

# ТОМОГРАФИЯ СОСТОЯНИЙ КУБИТОВ И РЕАЛИЗАЦИЯ КВАНТОВЫХ АЛГОРИТМОВ УНИПОЛЯРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

*М. В. Бастркова<sup>a\*</sup>, Н. В. Клёнов<sup>b,c\*\*</sup>, А. М. Сатанин<sup>c,d\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup> Нижегородский исследовательский университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия

<sup>b</sup> Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия

<sup>c</sup> Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова  
127055, Москва, Россия

<sup>d</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
101000, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 января 2020 г.,  
после переработки 16 марта 2020 г.  
Принята к публикации 30 апреля 2020 г.

Традиционная техника управления состояниями отдельных кубитов и квантовых регистров базируется на использовании высокочастотных модулированных импульсов, несущая частота которых близка к частоте перехода между базисными состояниями «искусственных атомов» и «молекул» (техника Раби). В данной работе развивается альтернативная концепция управления сверхпроводниковыми кубитами, основанная на идее быстрого возбуждения квантовой системы путем применения уединенных немодулированных импульсов. На основе численного моделирования продемонстрировано формирование запутанных состояний Белла в двухкубитном сверхпроводниковом регистре под действием импульсов поля, полученных с использованием устройств быстрой одноквантовой логики. Томография квантовых состояний выполнена на базе решения уравнения для матрицы плотности. Показано, что с использованием техники «униполярных импульсов» можно ускорить формирование перепутанных состояний (на пикосекундных временах) с достоверностью (fidelity) 95–98 %. Продemonстрировано выполнение основных квантовых алгоритмов: Дойча – Йोजи с точностью более 98 % и Гровера с точностью 93 %.

DOI: 10.31857/S0044451020100016

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе [1] было продемонстрировано, что программируемый квантовый компьютер при решении специально разработанной тестовой задачи способен превзойти один из самых мощных суперкомпьютеров мира. Это свидетельствует о существенном прогрессе в развитии квантовых технологий, нацеленных на создание квантовых компьютеров, позволяющих решать широкий класс прикладных задач. Как известно, принципиальная пробле-

ма, возникающая при работе квантовых компьютеров, обладающих небольшим числом (50–100) кубитов, связана с воздействием на квантовую систему (на регистры кубитов) окружающей среды, включающей устройства приготовления состояний кубитов, управления ими и их измерения, которое пока не удается устранить или должным образом контролировать. В связи с этим для описания подобных систем введено понятие зашумленных квантовых устройств (Noisy Intermediate-Scale Quantum technology) [2], что отражает временную фиксацию доступных масштабов, а также указывает направление поиска путей для создания полностью контролируемых массивов кубитов, например, путем коррекции ошибок с помощью встраивания в чипы дополнительных контролирующих «искусственных ато-

\* E-mail: mar.denisenko@gmail.com

\*\* E-mail: nvklenov@gmail.com

\*\*\* E-mail: asatanin@gmail.com

мов». Стабильная манипуляция квантовыми состояниями имеет важное значение для квантовой обработки информации. Несмотря на зашумленность доступных устройств (создаваемых, например, компаниями IBM или Rigetti), были предприняты попытки получения полезной информации при моделировании динамики спиновых цепочек с различной топологией [3, 4].

Вместе с тем разработка устройств контролируемой квантовой динамики ставит ряд принципиально новых вопросов, которые в последнее время активно обсуждаются в литературе. Одна из проблем связана с методом контроля над состояниями квантовых регистров. В настоящее время для записи и управления применяется техника Раби, которая предполагает использование высокочастотных модулированных импульсов, несущая частота которых близка к частоте перехода между базисными состояниями контролируемых «искусственных атомов» и «молекул» [5]. Например, для сверхпроводниковых кубитов несущая частота составляет несколько гигагерц; успехи техники Раби для данных кубитов отражены в работах [6, 7], где констатируется, что однокубитные операции могут осуществляться с достоверностью 99.9 % [7, 8], тогда как двухкубитные гейты реализуются с достоверностью 99 % [9, 10]. Однако, несмотря на впечатляющие результаты, времена декогеренции в современных регистрах кубитов достигают порядка сотен пикосекунд [6] и проблема ускорения реализации квантовых одно- и двухкубитных операций по-прежнему является актуальной.

