

КОНВЕКЦИЯ КОЛЛОИДНОЙ СУСПЕНЗИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ НАГРЕВЕ СНИЗУ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАНОЧАСТИЦ

*И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 17 сентября 2020 г.,
после переработки 7 октября 2020 г.
Принята к публикации 8 октября 2020 г.

В случае горизонтального слоя коллоидной суспензии изучены линейная неустойчивость и двумерные нелинейные конвективные течения стратифицированной в поле тяжести коллоидной суспензии при учете взаимодействия частиц. Получены зависимости порога возникновения колебательной конвекции, частоты нейтральных колебаний и критического волнового числа от среднего значения объемной доли примеси. Нелинейные слагаемые в диффузионном и седиментационном потоках, отражающие взаимодействие наночастиц, приводят к понижению среднего поперек слоя градиента концентрации и снижению порога возникновения конвекции и частоты нейтральных колебаний по сравнению с идеальным коллоидным раствором. Проведено численное моделирование конечно-амплитудного течения в виде бегущей волны. В отличие от случая молекулярных жидкостей и идеальных коллоидных растворов пространственная структура поля концентрации хорошо описывается первой гармоникой и имеет слабый пространственный ангармонизм.

DOI: 10.31857/S0044451021020164

1. ВВЕДЕНИЕ

В однородной жидкости, заполняющей горизонтальный слой, под влиянием вертикального градиента температуры возможно состояние механического равновесия, когда макроскопическое движение жидкости отсутствует, а передача тепла осуществляется только за счет молекулярного переноса. При нагреве снизу и достаточно большой разности температуры данное состояние становится неустойчивым, возникающая неоднородность плотности благодаря силам плавучести приводит к формированию конвективного течения [1, 2].

В случае неоднородных по составу жидкостей (молекулярных смесей и коллоидных суспензий) появляется дополнительный механизм формирования неоднородности плотности за счет перераспределения их компонент [1–4]. Благодаря тому, что в коллоидных суспензиях коэффициент диффузии на несколько порядков меньше, чем в молекулярных

растворах, во многих исследованиях конвекции в подобных средах они рассматриваются как однородные, поскольку предполагается, что существенные неоднородности в распределении примеси, обусловленные термодиффузией, магнитофорезом и седиментацией наночастиц примеси возникают только на диффузионных временах, значительно превышающих тепловое характерное время. Тем не менее имеются экспериментальные данные по конвективным течениям коллоидных суспензий, которые нельзя объяснить с точки зрения модели однородной жидкости [5–7].

Теоретический анализ конвекции в плоском слое коллоида проведен в работах [8, 9]. Однако он справедлив только для слабоконцентрированных растворов. Как показывают исследования, в коллоидах проявляется довольно сильная зависимость вязкости от концентрации [10], а также значительное отклонение закона диффузии от классического закона Фика [11, 12]. Анализ влияния концентрационной зависимости вязкости на конвекцию коллоидного раствора в плоском слое при подогреве снизу был проведен в работе [13]. Учет неоднородности вязкости смеси приводит к понижению порога кон-

* E-mail: bsmorodin@yandex.ru

вективной устойчивости. Несмотря на сильную зависимость вязкости от концентрации, влияние данного эффекта на порог устойчивости механического равновесия оказался слабым. Значительные отклонения критического числа Рэлея от модели с постоянной вязкостью наблюдаются только при очень большой неоднородности смеси.

Теоретическое исследование диффузии твердых частиц представлено в работе [14], в которой полагается, что энергия Гиббса раствора в целом должна определяться конфигурационным интегралом частиц примеси, который может быть вычислен для частиц в пустоте. Данная теория была развита в работах [15, 16].

Сравнительный анализ различных моделей газа твердых сфер, проведенный в работе [17], показал, что в области умеренных значений объемной доли частиц φ вириальное разложение и приближение Карнагана–Стерлинга дают практически идентичные результаты.

Рассмотрение коллоидов с точки зрения теории слабых растворов проведено в работе [12]. Отличие данной теории от подхода [14] заключается в том, что проводится разложение энергии Гиббса по степеням концентрации частиц примеси без учета рассмотрения конкретных видов межчастичных взаимодействий. Последовательное применение теории слабых растворов [12] с учетом характерных особенностей твердых частиц приводит к уравнениям, дающим распределения концентрации, схожие с приведенными в [14]. Однако стоит отметить ряд отличий. В теории [12] в химическом потенциале частиц примеси добавочное слагаемое зависит от плотности смеси как целого, что приводит к появлению дополнительного множителя $(1 - \varphi)$.

Данная работа посвящена исследованию конвекции коллоидной суспензии в горизонтальном слое с учетом нелинейного закона диффузионного и седиментационного потоков наночастиц, предложенного в [12].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горизонтальный слой толщиной h , заполненный коллоидным раствором (коллоидной суспензией), расположенный в поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор, направленный вверх) и подогреваемый снизу. На горизонтальных идеально теплопроводных и непроницаемых для примеси границах слоя выполняется условие прилипания смеси. Ось x декартовой системы ко-

ординат направлена вдоль горизонтальных границ слоя, ось z — перпендикулярно им. В поле тяжести возникает поток примеси наночастиц, направленный к нижней границе. Поскольку к горизонтальным границам слоя приложен градиент температур $\delta\Theta/h = (\theta_{bottom} - \theta_{top})/h > 0$, в смеси при достаточно большом его значении действует и другой (конвективный) механизм транспорта наночастиц. Плотность коллоидного раствора зависит от объемной доли φ примеси по закону

$$\rho = \rho_f(1 - \varphi) + \rho_p\varphi, \quad (1)$$

где ρ — плотность смеси в целом, ρ_f — плотность жидкости носителя, ρ_p — плотность частиц. Уравнение состояния коллоидной суспензии при слабом отклонении температуры θ и объемной концентрации φ от некоторых средних значений θ_0, φ_0 можно аппроксимировать линейной зависимостью:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0) + \beta(\varphi - \varphi_0)), \quad (2)$$

