

О РЕАКЦИИ РАЗВАЛА В ТРЕХЧАСТИЧНЫХ КУЛОНОВСКИХ СИСТЕМАХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ОПИСАНИЮ ПРОЦЕССОВ ДИССОЦИАТИВНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ И ПЕРЕЗАРЯДКИ В АНТИПРОТОННОЙ ФИЗИКЕ

А. М. Будылин^a, Я. Ю. Коптелов^{a,b}, С. Б. Левин^{a}*

*^a Физический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Россия*

*^b Санкт-Петербургский электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ленина
197376, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 23 марта 2021 г.,
после переработки 23 мая 2021 г.
Принята к публикации 30 мая 2021 г.

Предлагается новый подход к описанию реакции развала в системах трех заряженных квантовых частиц при наличии кулоновских парных потенциалов притяжения. Предполагается, что аналитическая форма асимптотики волновой функции на бесконечности в конфигурационном пространстве является известной. При этом впервые предлагается упрощенная форма асимптотики, связанная с выделением основных вкладов, порождаемых бесконечной совокупностью парных асимптотических каналов рассеяния. Предложенный подход представляется нам принципиальным для описания реакции развала в многочастичных системах. Рассматривается возможность приложения развитого подхода для описания процессов диссоциативной рекомбинации и перезарядки в экспериментах по накоплению антиатомов.

DOI: 10.31857/S0044451021090042

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем задачу рассеяния трех трехмерных квантовых заряженных частиц при наличии парных кулоновских потенциалов притяжения. Для определенности полагаем, что парные короткодействующие потенциалы отсутствуют, хотя их аккуратный учет не является принципиальной проблемой в рамках предлагаемой нами схемы. Кроме того, мы предполагаем, что массы частиц равны, что также не является принципиальным ограничением предлагаемого метода, а лишь позволяет избежать более громоздких вычислений. На примере такой упрощенной задачи мы хотим продемонстрировать новый подход к задаче рассеяния трех заряженных квантовых частиц при энергиях выше порога развала. Предлагаемый подход позволяет контролировать точность описания реакции развала в задаче трех тел. Мы надеемся также, что подход окажется

полезен и в более общей ситуации рассеяния в системе нескольких частиц (больше трех), по крайней мере, для двухкластерного рассеяния.

Задача трехчастичного квантового рассеяния является одной из фундаментальных физических задач. Ее решение, как решение модельной задачи, определяет протекание многих макроскопических процессов в физике и химии. В случае быстро убывающих парных потенциалов эта задача была решена в знаменитой работе Фаддеева [1] более полувека назад. В случае медленно (кулоновским образом) убывающих парных потенциалов многие существенные вопросы стационарной постановки были решены или обсуждались в последующих работах Фаддеева, Меркурьева [2–4] и их учеников, а также в огромном количестве работ, инициированных первыми результатами.

Тем не менее, несмотря на существенные продвижения, достигнутые за прошедшее с тех пор время, квантовая задача рассеяния трех заряженных частиц до сих пор оставляет ряд нерешенных до конца вопросов. Основная проблема связана с отсутствием так называемой асимптотической свободы час-

* E-mail: s.levin@spbu.ru

тиц на бесконечности. Это делает неприменимым (по крайней мере в исходной классической форме) подход Фаддеева, основанный на асимптотическом разделении волновой функции на компоненты. При этом существенно усложняется структура асимптотики волновой функции на бесконечности.

Другая проблема, специфичная для реакции развала кластера, находящегося в связанном кулоновском состоянии, налетающей заряженной частицей связана с наличием бесконечного числа уровней возбуждения кластера и уровней перекластеризации. Каждый уровень возбуждения (или перекластеризации) порождает свой канал рассеяния. Чем ниже полная положительная энергия системы, тем более существенной при описании характеристик рассеяния становится роль парных возбуждений с высокими значениями парного главного квантового числа. Отметим, что размерность матрицы рассеяния становится фактически бесконечной, что существенно усложняет оценки точности при вычислении характеристик рассеяния.

Необходимо отметить работы [5–7], в которых проблема бесконечного числа парных кулоновских каналов рассеяния в процессах трехчастичного развала решается путем «дискретизации континуума», т. е. введения конечного базиса для описания асимптотики решения задачи рассеяния. Несмотря на хорошее совпадение некоторых численных построений с экспериментом, существенные вопросы, связанные с таким подходом, остаются. Эти вопросы касаются оценок погрешности описания динамики заведомо бесконечномерной системы с помощью конечного «штурмовского базиса». Отметим, что при описании низкоэнергетического рассеяния такие оценки становятся принципиальными. Они отвечают на вопрос о том, сколько уровней парных возбуждений должно быть учтено явно для описания процесса развала с фиксированной точностью. Более того, возникает вопрос о том, можно ли в принципе ограничиться рассмотрением конечного числа уровней возбуждения при описании процессов развала с контролируемой точностью в рамках квантовомеханической модели. А если нет, то как именно в рамках конечномерной конструкции описать не учитываемое явно бесконечное число степеней свободы системы. Фактически вопрос сводится к доказательству справедливости штурмовского базиса или к построению его обоснованной альтернативы.

Отметим работу [8], посвященную построению асимптотики решения задачи рассеяния трех заряженных кулоновских частиц, а также построению кулоновской функции Грина. Здесь также не рас-

сматривается влияние рассеяния бесконечного числа парных кулоновских уровней возбуждения на структуру асимптотики решения задачи. Соответственно, остается без ответа вопрос о количестве парных состояний дискретного спектра, которые нужно учесть явно для достижения определенной точности вычислений.

В настоящей работе мы отвечаем на поставленные выше вопросы. Мы показываем, что для описания с контролируемой точностью процессов развала в трехчастичной кулоновской системе невозможно ограничиться лишь конечным числом парных кулоновских возбуждений. Дополнительный бесконечный набор не учтенных явно процессов должен учитываться с помощью введения некоторого «эффективного состояния», которое удастся построить явно. Детали построения описаны, например, в работе [9]. Здесь отметим лишь, что эффективное состояние определяется методом перевала при анализе спектрального разложения асимптотики собственных функций непрерывного спектра трехчастичного оператора в асимптотической области «почти разделения переменных». Это эффективное состояние и является обоснованной альтернативой упомянутому выше штурмовскому базису. Точность предложенных построений регулируется параметром, описывающим количество учтенных явно уровней возбуждения парной подсистемы, и соответствующей областью применимости эффективного состояния. Мы следуем идеям дифракционного подхода в задаче рассеяния, предложенного в работах [10–12] для случая короткодействующих парных потенциалов и одномерных частиц. На основе принципа локального поля, сформулированного Фоком в асимптотической теории дифракции [13], идеи дифракционного подхода были развиты позднее для случая кулоновских парных потенциалов отталкивания для одномерных и трехмерных частиц в работах [14–17].

Отметим также, что развиваемые в работе идеи, на наш взгляд, сохраняют актуальность и для многочастичных (больше трех) квантовых реакций взаимодействия. А именно, предложенный еще Фоком метод локального поля и развитый в более поздних работах дифракционный подход позволяют при взаимодействии сложных многочастичных квантовых систем выделять наборы эффективных состояний, заменяющих в локальных областях конфигурационного пространства сложную динамику с бесконечным числом степеней свободы. Выделение таких состояний эквивалентно выделению в сложной системе простой конечномерной модели, сохраняющей

основные черты исходной системы и допускающей стандартное решение.

В заключение мы рассматриваем приложение развитого в работе метода к описанию процессов диссоциативной рекомбинации и перезарядки в экспериментах по проверке СРТ-симметрии (заряд–четность–время), проводившихся в CERN в течение последних нескольких лет [18].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать процессы рассеяния $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$, предполагая для определенности, что в начальном состоянии имеются заряженная частица и двухчастичный кластер в кулоновском связанном состоянии. Будем предполагать, что полная энергия системы допускает развал, т. е. допустимы процессы $2 \rightarrow 3$. Будем искать решение уравнения Шредингера для такой трехчастичной системы, полагая, что это решение обладает на бесконечности в конфигурационном пространстве определенной асимптотикой. Нам известна структура (анзац) асимптотики, каждый член которой отвечает некоторому процессу рассеяния, $2 \rightarrow 2$ или $2 \rightarrow 3$. Нам не известны амплитуды рассеяния (коэффициенты в этих асимптотических членах), определяемые интегральными операторами. При этом каждая амплитуда рассеяния однозначно определяется некоторой весовой функцией (плотностью в структуре этих интегральных операторов). Интегральные операторы по построению учитывают вырождение парных связанных состояний с фиксированной энергией [19], а также вырождение состояний непрерывного спектра.

Нашей целью является нахождение полного набора амплитуд рассеяния, отвечающих различным процессам. Отметим, что для математически корректного учета бесконечного числа парных кулоновских возбуждений в процессах $2 \rightarrow 2$ будет определено упомянутое выше эффективное состояние, что позволит сделать задачу рассеяния эффективно-конечномерной. Это эффективное состояние может рассматриваться как замена конструкций, определенных с помощью штурмовского базиса в работах [5–7]. При этом будет найдено и решение трехчастичного уравнения Шредингера. Задача может быть решена в три этапа.

На первом этапе мы построим матричное интегральное уравнение, которое свяжет полный набор упомянутых выше плотностей, отвечающих процессам $2 \rightarrow 2$, с амплитудой рассеяния $2 \rightarrow 3$. Отметим, что амплитуда рассеяния $2 \rightarrow 3$ является глад-

кой функцией точки на пятимерной сфере единичного радиуса. Уравнение будет построено на основе многомерной формулы Грина. Идея этих построений близка, например, работе [7], однако имеет и свои отличительные черты. Мы обсудим разрешимость построенного уравнения.

Основываясь на предыдущем шаге, на следующем этапе мы построим и решим неоднородную граничную задачу для амплитуды рассеяния $2 \rightarrow 3$ в шестимерном шаре большого радиуса ρ с граничным условием типа модифицированного условия излучения.

Наконец, на третьем этапе мы восстановим все амплитуды рассеяния $2 \rightarrow 2$, воспользовавшись результатами решения граничной задачи (амплитуда рассеяния $2 \rightarrow 3$). Этот результат позволяет модифицировать свободный член в неоднородной граничной задаче, решаемой на втором шаге, и повторить этапы два и три. Таким образом, мы приходим к итеративной процедуре, позволяющей уточнить решение с контролируемой точностью за определенное число шагов.

Упомянутая выше процедура сводится к нахождению парных амплитуд рассеяния $2 \rightarrow 2$, отвечающих дискретному спектру в подсистемах, по известным данным рассеяния на непрерывном спектре. В некотором роде такая процедура известна в теории рассеяния как процедура «одевания».

3. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

3.1. Уравнение и граничные условия

Пусть в начальном состоянии частицы в паре σ находятся в связанном состоянии с главным квантовым числом l . Пусть H — оператор Гамильтона системы трех заряженных частиц:

$$H = -\Delta_{\mathbf{x}} - \Delta_{\mathbf{y}} + \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}), \quad v_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}) = \frac{c_{\alpha}}{x_{\alpha}},$$

$$x_{\alpha} = |\mathbf{x}_{\alpha}|, \quad c_{\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\rho = \sqrt{x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2}$ — гиперрадиус системы трех частиц, $(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha})$, $\alpha = 1, 2, 3$ — пары якобиевых координат, $(\mathbf{k}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha})$ — соответствующие им пары импульсов, $\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha} \in \mathbb{R}^3$.