В связи с этим в настоящее время активно развивается альтернативная схема управления сверхпроводниковыми кубитами, в основе которой лежит идея быстрого возбуждения квантовой системы путем применения уединенных немодулированных импульсов. Было показано, что для создания таких импульсов пикосекундной длительности (что на пару порядков меньше, чем длительность типичных операций в технике Раби) могут использоваться схемы сверхпроводниковой быстрой одноквантовой логики (БОК) [11–13]. Первоначально данная техника разрабатывалась для создания быстродействующих и энергоэффективных классических вычислительных комплексов [14]. В последнее время сделаны попытки адаптировать варианты БОК-схем для управления регистрами кубитов с использованием последовательностей пикосекундных униполярных импульсов, хотя общая длительность таких операций все равно превышает 1 нс [15–17].

Основная цель данной статьи — разработка новых методов имплементации БОК-схем для управ-

ления в сверхпроводниковом потоковом двухкубитном регистре (пара слабо взаимодействующих кубитов) для ускорения квантовых алгоритмов. В отличие от упомянутого выше подхода [15–17], мы рассматриваем воздействие малого числа импульсов для реализации квантовых операций и алгоритмов. Это позволяет уменьшить нежелательное обратное влияние системы управления на кубит, уменьшить характерную длительность операций и реализовать оптимальный контроль за счет подбора параметров управляющего униполярного импульса. При этом переход к более энергоэффективной адиабатической сверхпроводниковой логике позволяет не только осуществлять однокубитные гейты, но и создавать перепутанные состояния (entangled states) пар кубитов с высокой точностью.

В работе на классическом компьютере выполнено численное моделирование процесса томографии (восстановления) квантовых запутанных состояний Белла и реализованы, униполярными пикосекундными импульсами, простейшие квантовые алгоритмы (Дойча–Йожи и Гровера) на двухкубитном сверхпроводниковом регистре. Показано, что перепутанные состояния можно реализовать несколькими униполярными импульсами на пикосекундных временах, что в несколько раз быстрее техники Раби на основе протяженных модулированных сигналов [6]. При этом достоверность создания состояний Белла составляет 95–98 %, а исполнения квантовых алгоритмов 93–98 %.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РЕАЛИЗАЦИИ КВАНТОВЫХ АЛГОРИТМОВ УНИПОЛЯРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

В случае управления изолированной квантовой системой (квантовым регистром), находящейся в чистом состоянии, можно говорить об управляемой унитарной эволюции. Если же система не замкнута или подвержена воздействию шума, то она описывается матрицей плотности, в общем случае подчиняющейся квантовому кинетическому уравнению, которое, в частности, описывает и процессы потери когерентности состояний кубитов.

Пусть в начальный момент времени изолированная система приготовлена в начальном состоянии,  $|\psi(0)\rangle$ , тогда временная эволюция системы, т. е. все операции (гейты), описываются уравнением

$$i\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad \hbar = 1, \quad (1)$$

где  $H(t)$  — гамильтониан системы, зависящий от времени. В общем виде решение (1) запишется как  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ , где введен оператор эволюции

$$U(t) = \hat{P} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 H(t_1) \right), \quad (2)$$

где  $\hat{P}$  — оператор хронологического упорядочения.

Сначала введем необходимые для анализа квантовых алгоритмов обозначения и понятия на примере однокубитных операций. Динамика «уединенного» потокового кубита во внешнем поле описывается стандартным гамильтонианом [18] в двухуровневом приближении:

$$H^{(1)}(t) = -\frac{1}{2} \left( \Delta \sigma_z^{(1)} + \varepsilon(t) \sigma_x^{(1)} \right), \quad (3)$$

где  $\varepsilon(t)$  — управляющее внешнее поле,  $\Delta$  — параметр туннельного расщепления, что соответствует типичной частоте перехода (для сверхпроводникового потокового кубита  $\Delta \sim 100$  МГц–10 ГГц, см. [6]) между базисными уровнями кубита:  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_z^{(1)}$  — матрицы Паули.

Как известно, состояние кубита  $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle$  ( $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = e^{i\phi} \sin \theta$ ) задается вектором  $\mathbf{R}(t) = \langle \psi(t) | \boldsymbol{\sigma} | \psi(t) \rangle$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)}\}$ , на сфере Блоха  $\mathbf{R}^2 = 1$ , положение которого определяется полярным  $\theta$  и азимутальным  $\phi$  углами. При этом простейшие однокубитные операции можно интерпретировать как перевод конца вектора из одной точки на сфере Блоха в другую. Данные операции представляются через три независимых вращения вокруг осей в спиновом пространстве (на сфере Блоха):  $x, y, z$ -вращения. Комбинации вращений Паули позволяют создать суперпозицию состояний кубита или осуществить операцию Адамара [18]. В технике Раби однокубитные операции можно выполнить с использованием микроволновых импульсов определенной длительности, которые «подаются» на кубит посредством специального резонатора [7, 8].