где α и β — положительные коэффициенты теплового и концентрационного расширения смеси соответственно:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad \beta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_0}. \quad (3)$$

В концентрированных коллоидах поток частиц не подчиняется классическому закону Фика, в котором полагается линейная зависимость потока частиц от градиента концентрации. Для описания потоков частиц используем модель, предложенную в [12], в которой поток частиц для случая умеренных концентраций ($\varphi^3 \ll 1$) имеет вид

$$\mathbf{J}_\varphi = -D \left[(1 + p\varphi)\nabla\varphi + \frac{1}{l_{sed}}\varphi(1 - \varphi)\mathbf{n} \right], \quad (4)$$

где D — коэффициент диффузии наночастиц, p — параметр, определяемый свойствами суспензии, $l_{sed} = \frac{k_b T}{\delta\rho V g}$ — длина седиментации [18], V — объем частиц, k_b — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $\delta\rho = \rho_p - \rho_f$. Для коллоидных растворов $p \approx 8$.

Система уравнений тепловой конвекции коллоидной суспензии примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v} + (1 - \alpha(\theta - \theta_0) + \beta(\varphi - \varphi_0))\mathbf{g}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta = \chi\Delta\theta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}(\varphi\mathbf{v}) = -D\nabla\mathbf{J}_\varphi, \quad (7)$$

где \mathbf{v} — скорость течения, P — давление, χ — температуропроводность, D — коэффициент диффузии наночастиц. Несмотря на неоднородность плотности, создаваемую за счет перепадов концентрации, жидкость можно считать несжимаемой. Для подтверждения этого рассмотрим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8)$$

Учтем зависимость плотности от температуры и концентрации (2) и, пользуясь уравнениями (6), (7), (16), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \simeq \alpha \chi \Delta \theta - \beta D \times \operatorname{div} \left[(1 + p\varphi) \nabla \varphi + \frac{1}{l_{sed}} \varphi (1 - \varphi) \mathbf{n} \right]. \quad (9)$$

Учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{v}$ при конвективных течениях имеет значения порядка χ/h^2 , лапласиан температуры — значения порядка $\delta\theta/h^2$, а слагаемые в правой части, отвечающие за пространственное распределение концентрации, — порядка φ_0/h^2 и $\varphi_0/(hl_{sed})$, найдем условие применимости модели несжимаемой жидкости ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$):

$$\alpha \delta \theta \ll 1, \quad \frac{\beta D \varphi_0}{\chi} \ll 1, \quad \frac{\beta D \varphi_0}{hl_{sed}} \ll 1. \quad (10)$$

Тепловые возмущения не вызывают существенного нарушения условия несжимаемости жидкости даже при разности температур в сотню градусов ввиду малости коэффициента теплового расширения $\alpha \sim 10^{-4} - 10^{-3}$. В случае переноса частиц примеси концентрационный коэффициент плотности, определенный по объемной концентрации частиц, может быть существенно больше: $\beta \approx 1-5$, однако ввиду малости коэффициента диффузии для коллоидных суспензий ($D \sim 10^{-7}$ см²/с) по сравнению с коэффициентом температуропроводности ($\chi \sim 10^{-3}$ см²/с) они не способны вызвать значительные отклонения поля скорости от соленоидального вида $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, даже при сильной концентрации суспензии.

Поскольку задача (5)–(7) изотропна в плоскости слоя, плоские (двумерные) и пространственные (трехмерные) возмущения одинаково опасны. В дальнейшем будем рассматривать двумерные возмущения и эволюцию двумерных течений.

Введем функцию тока и завихренность жидкости соотношениями

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_z, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -v_x, \quad \Phi = (\operatorname{rot} \mathbf{v})_y \quad (11)$$

и запишем уравнения конвекции в безразмерном виде, используя следующие масштабы: длины — h ,

времени — h^2/χ , скорости — χ/h , температуры — $\delta\theta$, концентрации — φ_0 , давления — $\rho\chi^2/h^2$. Тогда имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \operatorname{Pr} \left[\Delta \Phi + \operatorname{R} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \operatorname{Bl} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right], \quad (12)$$

$$\Phi = \Delta \Psi, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta \theta, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\operatorname{Le} \nabla \mathbf{j}_\varphi. \quad (15)$$

$$\mathbf{j}_\varphi = - \left[(1 + p\varphi_0) \nabla \varphi + \frac{1}{l} \varphi (1 - \varphi_0) \mathbf{n} \right]. \quad (16)$$

Здесь $\operatorname{R} = \alpha gh^3 \delta\theta / \nu \chi$, $\operatorname{B} = \beta gh^4 \varphi_0 / (\nu \chi l_{sed})$, $\operatorname{Le} = D/\chi$, $\operatorname{Pr} = \nu/\chi$, $l = h/l_{sed}$ — соответственно тепловое число Рэлея, число Больцмана, число Льюиса, число Прандтля, безразмерная длина седиментации, а также два дополнительных параметра (по сравнению с задачей [8, 9]): p — коэффициент, характеризующий зависимость диффузии от концентрации, φ_0 — среднее значение концентрации. Отметим, что число Больцмана, используемое при описании конвекции коллоидной суспензии, связано с концентрационным числом Рэлея $\operatorname{R}_D = \beta gh^3 \varphi_0 / \nu \chi$ следующим образом: $\operatorname{B} = \operatorname{R}_D / l$. Граничные условия к задаче (12)–(16), соответствующие идеально теплопроводным непроницаемым горизонтальным границам, на которых отсутствует проскальзывание, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0, \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1 = 0, \\ \theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 0, \\ z = 0, 1 : (\mathbf{j}_\varphi)_z = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

3. МЕХАНИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

При подогреве горизонтального слоя жидкости снизу возможно состояние механического равновесия, когда макроскопические течения отсутствуют ($\mathbf{v} = 0$). При этом распределение температуры является линейной функцией вертикальной координаты:

$$\theta_s = 1 - z. \quad (18)$$

Распределение концентрации в горизонтальном слое в стационарном случае механического равновесия

$\varphi_s(z)$ определяется решением уравнения для эволюции примеси (15) с учетом (16), в котором левая часть равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((1+p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} + \frac{\varphi_s}{l} (1-\varphi_0\varphi_s) \right) = 0 \quad (19)$$

или

$$(1+p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} + p\varphi_0 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \right)^2 + \frac{1-2\varphi_0\varphi_s}{l} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \right) = 0. \quad (20)$$

Решение имеет вид

$$\varphi_s = 1 + \frac{G}{\varphi_0 p} W \left(A \exp \left(-\frac{z}{r} \right) \right) - \frac{1-\varphi_0}{1-2\varphi_0}, \quad (21)$$

где W — функция Ламберта и введены обозначения

$$G = 1 + \frac{p\varphi_0^2}{1-2\varphi_0}, \quad r = \frac{lG}{1-2\varphi_0}. \quad (22)$$

Константа A находится из условия постоянства средней концентрации

$$\int_0^1 \varphi_s = 1. \quad (23)$$

Уравнение (23) не имеет аналитического решения для A в общем виде, однако может быть решено численно при задании конкретных значений параметров l, p, φ_0 .

В случае идеального слабого раствора ($p = 0, \varphi_0 \rightarrow 0$) распределение концентрации описывается классическим барометрическим распределением

$$\varphi_s^i = \frac{1}{l} \frac{\exp(-z/l)}{1 - \exp(-1/l)} - 1, \quad (24)$$

а разность концентраций на верхней и нижней границах имеет вид

$$\delta\varphi_s^i = \varphi_s^i(z=0) - \varphi_s^i(z=1) = \frac{1}{l}. \quad (25)$$

Поведение величины $\delta\varphi/\delta\varphi_s^i$, характеризующей отношение среднего градиента концентрации в слое к соответствующему значению для идеально слабого раствора, в зависимости от средней концентрации φ_0 показано на рис. 1. Учет взаимодействия наночастиц в коллоидной суспензии приводит к уменьшению разности концентраций $\delta\varphi$ на границах слоя по сравнению со случаем идеального раствора. Так, при объемной доле частиц порядка 10% градиент концентрации уменьшается практически вдвое.

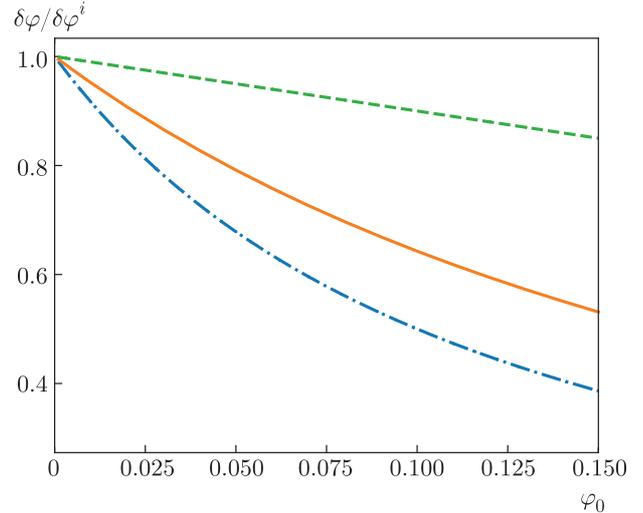


Рис. 1. Зависимости разности концентраций на верхней и нижней границах слоя от среднего значения концентрации при $l = 10$. Штриховая линия соответствует $p = 0$, сплошная — $p = 4$, штрихпунктирная — $p = 8$

4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим малые возмущения функции тока ψ , температуры θ и концентрации $\tilde{\varphi}$ от соответствующих равновесных значений:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_s + \vartheta, \\ \varphi &= \varphi_s + \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (26)$$

Будем искать решение в виде плоских нормальных возмущений:

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \psi(z) \exp(-\lambda + ikx), \\ \vartheta(x, z, t) &= \vartheta(z) \exp(-\lambda t + ikx), \\ \tilde{\varphi}(x, z, t) &= \tilde{\varphi}(z) \exp(-\lambda t + ikx), \end{aligned} \quad (27)$$

где k — волновое число, λ — комплексный декремент затухания.