Будем искать решение уравнения Шредингера

$$H\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = E\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\beta} \\ \mathbf{y}_{\beta} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{\beta} \\ \mathbf{p}_{\beta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^6 \tag{1}$$

с асимптотикой

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} \Psi^{(0)} + \Psi^{(02)} + \Psi^{(03)}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)} &= \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' \exp[i\langle \mathbf{p}'_{l\sigma}, \mathbf{y}_\sigma \rangle + iw_{l\sigma}(\mathbf{y}_\sigma, p_{l\sigma})] \times \\ &\quad \times \varphi_{l\sigma}(\mathbf{x}_\sigma, \hat{\mathbf{k}}'_{l\sigma}) a_{l\sigma}^0(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}'), \\ \Psi^{(02)} &= \sum_{\alpha=1}^2 \Psi_\alpha^{(02)}, \quad \Psi_\alpha^{(02)} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' \exp[i\langle \mathbf{p}'_{j\alpha}, \mathbf{y}_\alpha \rangle + iw_{j\alpha}(\mathbf{y}_\alpha, p_{j\alpha})] \times \\ &\quad \times \varphi_{j\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}) a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}'), \\ \Psi^{(03)} &\underset{w}{\rightarrow} A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{\exp[i\sqrt{E}X + iW_0(\mathbf{X}, \mathbf{P})]}{X^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$d\hat{\mathbf{P}} \equiv d\hat{\mathbf{k}} d\hat{p}, \quad \hat{\mathbf{k}} \equiv \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \hat{p} \equiv \frac{p}{p}.$$

В дальнейшем символ «шляпка» также будет использоваться для обозначения единичного вектора.

Асимптотика (2) в слабом смысле определяет структуру решения задачи рассеяния. Необходимо отметить, что структура расходящейся волны $\Psi^{(03)}$ должна быть модифицирована в областях, определяемых условиями $x_\alpha < y_\alpha^\nu$, $0 < \nu < 1$, $\alpha = 1, 2, 3$. Структура искаженных плоских волн (частью слабой асимптотики которых является выражение для $\Psi^{(03)}$) с учетом модификации подробно описана в работах [15, 17, 20]. В работе [17] показано, что такая модификация сводится к аналитической замене

$$\mathbf{x}_\alpha \rightarrow -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_\alpha} \psi_c(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha)}{\psi_c(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha)}, \quad (4)$$

где функция $\psi_c(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha)$ является решением уравнения Шредингера в парной подсистеме. Такую модификацию в дальнейшем мы и будем иметь в виду.

3.2. Обсуждение структуры анзаца

Отметим, что асимптотика (2) содержит разложение по всевозможным парным состояниям, допустимым в данной реакции рассеяния (процессы $2 \rightarrow 2$, второе слагаемое $\Psi^{(02)}$ в (2)). Такие разложения допустимы в тех асимптотических областях конфигурационного пространства, в которых исходный оператор Шредингера допускает определенные

упрощения. В данном случае таким упрощением является почти разделение переменных. Подробнее об этом будет сказано ниже. Сейчас мы лишь отметим, что выделение различных асимптотических областей в конфигурационном пространстве с последующим упрощением решения в этих областях приведет к возможности свести набор упрощенных решений в единое решение во всем пространстве. Эти рассуждения, как уже было сказано выше, основаны на принципе локального поля, сформулированном и использованном Фоком в асимптотической теории дифракции [13].

В данной задаче мы принимаем во внимание, что лишь две парные подсистемы в произвольной системе трех заряженных частиц могут породить двухчастичные связанные состояния. Вклад в асимптотику вносит также расходящаяся шестимерная сферическая волна с гладкой амплитудой (процесс $2 \rightarrow 3$, третье слагаемое $\Psi^{(03)}$ в (2)), а, кроме того, и начальное состояние, вклад которого отражен в первом слагаемом $\Psi^{(0)}$ в формуле (2).

Приведем использованные обозначения. Функция

$$\begin{aligned} \varphi_{n\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha}) &= \exp\left(-x_\alpha \frac{|c_\alpha|}{2n}\right) \times \\ &\quad \times L_{n-1}\left(\frac{|c_\alpha|x_\alpha}{2n}(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha}, \hat{\mathbf{x}}_\alpha \rangle)\right), \end{aligned}$$

где L_n — полиномы Лагерра, а $\langle \hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha}, \hat{\mathbf{x}} \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов $\hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha}$ и $\hat{\mathbf{x}}$, описывает двухчастичное кулоновское связанное состояние с главным квантовым числом n в паре α с энергией $\kappa_n = -c_n^2/4n^2$ в следующем смысле.

Как показано в Приложении, такая функция играет роль производящей функции в разложении вида $\Psi^{(02)}$, а само разложение может рассматриваться как набор производящих интегралов. Согласно уравнению (74) Приложения, интегрирование функции $\varphi_{n\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha})$ по $d\hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha}$ с некоторой гладкой функцией a_n , заданной на единичной сфере $\mathbb{S}_{\hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha}}^2$, представляет собой суперпозицию всех возможных двухчастичных кулоновских состояний с квантовыми числами (n, l, m) при фиксированном главном квантовом числе n . Структура коэффициентов в такой суперпозиции n^2 слагаемых полностью определяется структурой функции a_n .

Именно в этом смысле $\Psi^{(02)}$ является спектральным разложением трехчастичных собственных функций непрерывного спектра по полному набору состояний двухчастичных подсистем. Асимптотические области конфигурационного простран-

ства, в которых такие разложения применимы, подробно обсуждались в работе [19]. Ранее они использовались в [2].

Более точно, каждое кулоновское парное связанное состояние с главным квантовым числом n имеет вырождение кратности n^2 , каждый асимптотический канал рассеяния вырожден также по направлению импульса $\mathbf{p}_{n\alpha}$. Это совокупное вырождение отражено в интегрировании по $d\hat{\mathbf{P}}'$ по «четырёхмерной сфере» $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ с неизвестной плотностью $a_{n\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$. Отметим, что нахождение полного набора плотностей $a_{n\alpha}$ в совокупности с амплитудой трехчастичного развала системы определяет, в смысле сказанного выше, полный набор амплитуд рассеяния и, тем самым, решает задачу. Еще раз подчеркнем, что нахождение такого полного набора амплитуд или, точнее, эквивалентного ему набора и является целью данной работы.

Предложенный нами анзац не является вполне стандартным в следующем смысле. Во-первых, падающая волна $\Psi^{(0)}$ задается плотностью $a_{l\sigma}^0$. В смысле обсуждавшегося выше эта функция задает начальное состояние кластера с главным квантовым числом l в паре σ . С нашей точки зрения, такой «вероятностный» способ задания начального состояния (не требующий задания фиксированного набора квантовых чисел) является наиболее естественным в квантовомеханической постановке задачи. Очевидно, что можно подобрать и такую плотность $b_{l\sigma}^0$, которая отвечала бы именно одному фиксированному набору квантовых чисел.

Во-вторых, как уже обсуждалось выше, спектральное разложение трехчастичного состояния системы по набору парных состояний (слагаемое $\Psi^{(02)}$) содержит не только расходящиеся волны по переменной \mathbf{y}_α (как это принято в стандартных разложениях), но и сходящиеся волны. Иначе говоря, разложение строится по набору плоских волн, который включает в себя как расходящиеся, так и сходящиеся волны. Отметим, что такой выбор разложения обусловлен, с математической точки зрения, полнотой набора собственных функций парного оператора Шредингера. С физической точки зрения, включение в разложение сходящихся волн обусловлено дальнедействием парных кулоновских потенциалов. Иными словами, таким образом мы учитываем ненулевую вероятность процессов перестройки в кулоновской системе трех тел даже на больших расстояниях. В то же время распределение амплитуд в сходящихся и расходящихся волнах определяется структурой плотностей $a_{n\alpha}$ и должно быть найдено в процессе решения задачи.

Мы используем также следующие обозначения. Импульс $\mathbf{p}'_{n\alpha} = \sqrt{E - \kappa_n} \hat{\mathbf{p}}'_{n\alpha}$, интегрирование ведется по $d\hat{\mathbf{P}}' = d\hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha} d\hat{\mathbf{p}}'_{n\alpha}$. Фазовые функции $w_{n\alpha}(y_\alpha, p_{n\alpha})$ и $W_0(\mathbf{X}, P)$ определены следующим образом:

$$w_{n\alpha}(y_\alpha, p_{n\alpha}) = -\frac{c_\alpha^{eff}}{2p_{n\alpha}} \ln y_\alpha,$$

$$W_0(\mathbf{X}, P) = -\frac{X}{2\sqrt{E}} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{x_\alpha} \right) \ln X.$$

Еще раз отметим, что функция W_0 в асимптотических областях, в которых одна из парных координат Якоби x_α становится существенно меньше других, должна быть модифицирована в соответствии с результатами работ [17, 20]. Выражение для c_α^{eff} в общей ситуации имеет вид

$$c_\alpha^{eff} = \frac{c_\beta}{|\omega_{\beta\alpha}|} + \frac{c_\gamma}{|\omega_{\gamma\alpha}|}.$$

Здесь $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — четная перестановка номеров парных подсистем. Коэффициенты $\omega_{\alpha\beta}$ являются коэффициентами матрицы преобразования координат Якоби,

$$\mathbf{x}_\beta = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{x}_\alpha + \omega_{\alpha\beta} \mathbf{y}_\alpha.$$

Например, в рассматриваемом нами случае частиц равных масс при $\alpha = 1$ имеем

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1, \quad \mathbf{x}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1,$$

$$c_1^{eff} = \frac{2}{\sqrt{3}}(c_2 + c_3).$$

Отметим, что вследствие экспоненциального убывания функции $\varphi_{n\alpha}$ по переменной x_α асимптотика решения при $\rho \rightarrow \infty$ оказывается эквивалентной асимптотике при $y_\alpha \rightarrow \infty$ для любого конечного значения n .

Выражение для $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ является гладкой функцией, описывает амплитуду шестимерной расходящейся волны и подлежит определению. Неизвестные плотности $a_{n\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$ также подлежат определению.

3.3. Схема решения

Ниже, воспользовавшись многомерной формулой Грина, определим уравнения, которые связывают плотности $a_{n\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$ и трехчастичную амплитуду $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$. Учитывая эти связи, мы предложим процедуру нахождения амплитуды $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ путем решения граничной задачи в шаре большого радиуса ρ с граничными условиями типа модифицированного условия излучения. Решив поставленную

граничную задачу для функции $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ в первом приближении, мы сможем восстановить плотности $a_{n\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$ и, как было отмечено выше, определим амплитуды также во всех парных каналах рассеяния. Найденные амплитуды позволят скорректировать начальные данные для граничной задачи и повторить описанную процедуру. Число коррекций решения определяется необходимой точностью решения поставленной задачи.

Параллельно мы определим волновую функцию трехчастичной системы во всем пространстве.

Данный подход в некотором смысле связан с известным R -матричным подходом [21], однако несомненно имеет и свои отличительные черты. Преимущество данного метода заключается в том, что мы учитываем бесконечное число парных каналов рассеяния с помощью явного выделения их совокупного вклада в асимптотику (2).

3.4. Выделение асимптотических вкладов в структуре спектральных разложений

Начнем с того, что запишем выражение (3) для $\Psi_\alpha^{(02)}$, отвечающее набору всевозможных связанных состояний в парной подсистеме α с кулоновским потенциалом притяжения, следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{(02)} &= \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' \exp[i\langle \mathbf{p}'_{j\alpha}, \mathbf{y}_\alpha \rangle + iw_{j\alpha}(y_\alpha, p_{j\alpha})] \times \\ &\quad \times \varphi_{j\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}) a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}') \sim \\ &\sim \sum_{j=1}^{N_\alpha} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' \exp[i\langle \mathbf{p}'_{j\alpha}, \mathbf{y}_\alpha \rangle + iw_{j\alpha}(y_\alpha, p_{j\alpha})] \times \\ &\quad \times \varphi_{j\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}) a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}') + \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' \Psi_{c,\alpha}^{acc}(\mathbf{X}, \sqrt{E}\hat{\mathbf{P}}') a_\alpha^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}'). \quad (5) \end{aligned}$$

На этом шаге происходит выделение из бесконечной суммы слагаемых, в которую раскладывается решение уравнения Шредингера в соответствующей области конфигурационного пространства¹⁾, одного эффективного состояния, определяющего совокупный вклад в разложение всех высоковозбужденных состояний в выделенной паре частиц с индексом α . Точность такого разбиения определяется величиной параметра N_α . Оценка значения этого параметра дана ниже.