Ранее нами был разработан метод, который позволяет выполнить однокубитные операции с использованием одиночных униполярных импульсов без радиочастотной несущей [19–22]. Кратко изложим основную идею. Пусть на кубит поступает прямоугольный импульс длительности  $\tau$ , который описывается функцией вида

$$\varepsilon(t) = Af(t), f(t) = \Theta(t)\Theta(\tau - t), \quad (4)$$

где  $\Theta(t)$  — функция Хевисайда,  $A$  — амплитуда воздействия. Унитарная эволюция кубита на времени действия импульса  $\tau$  определяется выражением

$$U^{(1)} = \sum_{k=1}^2 |\nu_k\rangle e^{i\lambda_k \tau} \langle \nu_k| = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega\tau}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} & \frac{iA}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \\ \frac{iA}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} & \cos \frac{\Omega\tau}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + A^2}$  и  $H^{(1)}(t=0)|\nu_k\rangle = \lambda_k|\nu_k\rangle$ . В этом случае эволюция системы существенно зависит от двух параметров импульса: амплитуды  $A$  и длительности  $\tau$ . При этом вероятность перехода между базисными состояниями  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  равна

$$W_{|0\rangle \rightarrow |1\rangle} = \frac{A^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2}, \quad (6)$$

что формально совпадает с общеизвестной формулой Раби. Отличие состоит лишь в том, что роль частоты Раби в случае униполярного импульса играет его амплитуда, а отстройка по частоте между резонатором и кубитом заменена туннельным расщеплением,  $\Delta$ . Используя технику управления состояниями кубита униполярным импульсом, можно осуществить любое вращение на сфере Блоха, т. е. выполнить любую однокубитную операцию, если выполняются следующие условия для параметров импульса:  $A \gg \Delta$  и  $\Delta\tau \ll 1$  [19–23].

Для реализации квантовых алгоритмов требуется выполнение не только однокубитных, но и двухкубитных квантовых операций. Рассмотрим их на примере простейшего квантового регистра, состоящего из двух взаимодействующих кубитов  $Q_1$  и  $Q_2$  [6, 24]. Гамильтониан такой системы определяется как тензорное произведение гамильтонианов подсистем (единичных кубитов)  $H^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), определяемых выражением (3), и слагаемого  $H_{int}$ , отвечающего за взаимодействие двух подсистем с параметрически перестраиваемой связью  $J(t)$ . Полный гамильтониан двухкубитной системы имеет вид

$$H(t) = H^{(1)}(t) \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes H^{(2)}(t) + H_{int}, \quad (7)$$

где  $I^{(i)}$  — единичные матрицы в двумерном гильбертовом пространстве,  $\otimes$  — тензорное произведение. Параметрическое взаимодействие между кубитами выбрано в виде  $H_{int} = -\frac{1}{2}J(t)\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ , см. [6]. Выражение (7) для наглядности можно представить в матричном виде:

$$H(t) = -\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \Delta_1 + \Delta_2 & \varepsilon_2(t) & \varepsilon_1(t) & J(t) \\ \varepsilon_2(t) & \Delta_1 - \Delta_2 & J(t) & \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_1(t) & J(t) & -\Delta_1 + \Delta_2 & \varepsilon_2(t) \\ J(t) & \varepsilon_1(t) & \varepsilon_2(t) & -\Delta_1 - \Delta_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Далее предполагаем, что управление состояниями кубитов и организация взаимодействия между ними осуществляется внешними немодулированными импульсами, которые можно аппроксимировать прямоугольными импульсами вида

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= A_i \Theta(t - t_{in,i}) \Theta(t_{off,i} - t), \\ J(t) &= J \Theta(t - t_{in,J}) \Theta(t_{off,J} - t), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A_i$  — амплитуды униполярных полей, действующих на каждый из кубитов в паре с длительностями  $\tau_i = \tau_{off,i} - \tau_{in,i}$ ; а  $J$  — амплитуда перестраиваемого взаимодействия между кубитами. Отметим, что данное взаимодействие может быть реализовано, например, на основе адиабатического квантового параметрона [25, 26] в виде шунтированного индуктивностью сверхпроводящего интерферометра [27]. При этом происходит передача магнитного потока от кубита к кубиту лишь под действием управляющего импульса.