Тогда уравнения для эволюции малых возмущений функции тока, температуры и концентрации запишутся в виде

$$-\lambda \Delta \psi = \text{Pr} (\Delta \Delta \psi + ikR\vartheta - ikBl\tilde{\varphi}), \quad (28)$$

$$-\lambda \vartheta - ik\psi = \Delta \vartheta, \quad (29)$$

$$-\lambda \tilde{\varphi} + ik\psi \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = \text{Le} \left(\frac{\partial j_{\varphi z}}{\partial z} - k^2 (1+p\varphi_0\varphi_s) \tilde{\varphi} \right), \quad (30)$$

где $j_{\varphi z}$ — z -компонента потока частиц, связанная с возмущениями концентрации $\tilde{\varphi}$,

$$\begin{aligned} j_{\varphi z} &= (1+p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} + p\varphi_0 \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \tilde{\varphi} + \\ &\quad + \frac{\tilde{\varphi}}{l} (1-2\varphi_0\varphi_s). \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение для $j_{\varphi z}$ заметно упрощается, если использовать замену

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \phi, \quad (32)$$

как это ранее делалось в более простом случае слабой концентрации коллоидной суспензии [19]. После подстановки (32) в уравнение (31) и явного вычисления производной получим выражение

$$j_{\varphi z} = (1 + p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left((1 + p\varphi_0\varphi_s) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} + p\varphi_0 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \right)^2 + \frac{1 - 2\varphi_0\varphi_s}{l} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \right) \phi, \quad (33)$$

в котором благодаря (20) второе слагаемое обращается в нуль. Для вертикального потока наночастиц окончательно получим

$$j_{\varphi z} = (1 + p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (34)$$

Вычисляя далее производную

$$\frac{\partial j_{\varphi z}}{\partial z} = (1 + p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \\ + (1 + p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + p\varphi_0 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (35)$$

и еще раз используя соотношение (20), получим

$$\frac{\partial j_{\varphi z}}{\partial z} = (1 + p\varphi_0\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \\ - \frac{1 - 2\varphi_0\varphi_s}{l} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (36)$$

Подставляя $\tilde{\varphi}$ в виде (32) и $\partial j_{\varphi z} / \partial z$ в систему (28)–(30) и сокращая множитель $\partial \varphi_s / \partial z$ в уравнении (30), получим систему уравнений для эволюции возмущений в окончательном виде:

$$- \lambda \Delta \psi = \text{Pr} \left(\Delta \Delta \psi + ikR\vartheta - ikBl \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \phi \right), \quad (37)$$

$$- \lambda \vartheta - ik\psi = \Delta \vartheta, \quad (38)$$

$$- \lambda \phi + ik\psi = \text{Le} \left((1 + p\varphi_0\varphi_s) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k^2 \phi \right) - \frac{1 - 2\varphi_0\varphi_s}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (39)$$

Граничные условия для возмущений функции тока и температуры имеют вид

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (40)$$

Равенство нулю z -компоненты потока вещества на горизонтальных границах, записанного в виде (34), немедленно дает граничное условие для вспомогательной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (41)$$

Для решения задачи устойчивости (37)–(39) с граничными условиями (40), (41) использовался метод Галеркина [2] с разложением полей функции тока, температуры и переменной ϕ по наборам базисных функций [19], удовлетворяющих граничным условиям (40), (41):

$$\psi = \sum_{n=1}^{N_\psi} \psi_n \sin(n\pi z) \sin \pi z, \\ \vartheta = \sum_{m=1}^{N_\vartheta} \vartheta_m \sin(m\pi z), \quad (42) \\ \phi = \sum_{q=0}^{N_\phi-1} \phi_q \cos(q\pi z).$$

Подставляя разложения (42) в систему (37)–(39) и составляя условия ортогональности метода Галеркина, получим линейную систему уравнений для амплитуд $\psi_n, \vartheta_n, \phi_q$, содержащую $K = N_\psi + N_\vartheta + N_\phi$ уравнений. Условием существования нетривиального решения полученной системы является равенство нулю определителя, матрицы A размера $K \times K$, составленной из коэффициентов при соответствующих амплитудах. После преобразования матрицы A к виду, при котором декременты λ расположены только на диагонали:

$$A = C - \lambda E,$$

где E — единичная матрица, задача определения декрементов возмущений сводится к задаче поиска собственных значений матрицы C .

Декремент λ является функцией параметров задачи: $\lambda = \lambda(R, B, l, \text{Pr}, \text{Le}, p, \varphi_0, k)$, при этом условие $\lambda_r = \text{Re } \lambda = 0$ определяет границу конвективной устойчивости.

В расчетах использовалось разложение по 15 базисным функциям для каждого из полей скорости, температуры и концентрации ($N_\psi = 15, N_\vartheta = 15, N_\phi = 15$). Дальнейшее увеличение количества базисных функций приводило к изменению критического значения числа Рэлея, не превышающему 0.05 %.

Обсудим результаты исследования линейной устойчивости механического равновесия коллоидной суспензии, в котором устанавливается линейный

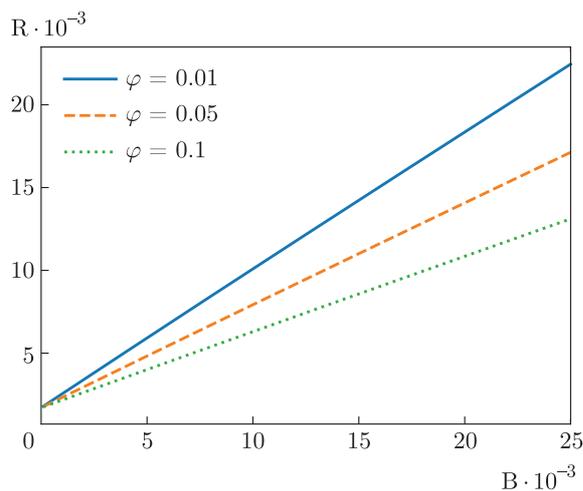


Рис. 2. Зависимости порогового числа Рэлея от числа Больцмана при некоторых значениях средней концентрации, $Pr = 5.5$, $l = 10$, $p = 8$, $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$

профиль температуры и профиль концентрации $\varphi_s(z)$. При рассмотрении предполагается, что коллоидная суспензия имеет типичное значение числа Льюиса $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$, а число Прандтля $Pr = 5.5$ или $Pr = 100$.