¹⁾ Полный набор областей описан в следующем разделе.

Данное разложение представляет собой спектральное разложение решения по собственным функциям парной подсистемы в соответствующей области. При этом можно сказать, что выделенное эффективное состояние соответствует спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра оператора Шредингера соответствующей парной подсистемы.

Механизм выделения асимптотического члена в выражении (5) связан со сложной структурой асимптотики функций $\varphi_{n\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{n\alpha})$ (а фактически — полиномов Лагерра) по совокупности больших значений переменных n и x_α [22]. Более точно: при увеличении x_α основной вклад в полное выражение (5) вносят слагаемые, отвечающие все большим значениям индекса « n ». Таким образом, выделение асимптотики функциональной суммы (5) по переменной x_α приводит к выделению совокупного вклада слагаемых, отвечающих большим значениям индекса « n ».

Значение параметра N_α определяется структурой асимптотической области конфигурационного пространства, в которой используется асимптотика (5).

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА И ПОСТРОЕНИЕ «ЭФФЕКТИВНОГО» КАНАЛА РАССЕЯНИЯ

4.1. Постановка вспомогательной задачи

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу о распространении решения уравнения Шредингера (1) типа искаженной шестимерной плоской волны, являющейся приближенным решением в области конфигурационного пространства, где все частицы хорошо разделены (забегая вперед, назовем эту область Ω_{BVK}), в область, где частицы выбранной пары α с парным кулоновским потенциалом притяжения сближаются, а третья частица по-прежнему находится далеко (назовем эту область Ω_α^+).

На первый взгляд, такая вспомогательная задача (задача $3 \rightarrow 3(2)$) не связана с задачей рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$, которую мы исследуем. Однако это не так в следующем смысле.

Ниже показано, что в области Ω_α^+ оператор Шредингера асимптотически упрощается и допускает почти разделение переменных. Напомним, что решение типа искаженной плоской волны, так называемое ВVK-приближение, $\Psi_c^{BVK}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, было исследовано в работе [23] (см. также [2]), хотя использова-

лось и ранее. С точностью до нормировки оно имеет вид

$$\Psi_c^{BBK}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} D(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3). \quad (6)$$

Здесь

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \Phi(-i\eta, 1, i\mathbf{x}\mathbf{k} - i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle), \quad \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \quad \eta = \frac{c}{2k}, \quad (7)$$

Φ — вырожденная гипергеометрическая функция [24].

В смысле сказанного выше, решение типа $\Psi_c^{BBK}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ в пересечении областей Ω_{BBK} и Ω_α^+ может быть разложено по базису собственных функций оператора Шредингера парной подсистемы α . Главный вклад разложения по совокупности парных высоковозбужденных (отвечающих большим значениям главного квантового числа n) состояний может быть отсуммирован в некоторое эффективное состояние, допускающее следующее представление:

$$\tilde{\Psi}_c^{acc} \sim U(\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}}_\alpha) A(|c_\alpha| x_\alpha). \quad (8)$$

Функции $U(\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}}_\alpha)$ и $A(|c_\alpha| x_\alpha)$ будут явно определены ниже.

Это эффективное состояние заменяет разложение искаженной шестимерной плоской волны по бесконечному ($n > N_\alpha \gg 1$) вырожденному набору состояний двухчастичного дискретного спектра.

Воспользовавшись принципом локального поля, мы покажем, что разложение решения задачи рассеяния $3 \rightarrow 3(2)$ типа шестимерной расходящейся волны с произвольной амплитудой в области Ω_α^+ по полному набору собственных функций парного оператора Шредингера также допускает выделение некоторого эффективного состояния. А само это состояние (8) связано со структурой определенного выше в (5) (для исходной задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$) асимптотического выражения для $\Psi_{c,\alpha}^{acc}$ с помощью интегрального оператора. В этом и заключается основной результат данного раздела.

4.2. Основные результаты, полученные ранее на пути решения вспомогательной задачи

Вернемся теперь к решению вспомогательной задачи. Для этого воспользуемся принципом локального поля, установленным Фоком в 1947 году и использованным им при развитии асимптотической

теории дифракции. Этот же принцип был использован [15, 17] для системы трех трехмерных одноименно заряженных частиц.

Следуя работе [15], введем набор асимптотических областей конфигурационного пространства в терминах введенных выше пар координат Якоби $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)$ (как и выше, индекс $\alpha = 1, 2, 3$ нумерует парные подсистемы):

$$\Omega_\alpha = \left\{ (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha), \quad y_\alpha^\mu < x_\alpha < y_\alpha, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1, \quad y_\alpha \rightarrow \infty \right\}, \quad (9)$$

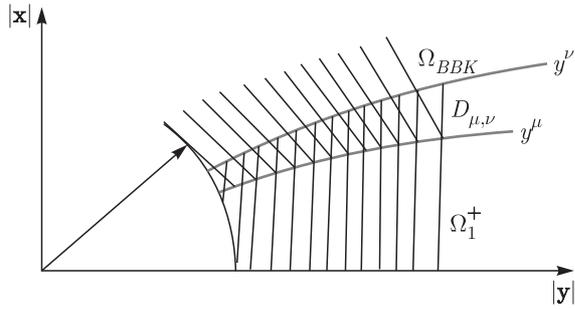
$$\Omega_{BBK} = \bigcup_{\alpha=1}^3 \Omega_\alpha, \quad (10)$$

$$\Omega_\alpha^+ = \left\{ (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha), \quad x_\alpha \leq y_\alpha^\nu, \quad 0 < \nu < 1, \quad y_\alpha \rightarrow \infty \right\}, \quad (11)$$

$$D_{\mu,\nu}^\alpha = \left\{ (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha), \quad y_\alpha^\mu < x_\alpha < y_\alpha^\nu, \quad \frac{1}{2} < \mu < \nu < 1, \quad y_\alpha \rightarrow \infty \right\}. \quad (12)$$

Отметим, что область Ω_{BBK} (10) отвечает ситуации, когда все три заряженные частицы хорошо разделены. В этой области применимо приближенное решение уравнения Шредингера Ψ^{BBK} , описанное, например, в работе [23], где, в частности, предложена рекуррентная процедура улучшения точности этого приближения. При этом границы параболических областей Ω_α (9) выбраны так, чтобы невязка приближенного решения Ψ^{BBK} в этих областях убывала быстрее кулоновского потенциала.

Параболические области Ω_α^+ (11) соответствуют асимптотическим конфигурациям, в которых сумма трех парных кулоновских потенциалов допускает разделение переменных с точностью до короткодействующей поправки. При этом короткодействующая поправка всюду является поправкой следующего порядка малости по величине $1/y_\alpha$ ($y_\alpha \gg 1$, $y_\alpha \gg x_\alpha$) к основной части потенциала, допускающей разделение переменных. Область $D_{\mu,\nu}^\alpha$ является пересечением области Ω_{BBK} и области Ω_α^+ . Упрощенная схема выделения асимптотических областей при $\alpha = 1$ приведена на рисунке. В дальнейшем мы будем, где это возможно, опускать индекс « α », полагая $\alpha = 1$. Рассмотрим теперь область Ω_1^+ . В ней полный потенциал в уравнении Шредингера в старшем порядке допускает следующее упрощение:



$$V = V_{sep} + O\left(\frac{x}{y^2}\right), \quad V_{sep} = \frac{c_1}{x_1} + v^{eff}(y),$$

$$v^{eff} = \frac{c^{eff}}{y}, \quad c^{eff} = \frac{2(c_2 + c_3)}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

При этом поправка $O(x/y^2)$ в данной области убывает быстрее кулоновского потенциала при $y \rightarrow \infty$. Скорость убывания поправки регулируется границами области в определении (11). Таким образом, в области Ω_1^+ уравнение Шредингера в старшем порядке имеет вид

$$[-\Delta_{\mathbf{x}} - \Delta_{\mathbf{y}} + v_1(x) + v^{eff}(y)] \Psi^{sep} = E \Psi^{sep} \quad (14)$$

и тем самым допускает разделение переменных. Мы обсудим ниже границы применимости такого приближения.

Представление Ψ^{sep} для решения уравнения (14) с разделением переменных строится как произведение решений $\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ и $\psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ при условии $k^2 + p^2 = E$, умноженное на произвольную весовую функцию R импульсных переменных:

$$\Psi^{sep}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \times$$

$$\times \delta(k'^2 + p'^2 - E) R_c(\mathbf{P}, \mathbf{P}') + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta\left(p'^2 - \frac{c_1^2}{4n^2} - E\right) \times$$

$$\times R_n(\mathbf{P}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}'), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_1^+. \quad (15)$$

Здесь функции $\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ и $\psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ абсолютно непрерывного спектра удовлетворяют двухчастичным кулоновским уравнениям соответственно

$$h_x \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = (-\Delta_{\mathbf{x}} + v_1(x)) \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = k^2 \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (16)$$

$$h_y \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = (-\Delta_{\mathbf{y}} + v^{eff}(y)) \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = p^2 \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}). \quad (17)$$

При этом весовая функция $R = R_c$, а $k^2 > 0$.

Функция $\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ — функция дискретного спектра оператора h_x , определенная в Приложении. Здесь весовая функция $R = R_n$, а двухчастичный спектральный параметр k^2 принимает бесконечный набор дискретных значений $-c^2/4n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, условие $k^2 + p^2 = E$ отражает закон сохранения энергии, а импульсы \mathbf{k} и \mathbf{p} принимают все возможные допустимые значения, определяемые структурой спектра операторов h_x и h_y (16), (17).

Иными словами, как уже отмечалось выше, приближенное представление для искомого решения Ψ^{sep} уравнения Шредингера исходной задачи трех тел в области Ω_1^+ является фактически разложением по собственным функциям (спектральным разложением) оператора Шредингера парной подсистемы с индексом «1». Коэффициентами этого разложения являются некоторые весовые функции R_c и R_n , не зависящие от координат \mathbf{x} и \mathbf{y} . Весовая функция R_c отвечает непрерывному спектру оператора h_x , а весовая функция R_n — дискретному спектру оператора h_x . Вырождение двухчастичного кулоновского связанного состояния с фиксированным главным квантовым числом учитывается, как показано в Приложении, с помощью интегрирования по единичной сфере $\mathbb{S}_{\hat{\mathbf{k}}}^2$. Детали построения функции Ψ^{sep} могут быть найдены в работе [19]. Весовые функции R_n , $n \gg 1$ определяются единственным образом из условия согласования приближенного решения Ψ^{sep} и приближенного решения Ψ_c^{BVK} в области $D_{\mu, \nu}$ (12), в которой оба эти приближенные решения справедливы.