При отсутствии внешнего воздействия и связи ( $\varepsilon_i(t) = 0$ ,  $J(t) = 0$ ) система кубитов  $Q_1$  и  $Q_2$  представляет собой четырехуровневую квантовую систему, состояние которой удобно определить в вычислительном базисе [18] как тензорное произведение волновых функций отдельных кубитов  $|\psi_i(0)\rangle = \alpha_i |0_i\rangle + \beta_i |1_i\rangle$  (индекс  $i = 1, 2$  соответствует номеру кубита), а именно:  $|\psi(0)\rangle = |\psi_1(0)\rangle \otimes |\psi_2(0)\rangle$ . При этом состояния взаимодействующих кубитов можно представить в виде

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \chi_1(t) |0_1 0_2\rangle + \chi_2(t) |0_1 1_2\rangle + \\ &+ \chi_3(t) |1_1 0_2\rangle + \chi_4(t) |1_1 1_2\rangle, \end{aligned}$$

где  $\sum_{j=1}^4 |\chi_j(t)|^2 = 1$ .

В случае двух кубитов важной задачей становится организация короткой последовательности управляющих униполярных импульсов (9) для выполнения контролируемых манипуляций в системе. При этом важно найти области параметров воздействия (амплитуд, длительностей) для реализации требуемых двухкубитных операций, в частности, для создания перепутанных (белловских) состояний, а также для выполнения квантовых алгоритмов Дойча–Йожи и Гровера.

Когда на систему связанных кубитов поступает несколько управляющих импульсов, возникают интерференционные эффекты. Данные явления можно проиллюстрировать следующим образом: пусть в начальный момент времени на кубит  $Q_1$  поступает прямоугольный импульс  $\varepsilon_1(t)$  длительностью  $\tau_1$  (при этом  $\varepsilon_2(t) = 0$  и  $J(t) = 0$ ), в этом случае оператор эволюции двухкубитной системы  $U_{\tau_1}^{(12)}$  определен как  $U_{\tau_1}^{(12)} = U^{(1)} \otimes U^{(2)}$ , где  $U^{(1)}$  — унитарная матрица кубита  $Q_1$  вида (5),  $U^{(2)} = e^{-i\Delta\tau\sigma_z}$  — оператор эволюции второго кубита  $Q_2$  при отсутствии возбуждения. Явный вид матрицы  $U_{\tau_1}^{(12)}$  приведен в Приложении А.

Далее будем полагать, что между кубитами включается взаимодействие  $J(t)$ , согласно (9), на временном интервале  $\tau_J$ . При этом область определения четырехкомпонентной волновой функции двухкубитной системы можно разбить на три подобласти:  $t < t_{in,J}$ ,  $t_{in,J} \leq t \leq t_{off,J}$  и  $t > t_{off,J}$ , в каждой из которых компоненты волновой функции представляют собой суперпозицию четырех волн, распространяющихся вперед и назад во времени:

$$\chi_j(t) = \sum_{k=1}^4 c_{jk} \nu_k e^{-i\lambda_k t}, \quad (10)$$

где  $\lambda_k$  — собственные значения и  $\nu_k$  — собственные векторы гамильтониана (7). Коэффициенты  $c_{jk}$  определяются путем сшивки волн на «границах» импульса, т. е. в моменты его включения и выключения. Выражение (10) показывает, что после действия импульса  $\tau_J$  каждая компонента функции определяется суперпозицией четырех интерферирующих слагаемых, следовательно, населенность каждой нормальной моды будет осциллировать. При этом оператор эволюции двухкубитной системы после включения взаимодействия можно записать в виде

$$U_{\tau_J}^{(12)} = \sum_{k=1}^4 |\nu_k\rangle e^{-i\lambda_k \tau_J} \langle \nu_k|. \quad (11)$$

Явный вид оператора (11) приведен в Приложении А.

После выключения взаимодействия между кубитами на интервале времени  $\tau_{off,1} < t < \tau_{off,2}$  на кубит  $Q_2$  действует прямоугольный импульс  $\varepsilon_2(t)$  (с амплитудой  $A_2 = A$ ). На основе аналогичных рассуждений, согласно (10), (11), найден явный вид оператора эволюции  $U_{\tau_2}^{(12)}$  в ходе воздействия на  $Q_2$ .