Конвекция возникает в результате возрастания колебательных возмущений. В работе [9] показано, что без учета зависимости коэффициента диффузии от концентрации ($p = 0$, что справедливо для слабых растворов) порог устойчивости механического равновесия слоя коллоидного раствора R_C в области $l \ll 1$ хорошо описывается линейной зависимостью от числа Больцмана:

$$R_C = R_0 + aB, \tag{43}$$

где $R_0 = 1708$ — порог устойчивости однородной жидкости, a — некоторая функция от числа Прандтля, например, $a(Pr = 100) = 1.01$, $a(Pr = 5.5) = 0.93$. Результаты расчетов порога устойчивости для концентрированного коллоида (37)–(39) представлены на рис. 2.

Учет квадратичных слагаемых в потоке наночастиц приводит к понижению R_C с ростом средней концентрации, что обуславливается, по-видимому, уменьшением эффективного градиента концентрации. Разность концентраций в идеальном коллоидном растворе на верхней и нижней границах слоя в размерном виде определяется отношением $\delta\varphi_s^i = (\varphi_0 h)/l_{sed}$, а в безразмерных переменных — $\delta\varphi_s^i = 1/l$. Как показано на рис. 1, в концентрированном коллоиде с увеличением среднего значения объем-

Таблица. Сравнение значений коэффициента a при некоторых параметрах задачи

φ_0	a		a_{ef}	
	$Pr = 100$	$Pr = 5.5$	$Pr = 5.5$	$Pr = 100$
0.01	0.923	0.829	0.904	8.12
0.05	0.684	0.614	0.912	8.19
0.10	0.505	0.456	0.912	8.23

ной доли φ_0 разность концентраций (а следовательно, и градиент внутри слоя) уменьшается.

Зависимости $R_C(B, Pr)$ в случае нелинейной зависимости потока наночастиц от средней концентрации так же хорошо описываются соотношением (43). Значения коэффициентов приведены в таблице.

Отметим, что если в зависимости (43) использовать эффективное число Больцмана $B_{ef} = B\delta\varphi_s/\delta\varphi_s^i$:

$$R_C = R_0 + aB = R_0 + a_{ef}B\delta\varphi_s/\delta\varphi_s^i = R_0 + a_{ef}B_{ef}, \tag{44}$$

то эффективный коэффициент пропорциональности

$$a_{ef} = a\delta\varphi_s^i/\delta\varphi_s \tag{45}$$

практически не зависит от средней концентрации коллоидного раствора, а определяется только числом Прандтля (см. таблицу).

Зависимости приведенного критического числа Рэлея $r = R_C/(R_C(\varphi_0 \rightarrow 0))$, волнового числа k , частоты нейтральных колебаний ω от средней объемной доли приведены на рис. 3. Увеличение средней объемной доли примеси приводит не только к понижению порога конвективной устойчивости, о чем шла речь при обсуждении рис. 2. Уменьшение частоты нейтральных колебаний с ростом средней концентрации также объясняется уменьшением среднего градиента концентрации частиц в слое за счет их взаимодействия. В предельном случае однородной жидкости конвекция связана с монотонными возмущениями (частота нейтральных колебаний равна нулю). Отметим, что эффект понижения порога конвекции проявляется сильнее при больших значениях числа Больцмана. Так, при $B = 10^4$ при объемной доле примеси 0.15 порог понижается практически в два раза.