4.3. Структура функции $\tilde{\Psi}_c^{acc}$

Как отмечалось выше, чтобы построить выражение для $\tilde{\Psi}_c^{acc}$, нам нужно провести процедуру согласования решения типа спектрального разложения Ψ^{sep} (5) и решения типа Ψ_c^{BVK} в асимптотической области $D_{\mu, \nu}$ (при больших значениях переменной x). Отметим, что этот шаг аналогичен процедуре нахождения амплитуд рассеяния в спектральном разложении решения полной задачи рассеяния, однако не эквивалентен этой процедуре. Различие заключается в том, что на данном (элементарном) этапе мы строим не полное решение задачи рассеяния, которое мы не знаем, а лишь, с определенной точностью, собственную функцию непрерывного спектра трехчастичного оператора, продолжая внутрь параболической области Ω_1^+ искаженную плоскую волну Ψ_c^{BVK} . Для нахождения коэффициентов разложе-

ния R_n в выражении для Ψ^{sep} мы приравняем в области $D_{\mu,\nu}$ представления Ψ_c^{BBK} и Ψ^{sep} :

$$\Psi^{sep}|_{D_{\mu,\nu}} \sim \Psi_c^{BBK}|_{D_{\mu,\nu}}. \quad (18)$$

Фактически мы согласовываем их слабые асимптотики, существенно уменьшая число степеней свободы в исследуемых выражениях. В этом смысле мы повторяем идеологию, изложенную в работе [15]. Пользуясь ортогональностью функций, образующих спектральное разложение Ψ^{sep} , мы домножаем уравнение (18) на одну из базисных функций вида Ψ_n^* ,

$$\Psi_n(\mathbf{X}, \mathbf{P}') = \exp[i\langle \mathbf{p}'_n, \mathbf{y} \rangle + iw_n(\mathbf{y}, p_n)]\varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}'_n),$$

$$n > N \gg 1,$$

и интегрируем по пространственной переменной. Продолжая функцию Ψ_c^{BBK} регулярным образом внутрь параболической области Ω_1^+ как функцию $\tilde{\Psi}_c^{BBK}$, мы находим коэффициенты разложения R_n в терминах скалярных произведений $\langle \Psi_n, \tilde{\Psi}_c^{BBK} \rangle_{\mathbb{R}^6}$. Как показано в работе [19], в старшем порядке справедливо равенство

$$\langle \Psi_n, \tilde{\Psi}_c^{BBK} \rangle_{\mathbb{R}^6} \sim \langle \Psi_n, \tilde{\Psi}_c^{BBK} \rangle_{D_{\mu,\nu}} = \langle \Psi_n, \Psi_c^{BBK} \rangle_{D_{\mu,\nu}}.$$

Таким образом, структура спектрального разложения в параболической области Ω_1^+ позволяет, согласно результатам работы [19], получить для функции $\tilde{\Psi}_c^{acc}$ (8) следующее выражение:

$$\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2p'_n} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \times$$

$$\times \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_n(\mathbf{P}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (19)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_1^+, \quad p'_n = \sqrt{E + \frac{c_1^2}{4n^2}}.$$

Напомним, что функция φ_n имеет вид

$$\varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = \exp\left(-\frac{|c_1|}{2n}x\right) L_{n-1}\left(\frac{|c_1|}{n}x \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle}{2}.$$

Выражение для ядра $R_n(\mathbf{P}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ в смысле сказанного выше определено в работе [19]. Для полноты изложения приведем полученные в [19] результаты и список использованных обозначений:

$$\tilde{R}_n(\mathbf{P}, t, \varphi, \hat{\mathbf{k}}') = \frac{\varpi_0^{(in)}(\mathbf{P})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib} \times$$

$$\times \text{ce}_{2l}(\varphi, s) Z^{in}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{k}}') + \frac{\varpi_0^{(out)}(\mathbf{P})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \times$$

$$\times \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib} \text{ce}_{2l}(\varphi, s) Z^{out}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (20)$$

Знак «тильда» в выражении для \tilde{R}_n отражает переход к сферическим координатам для векторной переменной \mathbf{p}'_n . Здесь использованы также обозначения

$$Z^{in(out)}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{k}}') = -\frac{N_c^{(1)}\Gamma(3+i\eta)}{k^{4+i\eta}} \times$$

$$\times \left[e^{\pi\eta/2} \langle \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{in(out)}(\mathbf{P}) \rangle \Phi\left(3+i\eta, 1, i\frac{|c_1|}{2k}(1 + \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}} \rangle)\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\pi\eta/2} H^{in(out)}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{k}}') \right],$$

где

$$H^{in(out)}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{k}}') \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{in,(out)}(\mathbf{P}) \rangle \times$$

$$\times \Phi\left(3+i\eta, 1, -i\frac{|c_1|}{2k}(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle)\right) s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}).$$

В выражении (20) $t = \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'_n \rangle$, переменная φ — угол между векторами $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{k}}]$ и $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'_n]$, отсчитываемый в положительном направлении при условии, что тройка векторов $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{k}}]$, $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'_n]$ и $\hat{\mathbf{p}}$ является положительно ориентированной,

$$\varpi_0^{in(out)}(\mathbf{P}) = B_0^{in(out)}(\mathbf{P}) \frac{|c_1|^3 E^{1+ib/2} e^{\pi b/2}}{2^5 \pi^2 A_0^{(2l)} \Gamma(1+ib)}.$$

Здесь b — параметр, $b = \eta^{eff} - \omega$, $\omega = \eta_2 + \eta_3$, η_j ($j = 1, 2, 3$) и η^{eff} — соответствующие параметры Зоммерфельда. Обозначение $\left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib}$ введено для обобщенной функции χ_+^λ [25]. Функция $\text{ce}_{2l}(\varphi, s)$ — функция Матье [26]:

$$\text{ce}_{2l}(\varphi, s) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2l)} \cos(2r\varphi), \quad (21)$$

коэффициенты разложения $A_{2r}^{(2l)}$ определяются рекуррентным образом согласно выражению (8.60) в [24], s — некоторый вещественный параметр.

Использованы также обозначения

$$B_0^{in}(\mathbf{P}) = A_0 \Gamma(-i\eta_2) \Gamma(-i\eta_3) e^{-\pi\omega/2} \times$$

$$\times (1 - e^{2\pi\eta_2})(1 - e^{2\pi\eta_3}) \times$$

$$\times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3},$$

$$\mathbf{L}_{in}(\mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\eta_2 \frac{\hat{\mathbf{k}}_2 - \hat{\mathbf{p}}}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\hat{\mathbf{k}}_3 + \hat{\mathbf{p}}}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right),$$

$$B_0^{out}(\mathbf{P}) = A_0 \Gamma(-i\eta_2) \Gamma(-i\eta_3) e^{-\pi\omega/2} \times \\ \times (1 - e^{2\pi\eta_2})(1 - e^{2\pi\eta_3}) \times \\ \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3},$$

$$\mathbf{L}_{out}(\mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\eta_2 \frac{\hat{\mathbf{k}}_2 + \hat{\mathbf{p}}}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\hat{\mathbf{k}}_3 - \hat{\mathbf{p}}}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right),$$

где $A_0 = -N_0^{(23)}/4\pi^2$. Постоянная $N_0^{(23)} = N_c^{(2)} N_c^{(3)}$ выражается через составляющие

$$N_c^{(j)} = (2\pi)^{-3/2} e^{-\pi\eta_j/2} \Gamma(1 + i\eta_j).$$

Подставляя выражение (20) с соответствующими обозначениями в представление (19) и выделяя основной вклад, согласно работам [9, 19] получаем

$$\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}}) \times \\ \times \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 (B_2 \ln n + B_1)} (8\pi n |c_1| t_n)^{-1/2} \times \\ \times \left(\frac{|c_1| t_n}{4} \right)^{-1/4} \left(1 - \frac{|c_1| t_n}{4} \right)^{-1/4} \times \\ \times \cos \left(2n \left[\arccos \sqrt{\frac{|c_1| t_n}{4}} - \sqrt{\frac{|c_1| t_n}{4}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{1 - \frac{|c_1| t_n}{4}} \right] \right) \quad (22)$$

в терминах обозначения $t_n = x/n^2$. Здесь B_1 и B_2 — вещественные постоянные. Функция $U(\mathbf{y}, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}})$ — гладкая функция своих аргументов. Мы не приводим здесь ее явное представление вследствие громоздкости выражения. Для изложения дальнейших результатов нам будет достаточно упомянутых выше свойств функции U . При построении выражения (22) нам нужна асимптотика полиномов Лагерра по переменной x при больших значениях индекса « n ». Как было показано в работе [22], вклад в асимптотику такого типа вносят четыре области изменения переменной x (в зависимости от соотношения величин x и n): окрестности нуля, область колебаний, переходная область и область монотонности. Отметим, что основной вклад в выражение (22) вносит область колебаний. В работе [9] было показано, что вклады областей окрестности нуля, переходной и монотонности являются лишь поправочными.

Выделим теперь, следуя результатам работы [9], асимптотику этого выражения.

4.4. Выделение асимптотики функции $\tilde{\Psi}_c^{acc}$

Сформулируем следующее утверждение: используя метод Пуассона, можно переписать выражение (22) в виде

$$\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{3/2}} \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^d ds \frac{\exp[iR\Phi_l^+(s)] + \exp[iR\Phi_l^-(s)]}{B_1 + B_2 \ln \left(\frac{R}{2\sqrt{s}} \right)} \times \\ \times \frac{\chi_d^\delta(s)}{(1-s)^{1/4}}, \quad R \equiv \sqrt{|c_1|x}, \quad x \gg 1. \quad (23)$$

Мы используем здесь обозначения

$$\Phi_l^\pm(s) \equiv \frac{\pi}{\sqrt{s}} \left(l + \frac{1}{2} \right) \pm \\ \pm \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\arccos(\sqrt{s}) - \sqrt{s(1-s)} \right), \quad (24)$$

функция $\chi_d^\delta(s)$ является срезающей функцией в круге радиуса δ с центром в точке $s = d$ в комплексной плоскости s . Выход с вещественной оси в комплексную плоскость s окажется эффективным в дальнейших вычислениях. Вещественные постоянные B_1, B_2 были определены в работе [9] при решении модельной задачи:

$$B_1 = -0.31, \quad B_2 = -0.67.$$

Уводя контур интегрирования по переменной s в верхнюю или нижнюю полуплоскость, нетрудно показать, что только слагаемые с $l = 0$ и $l = -1$ порождают ненулевой вклад в исходное выражение. Вклад остальных слагаемых оказывается экспоненциально малым. Это означает, что основной вклад в выражение (23) имеет вид

$$\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{4\sqrt{\pi}R^{5/2}} \hat{\Upsilon}(R) + \\ + U(\mathbf{y}, \mathbf{P}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{4\sqrt{\pi}R^{5/2}} \hat{\Upsilon}^*(R), \quad (25)$$

где

$$\hat{\Upsilon}(R) \equiv -ie^{2iR} \int_0^\infty \frac{dt e^{-t/3}}{C(R) - D \ln t} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right). \quad (26)$$

Здесь использовано обозначение

$$C(R) = B_1 + \frac{3}{2} B_2 \ln R - B_2 \ln 2 + iB_2 \frac{\pi}{4}, \\ D = \frac{1}{2} B_2. \quad (27)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в областях типа (11) конфигурационного пространства, в которых справедливо почти разделение переменных в окрестностях экранов σ при $y \gg x$ (где y и x — якобиевы переменные, отвечающие выделенной парной подсистеме с потенциалом кулоновского притяжения), полный вклад парных состояний дискретного спектра в трехчастичную собственную функцию непрерывного спектра имеет вид

$$\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = U(y, \mathbf{P}, -\hat{x}) \frac{\sin(2R)}{2\sqrt{\pi}R^{5/2}} \times \int_0^\infty \frac{dt e^{-t/3}}{C(R) - D \ln t} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right). \quad (28)$$

Проводя дальнейшие упрощения, получим

$$\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} U(y, \mathbf{P}, -\hat{x}) \times \frac{\sin(2\sqrt{|c_1|x})}{C(\sqrt{|c_1|x}) (|c_1|x)^{5/4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln(|c_1|x)}\right) \right) \quad (29)$$

в области, ограниченной соотношением

$$1 \ll x \leq \frac{4(N+1)^2}{|c_1|}, \quad N \gg 1, \quad y^\mu < x < y^\nu, \quad \frac{1}{2} < \mu < \nu < 1, \quad (30)$$

Соотношение (30) позволяет установить ограничения на величину параметра N . Заменяя величину x на y^ν и помня, что гиперрадиус системы

$$\rho = y \left(1 + O\left(\frac{x^2}{2y^2}\right) \right),$$

получаем искомое ограничение

$$N \geq \frac{\sqrt{|c_1|}}{2} \rho^{\nu/2}. \quad (31)$$

Отметим, что чем больше парных состояний будет учтено явно в сумме (5) (т. е. с ростом параметра N), тем более широкой будет область применимости выражения (29). При этом само выражение (29) окажется старшим порядком асимптотики при больших значениях координаты x , а область применимости асимптотики с ростом N будет смещаться в область больших значений x . С другой стороны, структура асимптотики (29) не зависит явно от параметра обрезания ряда N и является, таким образом, координатной асимптотикой по переменной x (отвечающей полному кулоновскому дискретному спектру оператора Шредингера подсистемы $\alpha = 1$) в асимптотической области Ω_1^+ . Отметим, что вклад непрерывного спектра парной подсистемы с индексом $\alpha = 1$ в

области Ω_1^+ описывается независимо (вследствие ортогональности вкладов дискретного и непрерывного спектров в спектральном разложении) методами работ [17, 20].