Согласно описанной схеме управления под действием трех униполярных импульсов —  $\varepsilon_1(\tau_1)$ ,  $J(\tau_J)$ ,  $\varepsilon_2(\tau_2)$  — динамика состояния двухкубитной системы может быть определена как



$$|\psi(t)\rangle = U_{\tau_2}^{(12)} U_{\tau_J}^{(12)} U_{\tau_1}^{(12)} |\psi(0)\rangle \equiv U^{(12)} |\psi(0)\rangle.$$

Предполагалось, что в начальный момент времени система приготовлена в основном состоянии  $|\psi(0)\rangle = |0_1 0_2\rangle$ , а далее рассчитываются вероятности переходов между базисными состояниями двухкубитной системы  $W_x = |\langle x | U^{(12)} | 0_1 0_2 \rangle|^2$ , где  $|x\rangle$  — одно из базисных состояний  $|0_1 0_2\rangle$ ,  $|0_1 1_2\rangle$ ,  $|1_1 0_2\rangle$ ,  $|1_1 1_2\rangle$ , а индекс « $x$ »,  $x = 1, 2, 3, 4$ , нумерует для краткости данные состояния. При этом нами были найдены аналитические выражения для вероятностей населенностей четырехуровневой системы, которые приведены в Приложении А. Кратко проанализируем полученные результаты. Как показано выше, до включения взаимодействия между кубитами управляющий импульс  $\varepsilon_1(t)$ , действующий на  $Q_1$ , реализует полный набор однокубитных операций (населенности  $|0_1 0_2\rangle$  и  $|1_1 0_2\rangle$  осциллируют согласно формуле (6)). Для реализации двухкубитных операций необходимо осуществлять выбор оптимальных амплитуд и длительностей униполярного воздействия. Согласно полученным аналитическим выражениям (см. Приложение А) осцилляции населенностей уровней кубитов зависят от следующих комбинаций параметров:  $\tau_{1,2}\Omega$ ,  $\tau_J\Omega_J$ ,  $\tau_J J$  (где  $\Omega = \sqrt{A^2 + \Delta^2}$ ,  $\Omega_J = \sqrt{J^2 + 4\Delta^2}$ ). Рассмотрим простой случай двух идентичных импульсов  $\varepsilon_{1,2}(t)$  ( $A_1 = A_2 = A$  и  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ). Проводя преобразования выражений (А.1)–(А.3), можно заметить, что при данной последовательности импульсов подавлены интерференционные слагаемые, отвечающие за возбуждения на промежуточные уровни, а вероятности имеют вид

$$W_{2,3} = \frac{A^2}{4\Omega^4\Omega_J} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} (\Omega^2 + \Delta^2 + A^2 \cos \Omega\tau) \times \\ \times (J^2(1 - \cos \tau_J\Omega_J) + \Omega_J^2 \cos \tau_J J), \quad (12)$$

$$W_4 = \frac{A^4}{\Omega^4} \cos^2 \frac{\tau_J J}{2} \sin^4 \frac{\Omega\tau}{2}.$$

Считая туннельные энергии кубитов малым параметром ( $\Delta \ll A, J$ ), выражения (12) можно привести к простому виду:

$$W_{2,3} = \frac{1}{4} \sin^2(A\tau) \quad \text{и} \quad W_4 = \cos^4 \frac{\tau_J J}{2} \sin^4 \frac{A\tau}{2}.$$

Полученные выражения наглядно демонстрируют тот факт, что максимальное значение населенностей промежуточных состояний кубитов равно  $1/4$ :  $\max[W_{2,3}] = 0.25$ . Это означает, что при идентичных импульсах  $\varepsilon_{1,2}(t)$  невозможно сформировать перепутанные состояния Белла. Однако, как будет показано на базе численного моделирования в разд. 3–5, униполярные импульсы различной длительности,

$\tau_1 \neq \tau_2$ , позволяют реализовать полный набор двухкубитных операций.

Для учета эффектов декогеренции, влияющих на результаты эволюции в квантовой системе, можно ограничиться рассмотрением простейшей модели шума с гладким спектром. При этом будут сделаны стандартные приближения при выводе уравнения для матрицы плотности [28]: 1) марковское приближение: бозонные резервуары настолько большие, что эффект влияния состояния кубита на состояние резервуара минимален, т.е. время корреляций термостата много меньше времен релаксации каждого из кубитов; 2) борновское приближение: взаимодействие подсистемы (кубита) с термостатом мало (учет во втором порядке по теории возмущений). При этом получаем уравнение для матрицы плотности двух кубитов:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] + \frac{\gamma_1}{2} (\sigma_z^{(1)} \otimes I^{(2)} \rho \sigma_z^{(1)} \otimes I^{(2)} - \rho) + \\ + \frac{\gamma_2}{2} (I^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \rho I^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} - \rho), \quad (13)$$