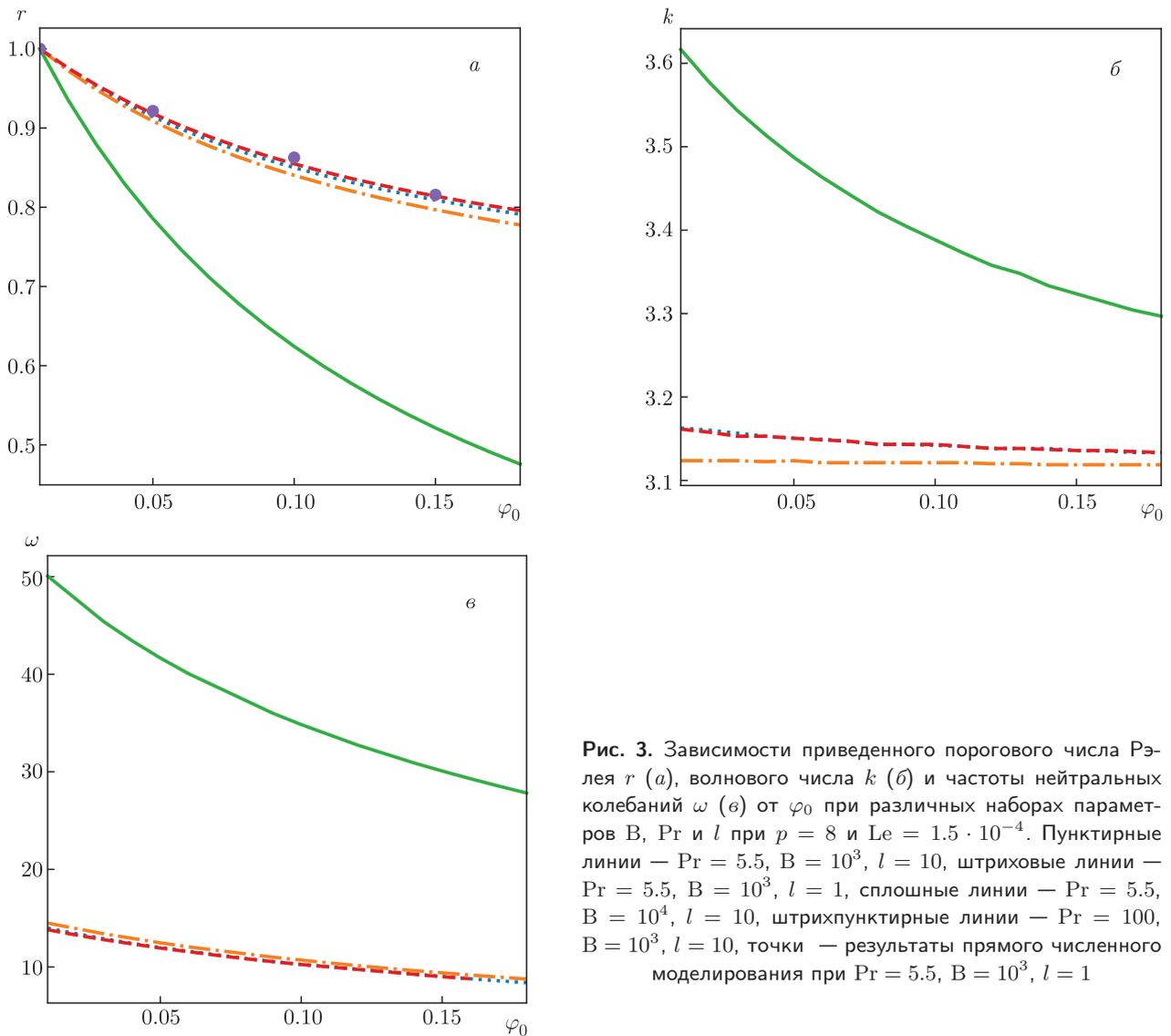


Рис. 3. Зависимости приведенного порогового числа Рэлея r (а), волнового числа k (б) и частоты нейтральных колебаний ω (в) от φ_0 при различных наборах параметров B , Pr и l при $p = 8$ и $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$. Пунктирные линии — $Pr = 5.5$, $B = 10^3$, $l = 10$, штриховые линии — $Pr = 5.5$, $B = 10^3$, $l = 1$, сплошные линии — $Pr = 5.5$, $B = 10^4$, $l = 10$, штрихпунктирные линии — $Pr = 100$, $B = 10^3$, $l = 10$, точки — результаты прямого численного моделирования при $Pr = 5.5$, $B = 10^3$, $l = 1$

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Для анализа двумерных конечно-амплитудных течений система нелинейных уравнений (13)–(15) с граничными условиями (17) решалась методом конечных разностей [20]. При переходе к дискретным аналогам уравнений движения и теплопроводности пространственные производные аппроксимировались центральными разностями. Поскольку уравнение концентрации (15) должно удовлетворять закону сохранения массы, оно записывалось в консервативной форме и аппроксимировалось при помощи метода контрольного объема [20]. Для дискретного представления конвективных слагаемых применялись центральные разности. Решение уравнения Пуассона проводилось с помощью быстрого преобразования Фурье. Подробное описание численного алгоритма приведено в [21]. При расчетах исполь-

зовались периодические по горизонтали граничные условия на длине ячейки $L = 2$ (или $L = 2\pi/k_{min}$), соответствующей минимальному волновому числу ($k_{min} \sim \pi$) для следующего набора параметров: ($Pr = 5.5$, $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $l = 1$, $p = 8$ и $\varphi_0 = 0.1$), а также сетка 129×65 .

В качестве начальных условий задавалось линейное распределение температуры и распределение концентрации $\varphi_s(z)$ при наличии оседания частиц. Решение уравнения (19) для $\varphi_s(z)$ находилось численно.

Пороги конвективной устойчивости, полученные в ходе линейного анализа (штриховая линия на рис. 3а) и в результате расчета с помощью конечно-разностной схемы (точки на рис. 3а), хорошо согласуются.

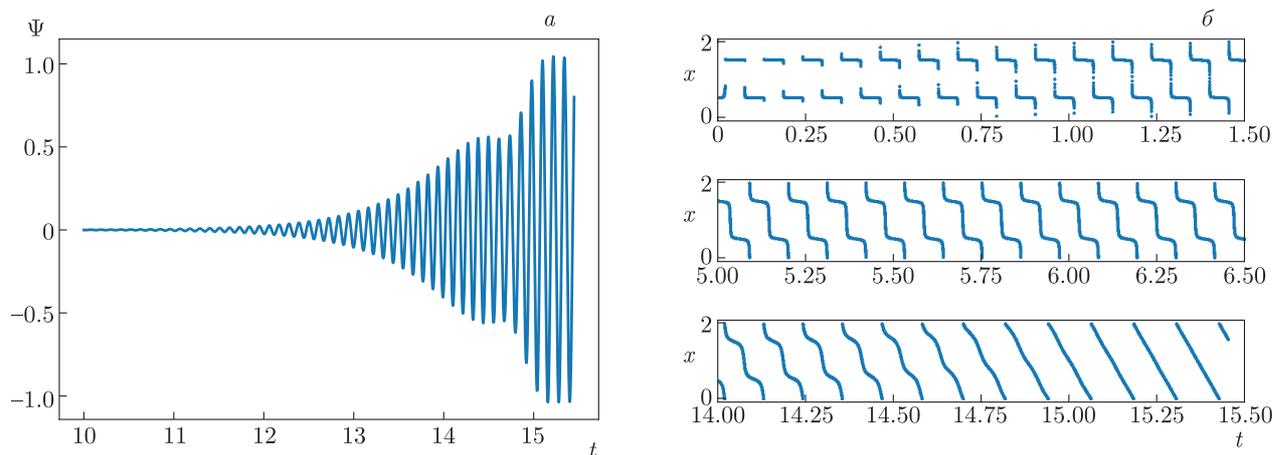


Рис. 4. Зависимости от t а) функции тока в фиксированной точке слоя, б) координаты максимума функции тока при формировании бегущей волны $B = 10^3$, $R = 2220$, $Pr = 5.5$, $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 = 0.1$, $p = 8$