Отметим также осцилляторный характер и медленное степенное убывание на бесконечности полученного выражения, что делает необходимым учет данного асимптотического вклада на фоне экспоненциально убывающих явно учтенных членов суммы (5).

4.5. Положение $\tilde{\Psi}_c^{acc}$ в иерархии асимптотических вкладов

Необходимо сказать несколько слов о месте полученного выражения $\tilde{\Psi}_c^{acc}$ в иерархии вкладов различной природы, представляющих асимптотику решения типа искаженной плоской волны в области Ω_1^+ , а точнее — в переходной области $D_{\mu,\nu}^1$ (12). Напомним, что область $D_{\mu,\nu}^1$ характеризуется следующим соотношением координат Якоби:

$$y \gg 1, \quad 1 \ll x \ll y, \quad y^\mu < x < y^\nu, \quad \frac{1}{2} < \mu < \nu < 1. \quad (32)$$

Асимптотика решения в этой области описывается выражением (15). Вклад непрерывного спектра оператора Шредингера (16) парной подсистемы (первое слагаемое в выражении (15)) является старшим. Как уже было упомянуто выше, этот вклад описан, например, в работах [17, 20]. Для его выделения рассматривалась слабая асимптотика приближенного решения по большой переменной y . При этом для согласования слабых асимптотик решений Ψ_c^{BBK} и Ψ^{sep} оказывалось достаточным фиксировать коэффициенты порядка $1/y$ и порядка x/y^2 , пренебрегая членом следующего порядка малости $1/y^2$.

Полученные нами выражения (28), (29) для $\tilde{\Psi}_c^{acc}$ также записываются в виде слабой асимптотики по большой переменной y . Одновременно это выражение отвечает асимптотике по второй, подчиненной, координате Якоби x второго слагаемого в выражении (15). Тем самым оно отражает вклад в асимптотику трехчастичного состояния типа искаженной плоской волны спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра выделенной парной подсистемы. Определим переходную область $D_{\mu,\nu}^1$ более точно:

$$\frac{1}{2} < \nu < \frac{4}{5}.$$

В этом случае, согласно выражению (29), мы фиксируем коэффициент в слабой асимптотике по y , убывающей как

$$\frac{1}{y^2} < \frac{1}{yx^{5/4}} < \frac{1}{y^{13/8}}.$$

Таким образом, найденный нами асимптотический вклад $\tilde{\Psi}_c^{acc}$ является всюду в области $D_{\mu,\nu}^1$ поправочным по отношению ко вкладу непрерывного спектра оператора Шредингера парной подсистемы, но старшим по отношению к членам, которыми мы пренебрегли в процедуре согласования асимптотик.

Отметим, что при выходе из области $D_{\mu,\nu}^1$ в область Ω_{BBK} вклад выражения $\tilde{\Psi}_c^{acc}$ становится пренебрежимо малым.

4.6. Формулировка результата

Мы выделили асимптотику по переменной x разложения решения (ведущего себя в области Ω_{BBK} , как искаженная шестимерная плоская волна Ψ_c^{BBK}) по состояниям дискретного спектра парной подсистемы в области Ω_1^+ .

Таким образом, полное представление решения типа Ψ_c^{BBK} , продолженного из области Ω_{BBK} в область Ω_1^+ , состоит из трех вкладов. Первый вклад отвечает непрерывному спектру парной подсистемы $\alpha = 1$ (первое интегральное слагаемое в представлении (15)). Второй вклад представляет собой конечный набор интегральных слагаемых, отвечающих разложению по состояниям дискретного спектра подсистемы с главными квантовыми числами $n = 1, 2, \dots, N_1$ (суммирование по конечному набору значений главного квантового числа n во втором слагаемом в представлении (15)). Третий вклад (суммирование по оставшемуся бесконечному набору значений главного квантового числа n во втором слагаемом в представлении (15)) отвечает разложению по бесконечному набору состояний дискретного спектра подсистемы с главными квантовыми числами $n > N_1$ (описан в выражении (29)). Как уже говорилось выше, структура первого вклада (непрерывный спектр парной подсистемы) была подробно исследована в работах [15, 17].

Рассмотрим слабую асимптотику решения уравнения Шредингера (1) типа искаженной шестимерной плоской волны Ψ_c , определенного в области Ω_{BBK} как Ψ_c^{BBK} и продолженного в область Ω_1^+ как Ψ^{sep} . Для этого проинтегрируем функцию Ψ_c с некоторой гладкой функцией $a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$ по пятимерной сфере. В области Ω_{BBK} получим следующее выражение:

$$\int_{\mathbb{S}^5} d\tau \Psi_c(\mathbf{X}, \mathbf{P}') a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}') = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}' \times \\ \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \Psi_c(\mathbf{X}, \mathbf{P}') a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}'), \quad X \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Мы использовали здесь обозначение $\psi = \arctg(k'/p')$. Выражение (33) содержит интеграл по всем допустимым состояниям шестимерного импульса \mathbf{P}' , $P'^2 = k'^2 + p'^2 = E$, отвечающим искаженной плоской волне в асимптотической области Ω_{BBK} , где $\Psi_c \sim \Psi_c^{BBK}$. Такой интеграл порождает в асимптотической области Ω_{BBK} в старшем порядке суперпозицию расходящейся и сходящейся шестимерных волн с гладкими амплитудами, вид которых определяется видом функции $a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$:

$$\int_{\mathbb{S}^5} d\tau \Psi_c^{BBK}(\mathbf{X}, \mathbf{P}') a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')|_{\Omega_{BBK}} \sim \\ \sim \tilde{A}_+(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{\exp[i\sqrt{E}X + iW_0(\mathbf{X}, \mathbf{P})]}{X^{5/2}} + \\ + \tilde{A}_-(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{\exp[-i\sqrt{E}X - iW_0(\mathbf{X}, \mathbf{P})]}{X^{5/2}}. \quad (34)$$

Мы используем при интегрировании метод стационарной фазы. Асимптотика вырожденных гипергеометрических функций в выражении для Ψ_c^{BBK} порождает лишь логарифмическую поправку к главному линейному члену $\langle \mathbf{P}', \mathbf{X} \rangle$ с большим параметром X . Поэтому основной вклад в интеграл (34) дает стационарная точка $\psi_0 = \arcsin(x/X)$.

В промежуточной области $D_{\mu,\nu}^1$, определенной в выражении (12), справедливо (со сколь угодно хорошей точностью) приближенное равенство

$$\Psi_c^{BBK}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \times \\ \times \delta(k'^2 + p'^2 - E) R_c(\mathbf{P}, \mathbf{P}') + \sum_{n=1}^{N_1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta\left(p'^2 - \frac{c_1^2}{4n^2} - E\right) \times \\ \times R_n(\mathbf{P}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}') + \tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \quad (35)$$

где функция $\tilde{\Psi}_c^{acc}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ определена в выражении (29).

Подставим теперь правую часть равенства (35) в представление (34), сохраняя в полученной слабой асимптотике лишь расходящуюся волну. Получим равенство

$$\begin{aligned} \tilde{A}_+(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{\exp \left[i\sqrt{E}X + iW_0(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \right]}{X^{5/2}} &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(k'^2 + p'^2 - E) B_c^+(\mathbf{P}, \mathbf{P}') + \\ + \sum_{n=1}^{N_1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_c^{eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \times \\ \times \delta \left(p'^2 - \frac{c_1^2}{4n^2} - E \right) B_n^+(\mathbf{P}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}') + \\ + \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sin(2\sqrt{|c_1|x})}{C(\sqrt{|c_1|x})(|c_1|x)^{5/4}} \times \\ \times \int_{\mathbb{S}^5} d\tau U^{out}(\mathbf{y}, P\hat{\mathbf{P}}'', -\hat{\mathbf{x}}) a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}''). \quad (36) \end{aligned}$$

Мы используем обозначения

$$B_c^+(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \int_{\mathbb{S}^5} d\tau R_c^{out}(P\hat{\mathbf{P}}'', \mathbf{P}') a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}''),$$

$$B_n^+(\mathbf{P}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}') = \int_{\mathbb{S}^5} d\tau R_n^{out}(P\hat{\mathbf{P}}'', \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}') a_1^{acc}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}'').$$

Таким образом, согласно выражению (36), расходящаяся искаженная шестимерная волна с произвольной гладкой амплитудой представима в области $D_{\mu,\nu}^1$ в виде разложения по конечному базису со сколь угодно хорошей точностью. Поскольку структура базиса не меняется при переходе к слабым асимптотикам, продолжение внутрь области Ω_1^+ осуществляется автоматически.

На основании сказанного можно сделать вывод, что состояние $\tilde{\Psi}_{c,1}^{acc}$ (29) по структуре совпадает с определенным выше в (5) выражением для $\Psi_{c,1}^{acc}$.

Таким образом, основной результат вспомогательной задачи получен.

4.7. Обсуждение

Акцентируем внимание на особенностях полученного результата. Частично эти особенности уже обсуждались выше. Выражение (28) возникло в процессе согласования двух приближенных решений уравнения Шредингера. Однако одно из этих решений (Ψ_c^{BBK} — решение типа искаженной плоской волны) может уточняться, например, согласно процедуре, предложенной в работе [23]. Короткодействующая поправка к потенциалу в асимптотических областях Ω_α^+ может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, описанная выше процедура позволяет продолжить собственные функции

абсолютно непрерывного спектра типа искаженных плоских волн (а также их слабые асимптотики) из асимптотической области конфигурационного пространства Ω_{BBK} (10) в асимптотические области вида Ω_α^+ (11).

В случае, когда в паре с индексом « α » кулоновский потенциал является притягивающим, выше изложена процедура описания вклада дискретного кулоновского спектра парной подсистемы в асимптотику продолжения искаженных плоских волн (шестимерных расходящихся искаженных волн) в область Ω_α^+ . Процедура описания вклада непрерывного кулоновского спектра парной подсистемы в асимптотику продолжения искаженных плоских волн (искаженных расходящихся волн) в область Ω_α^+ была дана в работах [15, 17]. В случае, когда индекс « α » соответствует паре одноименно заряженных частиц (случай кулоновского отталкивания), очевидно, нужно воспользоваться лишь процедурой описания вклада непрерывного спектра.

Наиболее важным сейчас для нас является тот факт, что при описании процедуры построения вклада дискретного спектра парной подсистемы в асимптотику продолжения искаженных расходящихся волн в области Ω_α^+ выделяется совокупный вклад парных высоковозбужденных состояний (эффективное состояние) и тем самым полный базис состояний оказывается конечным. Размерность такого эффективного базиса также обсуждалась выше.

Ниже излагается пример возможного приложения описанной выше процедуры к численным расчетам характеристик физической системы.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ

Для приложения метода к численным расчетам мы вернемся к асимптотическим граничным условиям (2), понимая их в смысле изложенного выше. Приведем еще одно замечание, которое касается первого слагаемого в выражении (2), отвечающего начальному состоянию. Будем в дальнейшем считать, что плотность $a_{l\sigma}^0(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$ является известной функцией и тем самым начальное состояние системы определено.

Перейдем к построению системы связей между плотностями $a_{n\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$ и амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$.