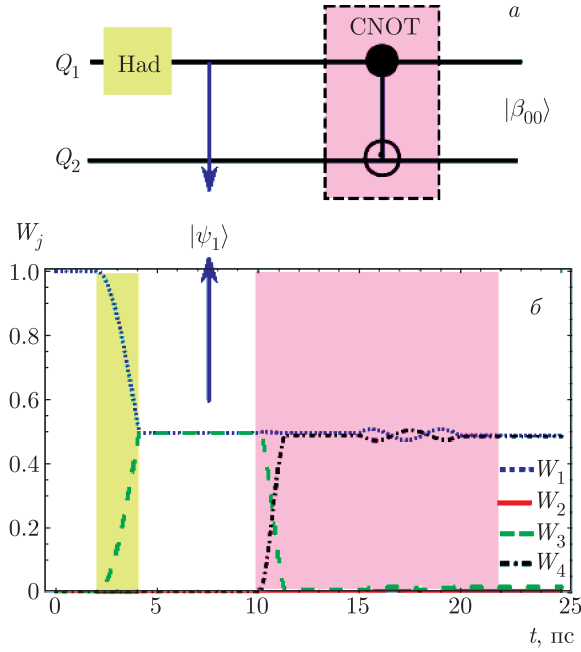
где  $\rho$  — матрица плотности двух связанных кубитов,  $\gamma_i$  — скорости релаксации  $i$ -го кубита,  $H$  — гамильтониан системы в форме (8). Уравнение (13) может быть решено численно, см. подробнее о методе решения в Приложении В.

### 3. ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ И ТОМОГРАФИЯ СОСТОЯНИЙ БЕЛЛА

Для демонстрации возникновения квантовой запутанности в рассматриваемом двухкубитном квантовом процессоре, управляемом униполярными импульсами, опишем протокол приготовления состояния Белла [18]:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \\ |\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \\ |\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \\ |\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle). \quad (14)$$

Данные состояния образуют ортонормированный базис, по которому можно разложить любое чистое состояние двух кубитов. Квантовый характер корреляции имеет важное свойство: при проецировании одной части системы в одно из двух базисных состояний, другая часть как бы «мгновенно» приобретает определенное значение, несмотря на то,



**Рис. 1.** а) Квантовая схема, создающая состояние Белла. б) Вероятности населенностей уровней  $W_j(t)$  двухкубитной системы ( $\Delta_1 = 0.1$  ГГц и  $\Delta_2 = 0.12$  ГГц) при реализации состояния Белла  $|\beta_{00}\rangle$ . На рисунке выделен временной интервал для реализации гейта Адамара «Hад» унитарным импульсом  $\varepsilon_1(t)$  с амплитудой  $A_1 = 0.75$  ГГц и длительностью  $\tau_1 = 2.1$  пс, а также выделен временной интервал для выполнения двухкубитной операции «CNOT», при этом параметры унитарных импульсов:  $A_1 = 2.2$  ГГц,  $A_2 = 1.5$  ГГц,  $\tau_1 = 1.3$  пс,  $\tau_2 = 4.95$  пс,  $t_{in,1} = 10$  пс,  $t_{in,2} = 15$  пс,  $J = 0.1$  ГГц,  $\tau_J = 10$  пс,  $\gamma_1^{-1} = \gamma_2^{-1} = 100$  мкс

что она могла быть удалена на произвольное расстояние.

Состояния Белла можно подготовить, используя комбинацию однокубитного гейта Адамара «Hад» и двухкубитного гейта «CNOT», что схематично показано на рис. 1а. Принципы реализации с использованием БОК-схем однокубитных гейтов были подробно нами изучены в работах [19–21], а двухкубитных — в [21, 22]. В настоящей работе в качестве примера подробно продемонстрируем реализацию синглетного состояния Белла (14)  $|\beta_{00}\rangle$ , используя унитарные пикосекундные импульсы.

Пусть в начальный момент времени кубиты  $Q_1$  и  $Q_2$  инициализированы в основном состоянии:  $|\psi(0)\rangle = |0_1 0_2\rangle$  (показано точками на рис. 1б до включения унитарного воздействия  $t < 2$  пс). Далее на первый кубит  $Q_1$  подается один унитарный импульс  $\varepsilon_1(t)$  на временах  $2 \leq t \leq 4.1$  пс, при этом  $J(t) = 0$ . Данное внешнее воздействие реализует выполнение гейта «Hад»,  $C_{Hад} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Получен-

ное при этом состояние двухкубитной системы  $|\psi_1\rangle$  (отмечено вертикальной стрелкой на рис. 1) можно определить как

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1\rangle + |1_1\rangle) \otimes |0_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