Зависимости от времени локального значения функции тока $\Psi = \psi_{loc}$ в точке с координатами ($x = 1/4$, $z = 1/2$) и координаты максимального значения функции тока приведены на рис. 4 при фиксированном наборе параметров. Возникновение неустойчивости начинается ростом колебательных возмущений. На начальном интервале роста возмущений ($t < 0.5$) координата максимума скачком изменяется между значениями $x_{max} = 1.5$ и $x_{max} = 0.5$, что соответствует стоячей волне (SW, standing wave), которая с течением времени увеличивает амплитуду (рис. 4а). Затем (в интервале $0.5 < t < 15.0$) стоячая волна в результате переходного процесса трансформируется в бегущую волну (TW, traveling wave). При этом сквозное горизонтальное движение конвективных валов через всю ячейку появляется при $t \approx 1.0$ и становится явно заметно на графиках $x_{max}(t)$ (рис. 4б). Фазовая скорость волны соответствует тангенсу угла наклона графика $x_{max}(t)$. Переход от стоячей волны к бегущей происходит последовательно через 1) смешанное состояние ($1.5 < t < 5.0$), в котором присутствуют фазы бегущей и стоячей волн (горизонтальные части графика $x_{max}(t)$), и далее 2) модулированную бегущую волну ($5.0 < t < 15.0$). Изначально сформировавшаяся бегущая волна (рис. 4б, $t \approx 5.0$) сильно модулирована по фазе, затем глубина модуляции уменьшается до нуля и скорость TW становится постоянной ($t > 15.0$). Во время всего переходного процесса амплитуда функции тока в фиксированной точке немонотонно растет, достигая постоянного значения в режиме бегущей волны ($\Psi = 1.05$).

Структуры полей функции тока, температуры и концентрации в бегущей волне приведены на рис. 5.

Структуры полей функции тока и температуры, хорошо описываемых первой пространственной гармоникой, такие же, как в случае устойчивого режима сильно нелинейных бегущих волн (strong nonlinear traveling wave, SN TW), наблюдаемых в молекулярных жидкостях [22] и идеальных коллоидных суспензиях [9]. При этом структура поля концентрации в нашем случае, также хорошо описываемая первой пространственной гармоникой, значительно отличается от структуры в режиме SN TW, когда распределение примеси характеризуется сильным пространственным ангармонизмом, а зависимость распределения концентрации от горизонтальной координаты на середине высоты слоя имеет трапецеидальную форму: чередование постоянных высокой и низкой концентраций в ядрах конвективных валов и резкие переходы в узких пограничных слоях. Относительные величины амплитуд нескольких первых пространственных гармоник в распределении полей функции тока и концентрации на различных высотах в слое представлены на рис. 6, который подтверждает сделанный выше вывод о структуре полей функции тока и концентрации. Отметим, что качественных изменений в эволюции течения от режима стоячей волны к бегущей в нашем случае, учитывающем взаимодействие частиц, и в режиме SN TW не наблюдается.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ линейной устойчивости и исследована нелинейная эволюция стратифицированной коллоидной суспензии в плоском горизонтальном слое при нагреве снизу при учете зависимости диффузии и гравитационного оседания от концент-

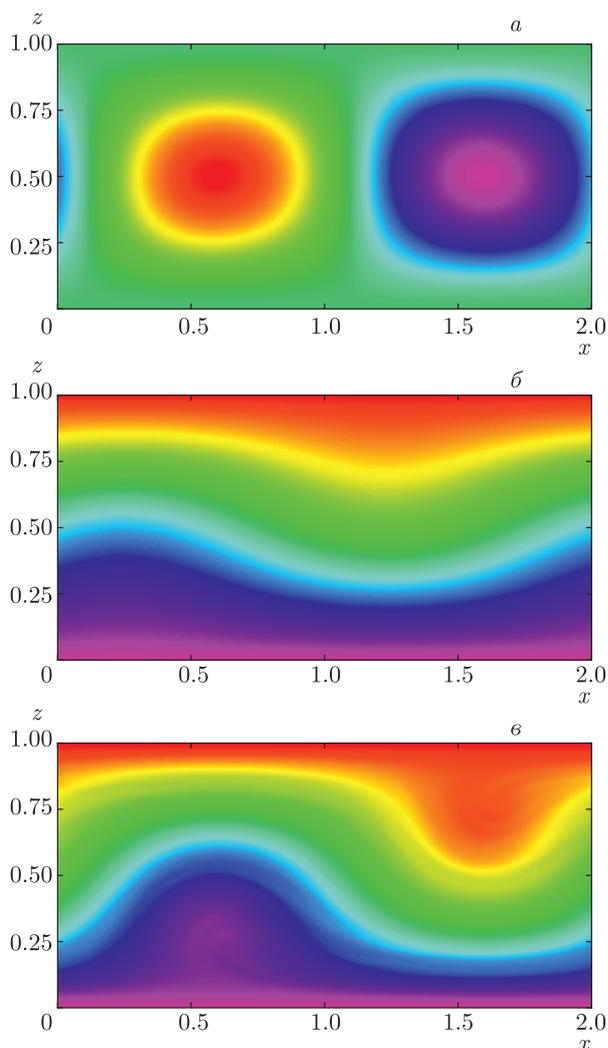


Рис. 5. Поля функции тока (а), температуры (б), концентрации (в) в режиме бегущей волны. $B = 10^3$, $R = 2220$, $Pr = 5.5$, $l = 1$, $p = 8$, $\varphi_0 = 0.1$, $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$