5.1. Построение уравнений для неизвестных плотностей $a_{n\alpha}$

Из соображений удобства введем следующую систему обозначений:

$$\psi_{n\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) = \exp [i\langle \mathbf{p}_{n\alpha}, \mathbf{y}_\alpha \rangle + iw_{n\alpha}(\mathbf{y}_\alpha, p_{n\alpha})] \times \varphi_{n\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}_{n\alpha}),$$

$$\tilde{\psi}_{n\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) = \psi_{n\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha)\zeta(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Здесь функция $\zeta(\rho) \in C^2_{[0, \infty)}$ является так называемой срезающей функцией гиперрадиуса ρ и определяется следующим образом:

$$\zeta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_1 - \varepsilon, \\ \text{монотонно возрастает при} & \\ \rho_1 - \varepsilon \leq \rho \leq \rho_2 + \varepsilon, & \\ 1 & \text{при } \rho_2 + \varepsilon \leq \rho \leq \infty. \end{cases} \quad (37)$$

Здесь $1 \ll \rho_1 < \rho_2 < \infty, 0 < \varepsilon < 1$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} (H - E)\Psi &= 0, \\ (H - E)\tilde{\psi}^*_{m\alpha} &= -Q_{m\alpha}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $Q_{m\alpha}$ — невязка функции $\tilde{\psi}^*_{m\alpha}$, определенной выше. Домножим первое уравнение системы (38) на функцию $\tilde{\psi}^*_{m\alpha}$, а второе — на функцию Ψ и вычтем первое уравнение из второго. Проинтегрируем полученное равенство в шестимерном шаре большого радиуса ρ (область D). Воспользовавшись формулой Грина, придем к уравнению

$$\int_{\partial D} \left(\tilde{\psi}^*_{m\alpha} \frac{\partial}{\partial n} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\psi}^*_{m\alpha} \right) d\tau = - \int_D Q_{m\alpha} \Psi d\mathbf{X}. \quad (39)$$

Повторив проведенную процедуру в случае $m = 1, 2, \dots, N_\alpha + 1$, получим систему $N_\alpha + 1$ уравнений вида (39). Отметим, что в смысле сказанного мы рассматриваем в качестве базисной функции с индексом $N_\alpha + 1$ эффективное состояние, определенное выше:

$$\psi_{N_\alpha+1\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \equiv \Psi^{acc}_{c\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha).$$

Отметим также, что интеграл по ∂D является интегралом по границе области D , т.е. интегралом по поверхности пятимерной сферы радиуса ρ . Оператор $\partial/\partial n$ является оператором дифференцирования по нормали к поверхности интегрирования. В

этом смысле мы можем заменить оператор $\partial/\partial n$ оператором $\partial/\partial X$.

Положим вначале $\alpha \neq \sigma$. Подставляя представление (2) в уравнение (39), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_\alpha+1} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}') \int_{\partial D} d\tau \times \\ & \times \left[\tilde{\psi}^*_{m\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \psi_{j\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}'_\alpha) - \psi_{j\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}'_\alpha) \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\psi}^*_{m\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \right] + \int_{\partial D} d\tau A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \times \\ & \times \left\{ \tilde{\psi}^*_{m\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(i\sqrt{E}X + iW_0)}{X^{5/2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\exp(i\sqrt{E}X + iW_0)}{X^{5/2}} \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\psi}^*_{m\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \right\} = \\ & = - \int_D d\mathbf{X} A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{\exp(i\sqrt{E}X + iW_0)}{X^{5/2}} Q_{m\alpha}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - \\ & \quad - \sum_{j=1}^{N_\alpha+1} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}') \times \\ & \quad \times \int_D d\mathbf{X} Q_{m\alpha}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \psi_{j\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}'_\alpha). \quad (40) \end{aligned}$$

Напомним, что расходящаяся шестимерная искаженная волна должна быть модифицирована с помощью замены (4) в областях Ω^+_x , как уже было отмечено выше.

Полагая $m = 1, 2, \dots, N_\alpha + 1$, получим систему $N_\alpha + 1$ тождеств вида (40). Будем рассматривать систему тождеств (40) как систему уравнений относительно плотностей $a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}')$, $j = 1, 2, \dots, N_\alpha + 1$. Отметим, что полученная система уравнений может рассматриваться как матричное уравнение Фредгольма второго рода с компактным ядром, что позволяет доказать существование и единственность решения.

Простые вычисления показывают, что элементарная площадь поверхности пятимерной сферы радиуса ρ имеет вид

$$d\tau = \rho^5 \cos^2 \omega \sin^2 \omega \sin \theta_x \times \sin \theta_y d\omega d\theta_x d\varphi_x d\theta_y d\varphi_y. \quad (41)$$

Здесь пары переменных θ_x, φ_x и θ_y, φ_y являются угловыми переменными, определяющими положение

точки на двумерных сферах радиусов соответственно x_α и y_α . Здесь введены также обозначения

$$x_\alpha = \rho \sin \omega, \quad y_\alpha = \rho \cos \omega, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что все слагаемые в первой сумме уравнения (40) экспоненциально убывают по переменной \mathbf{x}_α , переменная $\rho \gg 1$. Это ведет к существенным упрощениям в старшем порядке выражений:

$$0 \leq \omega \leq \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\dots) \sim \langle \nabla(\dots), \hat{\mathbf{y}} \rangle. \quad (42)$$

Проинтегрируем первые два слагаемых в левой части уравнения (40) по $d\hat{\mathbf{p}}'_\alpha$, принимая в расчет сказанное выше:

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{j=1}^{N_\alpha+1} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{P}}' a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}') \int_{\partial D} d\tau \times \\ &\times \left[\tilde{\psi}_{m\alpha}^*(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \psi_{j\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}'_\alpha) - \right. \\ &\left. - \psi_{j\alpha}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}'_\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\psi}_{m\alpha}^*(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha) \right] \sim \\ &\sim \sum_{j=1}^{N_\alpha+1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha} \frac{2\pi}{\rho} \left(1 + \frac{p_{m\alpha}}{p'_{j\alpha}} \right) \times \\ &\times \int_{\partial D} d\tau \varphi_{j\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}) \varphi_{m\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}_{m\alpha}) a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha) \times \\ &\times \exp \{ i(p'_{j\alpha} y_\alpha - \langle \mathbf{p}_{m\alpha}, \mathbf{y}_\alpha \rangle) \} \times \\ &\times \exp \{ i[w_{j\alpha}(\mathbf{y}_\alpha, p'_{j\alpha}) - w_{m\alpha}(\mathbf{y}_\alpha, p_{m\alpha})] \}. \quad (43) \end{aligned}$$

Анализ интеграла по $d\tau$ в \mathbb{S}^5 проведем с помощью представления (41), заменяя в старшем порядке $\sin \omega \sim \omega$, $\cos \omega \sim 1$, при условии $\varepsilon \rho \gg 1$ (42).

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv \int_{\partial D} d\tau \varphi_{j\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}) \varphi_{m\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \hat{\mathbf{k}}_{m\alpha}) \times \\ &\times a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha) \exp [i(p'_{j\alpha} y_\alpha - \langle \mathbf{p}_{m\alpha}, \mathbf{y}_\alpha \rangle)] \times \\ &\times \exp \{ i[w_{j\alpha}(\mathbf{y}_\alpha, p'_{j\alpha}) - w_{m\alpha}(\mathbf{y}_\alpha, p_{m\alpha})] \} \sim \\ &\sim \rho^5 \int_0^\varepsilon \omega^2 d\omega \int_{\mathbb{S}^2} d\phi_x \sin \theta_x d\theta_x \times \\ &\times \int_{\mathbb{S}^2} d\phi_y \sin \theta_y d\theta_y \varphi_{j\alpha}(\rho \omega \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}) \times \\ &\times \varphi_{m\alpha}(\rho \omega \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}_{m\alpha}) a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha) \times \\ &\times \exp (i(\rho p'_{j\alpha} - \rho \langle \mathbf{p}_{m\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha \rangle)) \times \\ &\times \exp \{ i[w_{j\alpha}(\rho, p'_{j\alpha}) - w_{m\alpha}(\rho, p_{m\alpha})] \}. \quad (44) \end{aligned}$$

После замены переменной $t = \rho \omega$ и удобного в данном случае переобозначения $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{\mathbf{x}}$ выражение (44) факторизуется следующим образом:

$$\Sigma \sim \rho^2 \Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)}. \quad (45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)} &\equiv \int_0^\infty t^2 dt \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{t}} \exp \left(-\frac{t}{2j} |c_\alpha| \right) \times \\ &\times \exp \left(-\frac{t}{2m} |c_\alpha| \right) L_{j-1} \left(\frac{t|c_\alpha|}{2j} (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}, \hat{\mathbf{t}} \rangle) \right) \times \\ &\times L_{m-1} \left(\frac{t|c_\alpha|}{2m} (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_{m\alpha}, \hat{\mathbf{t}} \rangle) \right), \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)} &\equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{y}} a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha) \times \\ &\times \exp [i(\rho p'_{j\alpha} - \rho \langle \mathbf{p}_{m\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha \rangle)] \times \\ &\times \exp \{ i[w_{j\alpha}(\rho, p'_{j\alpha}) - w_{m\alpha}(\rho, p_{m\alpha})] \}. \quad (47) \end{aligned}$$

Заметим, что интегралы $\Sigma^{(1)}$ (46) являются соотношением ортогональности по индексам « j » и « m » как интегралы от произведения собственных функций дискретного спектра парного кулоновского оператора Шредингера, отвечающих различным главным квантовым числам. Это свойство подробно обсуждалось в работе [19]. Как было показано в работах [9, 19], при больших значениях индекса « m » (или « j ») ортогональность асимптотически выполняется и по направлению. Таким образом, при $m \gg 1$ или (и) $j \gg 1$

$$\Sigma^{(1)} \sim C_m \delta_{mj} \delta(\hat{\mathbf{k}}'_{m\alpha} - \hat{\mathbf{k}}_{m\alpha}), \quad (48)$$

где C_m — некоторая постоянная, зависящая от главного квантового числа и приведенная в работе [19]. Интеграл (47) описывается методом стационарной фазы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)} &\sim \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{y}} \exp [i(\rho p'_{j\alpha} - \rho \langle \mathbf{p}_{m\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha \rangle)] \times \\ &\times \exp \{ i[w_{j\alpha}(\rho, p'_{j\alpha}) - w_{m\alpha}(\rho, p_{m\alpha})] \} \times \\ &\times a_{j\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{k}}'_{j\alpha}, \hat{\mathbf{y}}_\alpha)|_{j=m} \sim \\ &\sim \frac{2\pi i}{p_{m\alpha} \rho} a_{m\alpha}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{k}}'_{m\alpha}, \hat{\mathbf{p}}_{m\alpha}). \quad (49) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (48) и (49) в выражение (43) для Ξ , получаем

$$\Xi \sim \frac{8\pi^2}{\sqrt{E}} i C_m a_{m\alpha}(\hat{\mathbf{P}}_\alpha, \hat{\mathbf{P}}_\alpha), \quad (50)$$

что определяет асимптотически (по номеру главного квантового числа) диагональную структуру оператора в уравнении (40), если рассматривать это равенство как уравнение относительно плотностей $a_{m\alpha}(\hat{\mathbf{P}}_\alpha, \hat{\mathbf{P}}_\alpha)$, $m = 1, 2, \dots, N_\alpha + 1$, $N_\alpha \gg 1$. Нетрудно показать, например, аналогично тому, как это было продемонстрировано в (41)–(50) для первого слагаемого в левой части (40), что при $\rho \rightarrow \infty$ остальные слагаемые уравнения (40) в старшем порядке также не зависят от ρ .