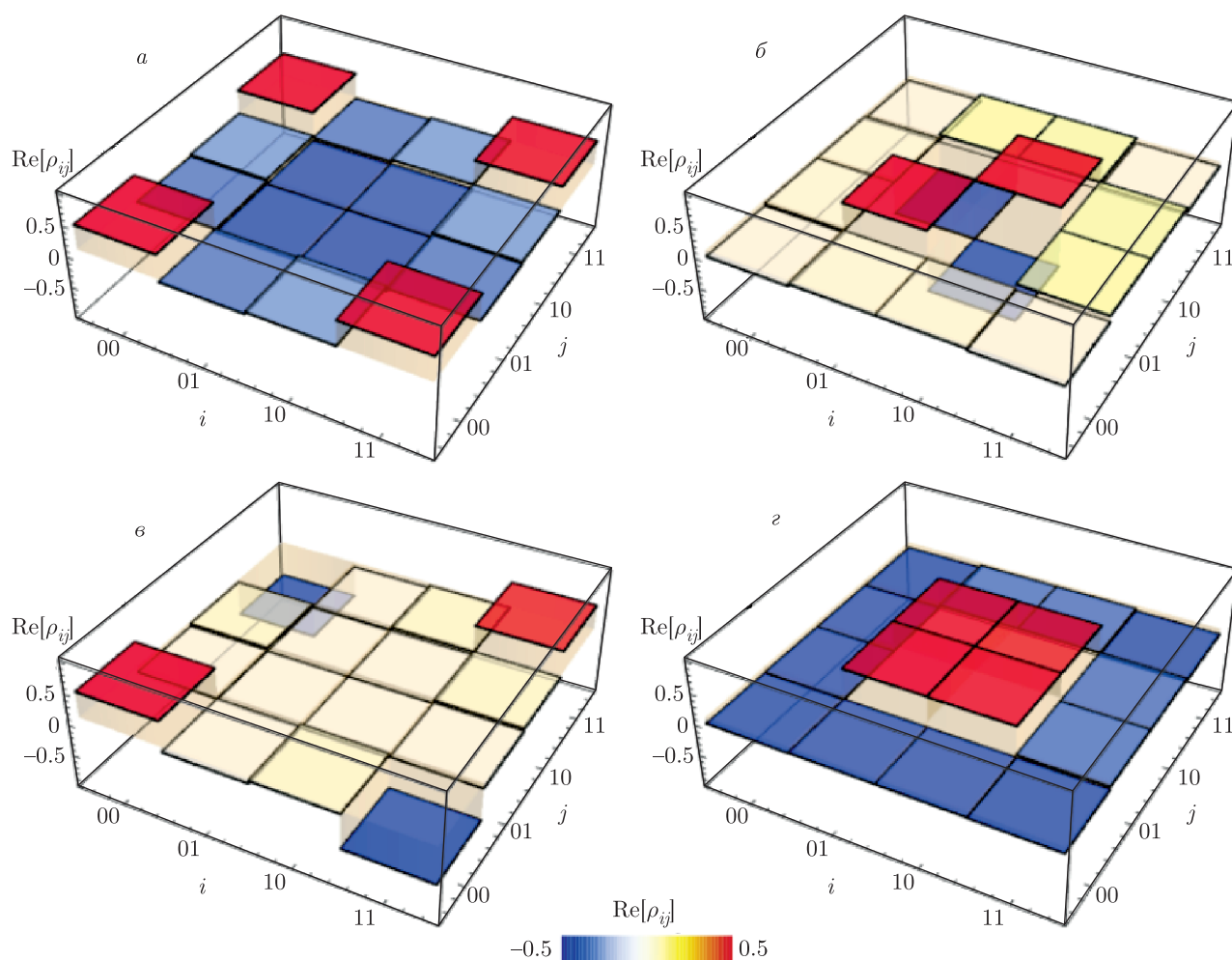
Далее с помощью двух унитарных импульсов  $\varepsilon_1(t)$  и  $\varepsilon_2(t)$ , действующих на кубиты  $Q_1$  и  $Q_2$ , и одного импульса  $J(t)$ , воздействующего на элемент связи между кубитами, была реализована двухкубитная операция «CNOT» с соответствующей матрицей  $C_{CNOT}$  на временах  $10 < t < 20$  пс, в результате чего готовится синглетное состояние Белла:

$$C_{CNOT} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\beta_{00}\rangle.$$

