быть получены с использованием сингулярных функций  $S_{\text{in/out}}^c(X, X')$ . Например, вакуумные средние тензора энергии-импульса,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{in/out}} = \langle 0, \text{in/out} | T_{\mu\nu} | 0, \text{in/out} \rangle,$$

могут быть представлены в виде

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{in/out}} = i \operatorname{tr} \left[ A_{\mu\nu} S_{\text{in/out}}^c(X, X') \right] |_{X=X'},$$

где учтены вклады от  $S^{p/\bar{p}}(X, X')$ . Такие вклады неограниченно растут в пределах  $T \rightarrow \infty$  и  $L \rightarrow \infty$ , см. работы [5, 20]. Этот факт связан с неограниченным ростом плотности рождающихся пар электронов и позитронов. Отсюда следует, что в таких случаях существует существенная физическая разница между  $T$ -постоянным и  $L$ -постоянным полем.

Тем не менее, в случаях, когда соответствующие вклады в диаграммы Фейнмана конечны, можно использовать полученные собственно-временные представления сингулярных функций  $S^{p/\bar{p}}(X, X')$ . Тогда регуляризация постоянного однородного электрического поля  $L$ -постоянным полем эквивалентна регуляризации  $T$ -постоянным полем при  $T, L \rightarrow \infty$ .

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00042).

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
3. D. M. Gitman, J. Phys. A **10**, 2007 (1977); E. S. Fradkin and D. M. Gitman, Fortschr. Phys. **29**, 381 (1981); E. S. Fradkin, D. M. Gitman, and S. M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
4. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, Phys. Rev. D **93**, 045002 (2016).
5. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, Phys. Rev. D **93**, 045033 (2016).
6. S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and A. A. Shishmarev, Phys. Rev. D **96**, 096020 (2017).
7. N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1980).
8. G. V. Dunne (eds.), *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, World Scientific, Singapore (2005).
9. G. V. Dunne and T. Hall, Phys. Rev. D **58**, 10502 (1998).
10. V. P. Gusynin and I. A. Shovkovy, Can. J. Phys. **74**, 282 (1996); V. P. Gusynin and I. A. Shovkovy, J. Math. Phys. **40**, 5406 (1999).
11. H. Gies and F. Karbstein, J. High Energy Phys. **2017**(3), 108 (2017).
12. F. Karbstein, Phys. Rev. D **95**, 076015 (2017).
13. F. Karbstein, Phys. Rev. Lett. **122**, 211602 (2019).
14. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, Phys. Rev. D **95**, 076013 (2017).

15. S. P. Gavrilo, D. M. Gitman, and A. A. Shishmarev, *Phys. Rev. D* **99**, 116014 (2019).
16. D. G. Sevostyanov, I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, arXiv:2012.10751 [hep-ph] (2020).
17. G. V. Dunne and Z. Harris, *Phys Rev. D* **103**, 065014 (2021).
18. S. P. Gavrilo and D. M. Gitman, *J. Math. Phys.* **37**, 3118 (1996).
19. S. P. Gavrilo, D. M. Gitman, and Sh. M. Shvartsman, *Sov. J. Nucl. Phys.* **29**, 567 (1979); S. P. Gavrilo, D. M. Gitman, and Sh. M. Shvartsman, *Sov. J. Nucl. Phys.* 715 (1979); S. P. Gavrilo, D. M. Gitman, and A. E. Gonçaves, *J. Math. Phys.* **39**, 3547 (1998).
20. S. P. Gavrilo, D. M. Gitman, and N. Yokomizo, *Phys. Rev. D* **86**, 125022 (2012).
21. N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, *Theor. Math. Phys.* **26**, 9 (1976).
22. V. Fock, *Phys. Z. Sowjetunion* **12**, 404 (1937).
23. A. V. Shapovalov and I. V. Shirokov, *Theor. Math. Phys.* **104**, 921 (1995).
24. V. G. Bagrov, M. C. Baldiotti, D. M. Gitman, and I. V. Shirokov, *J. Math. Phys.* **43**, 2284 (2002).
25. A. I. Breev and A. V. Shapovalov, *Symmetry* **12**, 1867 (2020).
26. A. I. Breev, S. P. Gavrilo, and D. M. Gitman, *Phys. Complex Systems* **1**, 30 (2020).