Возвращаясь к системе уравнений (40) для векторной функции

$$\hat{\mathbf{a}}_\alpha = \begin{pmatrix} a_{1\alpha} \\ a_{2\alpha} \\ \dots \\ a_{N_\alpha+1\alpha} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

получим уравнение следующего вида:

$$\hat{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{B}_\alpha \hat{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{S}_\alpha. \quad (52)$$

Здесь \mathbf{B}_α — ограниченный матрично-значный интегральный оператор с размерностью матрицы $(N_\alpha + 1) \times (N_\alpha + 1)$. Матричные элементы этого оператора являются интегральными операторами с ядрами, заданными на пятимерной сфере (на компактном носителе), а \mathbf{S}_α — неоднородный член. Полученное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Описанные выше свойства ядер гарантируют существование и единственность решения этого уравнения.

Отметим, что при $\alpha = \sigma$ уравнение (40), а следовательно, и уравнение (52) будут содержать дополнительные члены, отвечающие вкладу начального состояния. Однако принципиально структура уравнения типа (52) меняться не будет.

Совокупность интегральных уравнений вида (52) при $\alpha = \sigma$ и $\alpha = \beta \neq \sigma$ позволяет установить связь между вектор-функцией $\hat{\mathbf{a}}_{\alpha(\beta)}$ (51) и амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ рассеяния $2 \rightarrow 3$. Здесь индексы « σ » и « β » нумеруют две возможные парные подсистемы с кулоновскими потенциалами притяжения.

Запишем решение уравнения (52) как

$$\hat{\mathbf{a}}_\alpha = \hat{\Lambda}_\alpha A, \quad (53)$$

где оператор $\hat{\Lambda}_\alpha$ действует как матрично-значный интегральный оператор на единичной сфере \mathbb{S}_X^5 . При этом, как было упомянуто выше, мы различаем случаи $\alpha = \sigma$ и $\alpha = \beta \neq \sigma$.

6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$

Проведем итеративную самосогласованную процедуру построения решения задачи рассеяния. Эта процедура содержит несколько шагов.

6.1. Первое приближение

В качестве первого приближения зададим полное распределение плотностей $a_{j\alpha}(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ и $a_{j\sigma}(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ следующим образом:

$$a_{j\alpha} = 0, \quad \alpha \neq \sigma, \quad 1 \leq j \leq N_\alpha + 1, \quad (54)$$

$$a_{j\sigma} = 0, \quad 1 \leq j \leq N_\beta + 1, \quad j \neq l; \quad a_{l\sigma} = a_{l\sigma}^0, \quad (55)$$

где плотность $a_{l\sigma}^0$ соответствует фиксированной плотности падающей волны, описанной в уравнении (2).

Определив полный набор плотностей, мы, таким образом, фиксируем в первом приближении полный набор амплитуд рассеяния процессов $2 \rightarrow 2$ в выражениях для $\Psi^{(0)}$ (2) и $\Psi^{(02)}$ (5).

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\Psi = \chi + \varphi. \quad (56)$$

Здесь первое слагаемое χ содержит асимптотику всех возможных парных каналов рассеяния на бесконечности в конфигурационном пространстве:

$$\chi = \zeta(\rho) \left(\Psi^{(0)} + \Psi^{(02)} \right). \quad (57)$$

Срезающая функция $\zeta(\rho)$ описана в уравнении (37). Функция φ , как следует из уравнения (56), является дополнением определенной выше функции χ до точного решения Ψ задачи рассеяния. Согласно приведенному в (2) анзацу, асимптотика φ на бесконечности совпадает с асимптотикой расходящейся шестимерной сферической волны и тем самым с выражением для $\Psi^{(03)}$ (2). Поскольку параметры ρ_1, ρ_2 срезающей функции ζ велики, выражение для $\Psi^{(02)}$ закономерно является асимптотическим (2). Следовательно, выражение для χ (57) полностью определено.

Построим теперь граничную задачу в шестимерном шаре большого радиуса ρ :

$$\begin{aligned} (H - E)\varphi &= -Q, \quad X \leq \rho, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - i \left(\sqrt{E} - \frac{1}{2\sqrt{E}} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{x_\alpha} \right] \right) \varphi|_{X=\rho} &= \\ &= O(\rho^{-7/2}), \quad \mathbf{X} \notin (\mathbb{S}_\rho^5 \cap \Omega_\gamma^+), \quad \gamma = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь функция Q — невязка выражения χ ,

$$Q \equiv (H - E)\chi.$$

Граничное условие типа условия излучения, заданное на пятимерной сфере радиуса ρ , должно модифицироваться внутри каждой из параболических областей Ω_γ^+ (11), т. е. на поверхностях

$$S_\rho^5 \cap \Omega_\gamma^+, \quad \gamma = 1, 2, 3,$$

в соответствии с результатами работ [15, 17].

Техника решения граничной задачи такого типа успешно использовалась, хотя и в более простом случае задачи рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами, в работах [27, 28].

Решение граничной задачи (58) порождает следующий шаг итеративной процедуры, поскольку позволяет выделить амплитуду развала $2 \rightarrow 3$ $A(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ в соответствии с соотношением

$$\Psi^{(03)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \quad X \gg 1. \quad (59)$$

Выражение для $\Psi^{(03)}$ было определено ранее в уравнении (2).

6.2. Коррекция решения

Вернемся теперь к описанной выше процедуре, основанной на многомерной формуле Грина и ведущей к построению системы уравнений (52). Отметим, что в соответствии с решением граничной задачи (58) и уравнением (59) свободный член \mathbf{S}_α , ($\alpha \neq \sigma$, $\alpha = \sigma$) системы уравнений (52) на данном шаге меняется. Решая систему уравнений (52) для скорректированного свободного члена $\mathbf{S}_\alpha^{(1)}$ ($\alpha \neq \sigma$, $\alpha = \sigma$), мы получим новый набор плотностей \hat{a}_α ($\alpha \neq \sigma$, $\alpha = \sigma$). Этот шаг позволяет скорректировать слагаемое Ψ^{02} в уравнении (2) в соответствии с уравнением (5). Это, в свою очередь, позволяет определить новое приближение для функции $\chi = \chi^{(1)}$ в соответствии с уравнением (57).

Вновь повторяя процедуру решения граничной задачи (58), мы приходим к новому приближению для расходящейся волны $\varphi^{(1)}$.

Отметим, что в основе изложенной выше процедуры лежит вариационный подход, связанный с перераспределением плотности вероятности обнаружения системы частиц в некотором состоянии между всеми возможными процессами рассеяния, учитываемыми с контролируемой точностью. Эта вероятностная трактовка задачи и определяет сходимость изложенной выше процедуры. Число ша-

гов итеративной процедуры определяет также точность полученного результата.

7. ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложенные в работе методы позволяют свести задачу рассеяния трех заряженных квантовых частиц (при наличии парных кулоновских потенциалов притяжения) при энергии выше порога развала для процессов $2 \rightarrow 2(3)$ к модельной задаче с конечным числом асимптотических каналов рассеяния. При этом в каждой парной подсистеме α , отвечающей кулоновскому потенциалу притяжения, состояния с главным квантовым числом меньше $N_\alpha \gg 1$ учитываются явно. Вклад остальных высоковозбужденных состояний заменяется некоторым эффективным состоянием. Это эффективное состояние строится на основе выражений (28)–(30), полученных в ходе решения вспомогательной задачи рассеяния $3 \rightarrow 2(3)$, с учетом преобразования (36). Величина параметра N_α определяется условием (31). Такая редукция заведомо бесконечномерной задачи к конечномерной модели является новой и позволяет естественным образом контролировать точность вычислений.

Предложенный метод, идейно близкий методу локального поля Фока, основан на согласовании приближенных решений уравнения Шредингера Ψ_c^{BBK} и Ψ^{sep} в области $D_{\mu,\nu}$, в которой оба эти решения справедливы. Особо отметим, что оба приближенных решения допускают процедуру уточнения. Для решения типа Ψ_c^{BBK} такая процедура подробно описана в работе [23]. Для решения типа Ψ^{sep} процедура уточнения связана с учетом поправочного потенциала вида

$$V_{corr} = C \frac{x}{y^2}.$$

С одной стороны, наличие такого потенциала в представлении (13) разрушает процедуру деления переменных в редуцированном операторе Шредингера. Однако данный потенциал является в области Ω_α^+ лишь поправочным к главной части оператора, допускающей деление переменных. Таким образом, учет потенциала V_{corr} приводит лишь к возникновению медленно меняющегося дополнительного слагаемого в фазовой функции. Такое слагаемое оказывается решением некоторого аналога градиентного уравнения и может быть найдено обычным методом характеристик в асимптотической области конфигурационного пространства Ω_α^+ . Добавим, что учет

потенциала V_{corr} в структуре, например, эффективного состояния должен строиться на основе двухмасштабных разложений ($x \gg 1$, $y \gg 1$, $y \gg x$).

Отметим также, что учет спиновых степеней свободы и, например, аннигиляционного канала рассеяния не влияет на полученные в работе результаты, касающиеся структуры состояния Ψ_c^{ass} . Причина этого заключается именно в том, что речь в этом случае идет о дополнительных степенях свободы системы, усложнении матричной структуры полного решения, но не сказывается на структуре асимптотики пространственных степеней свободы решения.

Отметим также, что предложенный нами метод может быть непосредственно применен для вычисления наблюдаемых в задачах квантового рассеяния в системах нескольких частиц при энергиях выше порога развала. Нам представляется, что метод был бы особенно эффективен при низких и ультранизких энергиях. Возможно, например, изучение задачи рассеяния электрона на электрон-позитронной паре. Рассмотрение систем частиц разных масс должно повлечь несущественные технические изменения в уравнениях.

Рассмотрим одну из возможных областей применения предложенного метода.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА В АНТИПРОТОННОЙ ФИЗИКЕ

Техника антипротонных экспериментов активно развивается уже несколько десятков лет. В настоящее время антиводородные атомы достаточно легко формируются на Антипротонном деселераторном комплексе в CERN [29]. Деселераторный комплекс проводил в последнее время несколько экспериментов, направленных на высокоточные измерения физических свойств антиводородного атома для проверки комбинированной СРТ-симметрии и первого прямого измерения эффекта действия гравитационных сил на антиматерию.

Тем не менее описание результатов эксперимента не всегда однозначно. Построение адекватных моделей, охватывающих все стороны проводимых исследований, также остается незавершенным, что безусловно связано со сложностью протекающих процессов. В ходе эксперимента антиатомы или же захватываются в магнитных полях [30], или формируют пучок, который извлекается из области формирования в почти свободную среду [31]. В обоих случаях требуются антиводородные атомы в основном состоянии для того, чтобы выполнить необходимые

измерения. Они, однако, формируются в большинстве случаев в высоковозбужденных состояниях.

В самом деле, основные механизмы формирования антипротонных атомов — так называемая трехчастичная рекомбинация, в процессе которой принимают участие два позитрона и антипротон (дополнительный позитрон уносит излишек энергии), и так называемая перезарядка, в процессе которой позитроний Ps (связанное состояние электрона и позитрона) в возбужденном состоянии передает свой положительный заряд антипротону, а оставшийся электрон уносит излишек энергии. Первый механизм является почти непрерывным процессом, который имеет место, пока позитронная и антипротонная плазмы поддерживаются в процессе взаимодействия (обычно несколько сотен миллисекунд [31]), и порождает широкое распределение высоковозбужденных ридберговских атомов на всех подуровнях [32]. Механизм перезарядки может приводить к импульсному формированию атомов позитрония, контролируемому временем лазерного возбуждения. При механизме перезарядки распределение главного квантового числа n формируемых атомов антиводорода частично определяется распределением главного квантового числа атомов позитрония. Типичные экспериментальные величины $n \sim 30$ [33, 34], но с широким распределением подуровней.

В итоге оба процесса формируют высоковозбужденные антиатомы с широким распределением всех (l, m) угловых моментов. Наиболее заселенными при этом являются состояния с высокими значениями главного квантового числа n . Более точные характеристики распределения оказываются важными для предсказания дальнейшего хода эксперимента, в частности, для оценок времени жизни антиатомов до перехода в основное состояние в зависимости (в случае процессов перезарядки) от значения главного квантового числа, отвечающего исходному состоянию позитрония Ps.