рации частиц при условии взаимодействия частиц. Показано, что несмотря на значительную неоднородность плотности приближение Буссинеска остается справедливым благодаря медленности диффузионных процессов. Получены зависимости порога устойчивости состояния механического равновесия, частоты нейтральных колебаний и критического волнового числа от среднего значения концентрации примеси. Наличие взаимодействия наночастиц и, соответственно, учет нелинейных слагаемых в потоке транспорта наночастиц: диффузии и седиментации в поле тяжести, приводит к понижению среднего градиента концентрации и снижению порога конвективной устойчивости и частоты нейтральных колебаний по сравнению

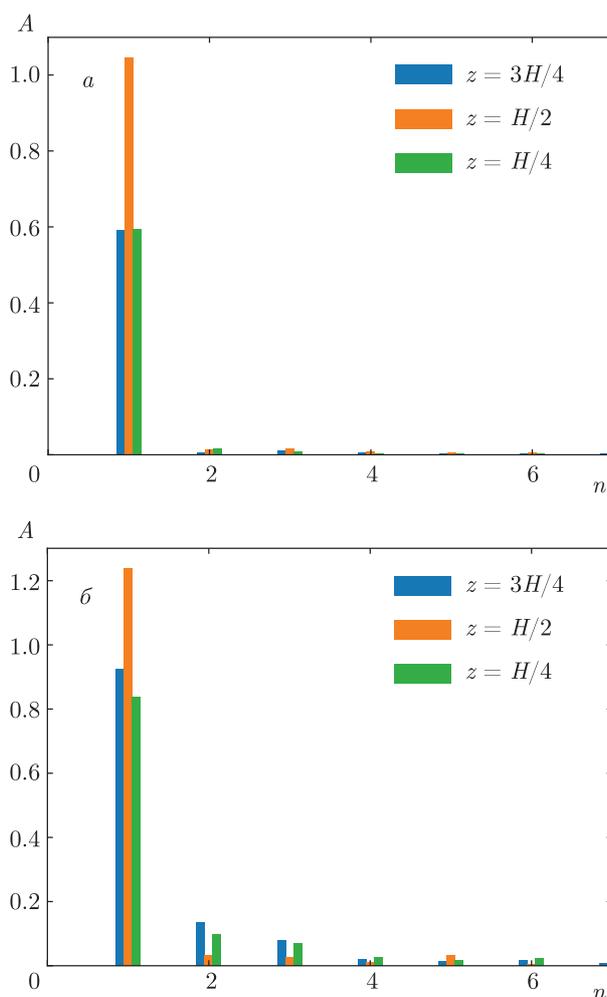


Рис. 6. Относительные амплитуды пространственных гармоник в различных горизонтальных разрезах конвективной ячейки z для полей функции тока (а) и концентрации (б). $B = 10^3$, $R = 2220$, $Pr = 5.5$, $l = 1$, $p = 8$, $\varphi_0 = 0.1$, $Le = 1.5 \cdot 10^{-4}$

с идеальным раствором. Порог устойчивости, предсказанный теорией в отсутствие учета взаимодействия частиц примеси [8], в случае больших средних объемных концентраций может быть сильно завышен. Методом конечных разностей проведено прямое численное моделирование течений, формирующихся вблизи порога устойчивости механического равновесия. Показано, что в результате эволюции формируется бегущая волна, со слабонелинейной пространственной структурой поля концентрации.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00491).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 6, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
2. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
3. И. Г. Шапошников, *ЖЭТФ* **21**, 1309 (1951).
4. J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in Fluids*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
5. Г. Ф. Путин, в сб. *Материалы 11-го Рижского совещания по магнитной гидродинамике*, Рига (1984), т. 3, с. 15.
6. G. Donzelli, R. Cerbino, and A. Vailati, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 104503 (2009).
7. F. Winkel, S. Messlinger, W. Schöpfet et al., *New J. Phys.* **12**, 053003 (2010).
8. M. I. Shliomis and B. L. Smorodin, *Phys. Rev. E* **71**, 036312 (2005).
9. B. L. Smorodin, I. N. Cherepanov, B. I. Myznikova et al., *Phys. Rev. E* **84**, 026305 (2011).
10. И. Н. Черепанов, В. А. Попов, *Вестник Пермского университета. Серия: физика* **2**, 26 (2017).
11. S. Buzzaccaro, A. Tripodi, R. Rusconi et al., *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, 494219 (2008).
12. I. N. Cherepanov and P. V. Krauzin, *Physica A* **540**, 123247 (2020).
13. И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин, *Вестник Пермского университета. Серия: физика* **1**, 26 (2019).
14. G. K. Batchelor, *J. Fluid Mech.* **74**, 1 (1976).
15. Ю. А. Бувечич, А. Ю. Зубарев, А. О. Иванов, *Магнитная гидродинамика* **25**(2), 39 (1989).
16. A. F. Pshenichnikov and A. S. Ivanov, *Phys. Rev. E* **86**, 051401 (2012).
17. И. Н. Черепанов, П. В. Краузин, *ПМТФ* **6**, 35 (2019).
18. M. Mason and W. Weaver, *Phys. Rev.* **2**, 412 (1924).
19. И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин, *ЖЭТФ* **152**, 1404 (2017).
20. П. Рочч, *Вычислительная гидродинамика*, Мир, Москва (1980).
21. I. N. Cherepanov, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* **58**, 1181 (2017).
22. M. Lücke, W. Barten, and M. Kamps, *Physica D* **61**, 183 (1992).