Отметим, что развитие в данной работе методы расчета характеристик трехчастичного рассеяния заряженных частиц позволяют точно (в рамках описанной точности модели) предсказать заселенность уровней антиатомов, в том числе с высокими значениями главных квантовых чисел в зависимости от номера главного квантового числа, отвечающего исходному состоянию заряженного кластера (Ps) до взаимодействия. В самом деле вычисление амплитуды рассеяния выделенного асимптотического состояния Ψ_c^{ass} позволяет, проведя его парциальный анализ, вычислить распределение состояний с

квантовыми числами (l, m) . Вычисление корреляционной функции

$$\langle \Psi_c^{ass}, \varphi_n \rangle$$

позволяет найти заселенности уровней с любым (сколь угодно большим) главным квантовым числом n антиатома с последующим вычислением распределения заселенности состояний с квантовыми числами (l, m) .

Указанная методика может существенно повысить точность предсказания характеристик эксперимента по увеличению продуктивности процессов создания антиатомов в высоковозбужденных состояниях с последующим их радиационным переходом в основное состояние.

В этом смысле предлагаемая методика расчетов применима к описанию любых процессов трехчастичной рекомбинации и трехчастичной перезарядки при энергиях эксперимента выше порога развала.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Определение ядра $\varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ производящего интеграла

Рассмотрим собственную функцию абсолютно непрерывного спектра $\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ кулоновского двухчастичного оператора Шредингера, определенную стандартным образом с точностью до нормировки (нормировочный коэффициент положен равным единице),

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \Phi(-i\gamma, 1, ikx(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle)), \quad (60)$$

и проведем ее парциальный анализ (разложение по сферическим функциям). В ситуации, когда функция является инвариантной относительно поворота системы координат (в данном случае угловая зависимость содержится лишь в скалярном произведении $\langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle$), такой анализ эквивалентен разложению по полиномам Лежандра [35].

Для того чтобы провести такое разложение, воспользуемся преобразованием Куммера (9.212.1) [24]

$$\Phi(a, c, z) = e^z \Phi(c - a, c, -z),$$

что позволяет переписать выражение (60) в виде

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{ikx} \Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t)), \quad (61)$$

где $t = \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle$. Теперь угловая зависимость сосредоточена только в вырожденной гипергеометрической

функции. Проведем ее разложение в ряд по ортогональным полиномам Лежандра P_l . Согласно, например, (8.904) [24], это разложение принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t)) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \Phi_l(k, x) P_l(t). \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь $\Phi_l(k, x)$ — парциальные компоненты функции $\Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t))$, которые, согласно условиям ортогональности полиномов Лежандра, вычисляются следующим образом:

$$\Phi_l(k, x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t)) P_l(t). \quad (63)$$

Для вычисления интеграла в (63) воспользуемся гипергеометрическим разложением

$$\Phi(a, 1, b(1 - t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{(j!)^2} b^j (1 - t)^j, \quad (64)$$

$$a = 1 + i\gamma, \quad b = -ikx, \quad (a)_j = \frac{\Gamma(a + j)}{\Gamma(a)},$$

в терминах которого

$$\Phi_l(k, x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{(j!)^2} b^j \int_{-1}^1 dt (1 - t)^j P_l(t). \quad (65)$$

Делая в интеграле замену переменной $s^2 = (1 - t)/2$, вычислим его явно и получим новое гипергеометрическое разложение, ведущее к следующему предельному соотношению для парциальной компоненты:

$$\begin{aligned} \Phi_l(k, x) &= \frac{(-1)^l}{\Gamma(l + 2)} \lim_{u \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(u)} \times \\ &\times {}_2F_2(a, 1; u, l + 2; 2b), \quad m = l - 1, \end{aligned} \quad (66)$$

где ${}_2F_2$ — гипергеометрическая функция. Воспользуемся теперь выражением

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(u)} {}_2F_2(A, B; u, D; z) &= \\ &= \frac{(A)_{m+1} (B)_{m+1}}{(D)_{m+1}} \frac{z^{m+1}}{(m + 1)!} \times \\ &\times {}_2F_2(A + m + 1, B + m + 1; m + 2, D + m + 1; z), \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$A = a, \quad B = 1, \quad m = l - 1, \quad D = l + 2, \quad z = 2b.$$

Подставляя выражение (67) в (66), получим окончательное выражение для парциальной компоненты:

$$\Phi_l(k, x) = \frac{\Gamma(i\gamma + l + 1)}{\Gamma(i\gamma + 1)\Gamma(2l + 2)}(2ikx)^l \times \Phi(i\gamma + l + 1, 2l + 2, -2ikx). \quad (68)$$

Подставляя полученное соотношение в разложение (61), (62) для собственной функции непрерывного спектра кулоновского двухчастичного оператора Шредингера, получаем

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{ikx} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{\Gamma(i\gamma + l + 1)}{\Gamma(i\gamma + 1)\Gamma(2l + 2)} (2ikx)^l \times \Phi(i\gamma + l + 1, 2l + 2, -2ikx) P_l(t). \quad (69)$$

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение построенной нами функции в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости k при

$$k = k_n = i \frac{|\alpha|}{2n}, \quad \alpha < 0,$$

$$i\gamma = i \frac{\alpha}{2k} \Big|_{k=k_n} = i \frac{\alpha}{2k_n} = -n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $k_n^2 = -|\alpha|/4n^2$ — энергия двухчастичного связанного состояния, отвечающего главному квантовому числу n . В этом случае выражение (69) принимает вид

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}_n) = \exp\left(-\frac{|\alpha|}{2n}x\right) \times \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{nl} \frac{2l + 1}{\Gamma(2l + 2)} \left(-\frac{|\alpha|}{n}x\right)^l \times \Phi\left(-n + l + 1, 2l + 2, \frac{|\alpha|}{n}x\right) P_l(t). \quad (70)$$

Мы понимаем здесь вектор \mathbf{k}_n как вектор с направлением, совпадающим с направлением исходного вектора \mathbf{k} ($\hat{\mathbf{k}}_n = \hat{\mathbf{k}}$), и длиной, принимающей чисто мнимое значение в верхней полуплоскости комплексной плоскости k ($k_n = i|\alpha|/2n$). Здесь коэффициент β_{nl} определяется следующим образом:

$$\beta_{nl} = (1 - n)(2 - n) \dots (l - n). \quad (71)$$

Отметим, что, согласно (71), коэффициент β_{nl} обращается в нуль при $l \geq n$. Таким образом, выраже-

ние (70) оказывается конечной суммой слагаемых и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}_n) &= \exp\left(-\frac{|\alpha|}{2n}x\right) \times \\ &\times \Phi\left(1 - n, 1, \frac{|\alpha|}{2n}x(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle)\right) = \\ &= 4\pi \exp\left(-\frac{|\alpha|}{2n}x\right) \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l \beta_{nl} \frac{1}{(2l + 1)!} \times \\ &\times \left(-\frac{|\alpha|}{n}\right)^l x^l \Phi\left(-n + l + 1, 2l + 2, \frac{|\alpha|}{n}x\right) \times \\ &\times Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (72) \end{aligned}$$

где Y_l^m — соответствующие сферические функции. Последнее равенство справедливо в силу теоремы сложения сферических гармоник (5.17.9) [35],

$$\frac{2l + 1}{4\pi} P_l(\langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle) = \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}).$$

Наконец, введем функцию

$$\varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) \equiv \tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}_n) \quad (73)$$

согласно выражению (72). Мы предъявили функцию, парциальные компоненты которой с точностью до нормировки совпадают с кулоновскими радиальными функциями дискретного спектра [36]

$$R_{nl} = \rho^l e^{-\rho/2} \Phi(-n + l + 1, 2l + 2, \rho),$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

при фиксированном главном квантовом числе n .

Интегрируя функцию φ_n по $d\hat{\mathbf{k}}$ на единичной сфере с некоторой гладкой функцией $\hat{a}(\hat{\mathbf{k}})$, получим стандартное разложение вида

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) \hat{a}(\hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} &= \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l D_{nlm} R_{nl}(x) Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}) \quad (74) \end{aligned}$$

по полному набору кулоновских парных состояний дискретного спектра, отвечающих фиксированному главному квантовому числу n . При этом набор амплитуд D_{nlm} будет полностью определяться аналитическим видом функции $\hat{a}(\hat{\mathbf{k}})$.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках гранта РНФ 17-11-01003-П.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Faddeev, *Mathematical Aspects of the Three-Body Problem of the Quantum Scattering Theory*, Daniel Davey and Co., Jerusalem (1965), p. 114.
2. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, Москва (1985).
3. С. П. Меркурьев, ЯФ **24**, 289 (1976).
4. С. П. Меркурьев, ТМФ **32**, 187 (1977).
5. I. Bray and A. T. Stelbovics, Phys. Rev. Lett. **69**, 53 (1992).
6. I. Bray and A. T. Stelbovics, Phys. Rev. A **48**, 4787 (1993).
7. A. S. Kadyrov, I. Bray, A. M. Mukhamedzhanov, and A. T. Stelbovics, Ann. Phys. **324**, 1516 (2009).
8. A. S. Kadyrov, A. M. Mukhamedzhanov, A. T. Stelbovics et al., Phys. Rev. A **68**, 022703 (2003).
9. A. M. Budylin, Ya. Yu. Koptelov, S. B. Levin, and S. V. Sokolov, arXiv:1810.06056 [quant-ph] (2018).
10. M. Gaudin and B. Derrida, J. de Phys. **36**, 1183 (1975).
11. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, в сб. *Проблемы математической физики*, т. 9, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1979), с. 14.
12. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, Зап. научн. сем. ЛОМИ **84**, 16 (1979).
13. В. А. Фок, *Новые методы в теории диффракции*, Вестник Ленингр. ун-та **4**, 5 (1947); *Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн*, Сов. радио, Москва (1970).
14. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, Алгебра и анализ **22**(3), 60 (2010).
15. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, Функци. анализ и его прилож. **46**(2), 83 (2012).
16. С. Б. Левин, Математ. заметки **108**, 469 (2020).
17. С. Б. Левин, Зап. научн. сем. ПОМИ **451**, 79 (2016).
18. T. Wolz, C. Malbrunot, M. Vieille-Grosjean, and D. Comparat, Phys. Rev. A **101**, 043412 (2020).
19. A. M. Budylin, Ya. Yu. Koptelov, and S. B. Levin, J. Math. Sci. **238**, 601 (2019).
20. E. O. Alt and A. M. Mukhamedzhanov, Phys. Rev. A **47**, 2004 (1993).
21. J. Tennyson, Phys. Rep. **491**, 29 (2010).
22. F. Tricomi, Ann. Mat. Pura Appl. **28**, 263 (1949).
23. M. Brauner, J. S. Briggs, and H. Klar, J. Phys. B **22**, 2265 (1989).
24. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).
25. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, Москва (1959).
26. Н. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матъе*, Изд. иностр. лит-ры, Москва (1953).
27. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaannmäki, and T. Ojala, J. Phys. A **43**, 285205 (2010).
28. В. С. Буслаев, Я. Ю. Коптелов, С. Б. Левин, Д. А. Стрыгина, ЯФ **76**, 236 (2013).
29. W. A. Bertsche, E. Butler, M. Charlton, and N. Madsen, J. Phys. B **48**, 232001 (2015).
30. M. Ahmadi, B. X. R. Alves, C. J. Baker et al., Nature Comm. **8**, 681 (2017).
31. N. Kuroda, S. Ulmer, D. J. Murtagh et al., Nature Comm. **5**, 3089 (2014).
32. G. Gabrielse, N. S. Bowden, P. Oxley et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 233401 (2002).
33. D. Krasnický, G. Testera, and N. Zurlo, J. Phys. B **52**, 115202 (2019).
34. D. Krasnický, R. Caravita, C. Canali, and G. Testera, Phys. Rev. A **94**, 022714 (2016).
35. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).