Подавая на «вход» кубитов различные комбинации начальных состояний, можно подготовить любое требуемое состояние Белла. Так, например,  $|\psi(0)\rangle = |0_1 1_2\rangle \rightarrow |\beta_{01}\rangle$ ,  $|\psi(0)\rangle = |1_1 0_2\rangle \rightarrow |\beta_{10}\rangle$ ,  $|\psi(0)\rangle = |1_1 1_2\rangle \rightarrow |\beta_{11}\rangle$ . При изучении запутанных состояний важно анализировать не только населенности уровней  $W_j(t)$ , т.е. диагональные элементы матрицы плотности (см. выражение (В.2) в Приложении В), но и недиагональные элементы, которые как раз и отвечают за запутанность в системе. Для этого в работе была проведена реконструкция (томография) квантовых состояний Белла (14). Матрица плотности восстанавливается путем измерения всех «двухспиновых» вероятностей в базисе  $\sigma_\alpha^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Действительные компоненты восстановленных элементов матрицы плотности для четырех состояний Белла (14) показаны на рис. 2. При этом достоверность создания состояний Белла  $F_{kl} = \langle \beta_{kl} | \rho | \beta_{kl} \rangle$  ( $k, l = 0, 1$ ) между измеренной матрицей плотности  $\rho$  и целевым состоянием Белла  $|\beta_{kl}\rangle$ , согласно (14), варьируется от 95 % до 98 %, что свидетельствует о запутанности в системе и хорошей точности создания состояний Белла с помощью унитарного воздействия.

#### 4. КВАНТОВЫЙ АЛГОРИТМ ДОЙЧА – ЙОЖИ

Рассмотрим процесс реализации квантового алгоритма Дойча – Йोजи [18] в сверхпроводниковом



**Рис. 2.** Квантовая томография состояний Белла ( $|\beta_{00}\rangle$  — а,  $|\beta_{10}\rangle$  — б,  $|\beta_{11}\rangle$  — в,  $|\beta_{01}\rangle$  — г) для действительной компоненты матрицы плотности  $\text{Re}[\rho_{ij}]$ , формирование которых реализуется униполярными импульсами согласно схеме на рис. 1а. Точность создания состояний Белла:  $F_{00} = 95\%$ ,  $F_{10} = 98\%$ ,  $F_{01} = 97.5\%$  и  $F_{11} = 96.5\%$ . Параметры системы и импульсы идентичны тем, что приведены на рис. 1

двухкубитном регистре ( $Q_1$  и  $Q_2$ ) по средствам униполярного воздействия. Суть данного алгоритма состоит в определении класса булевых функций  $f_i$ . При этом две функции  $f_1$  и  $f_2$  принимают либо значение 0, либо 1 при любых значениях аргумента и называются постоянными, а две другие  $f_3$  и  $f_4$  для половины области определения принимают значение 0, для другой половины 1 и имеют название сбалансированные. Квантовый алгоритм Дойча–Йожи позволяет решить задачу об определении типа функции за одно действие на двухкубитном регистре, тогда как классический алгоритм требует для выполнения два действия.

Для начала инициализируем начальное состояние  $|\psi(0)\rangle = |\psi_1(0)\rangle \otimes |\psi_2(0)\rangle$  пары кубитов, так

что, например, первый кубит  $Q_1$  в основном состоянии  $|\psi_1(0)\rangle = |0_1\rangle$ , а второй  $Q_2$  — в возбужденном  $|\psi_2(0)\rangle = |1_2\rangle$ . Далее на начальное состояние системы воздействует последовательность пары униполярных импульсов  $\varepsilon_{1,2}(t)$  вида (9), реализующая пару гейтов Адамара:

$$C_{Had}^{\otimes 2} = C_{Had} \otimes C_{Had} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате этого получается равновероятностная суперпозиция всех возможных значений кубитов. Далее на систему воздействует Оракул  $O_{f_i}$ , который и отвечает за распознавание типа функции  $f_i$ . После

воздействия Оракула томография квантового состояния позволит определить тип функции: постоянная или сбалансированная. Если функция  $f$  постоянная, то  $O_{f_1} = C_I$  или  $O_{f_2} = C_I \otimes C_{NOT}$ , где  $C_{NOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  — однокубитная операция «NOT», а  $C_I$  — операция, не изменяющая состояния системы. В случае сбалансированной функции унитарный оператор преобразования имеет следующий вид:  $O_{f_3} = C_{CNOT}$  и  $O_{f_4} = C_{CNOT}(C_{NOT} \otimes I)$ . Для проектирования результата необходимо снова подействовать гейтом Адамара  $C_{Had}^{\otimes 2}$ . В результате измерения после внешнего воздействия если населенность системы не изменилась, то функция постоянная, иначе функция — сбалансированная и состояние кубита  $Q_1$  инвертировалось:  $|\psi(0)\rangle = |0_1 1_2\rangle \rightarrow |1_1 1_2\rangle$ .

На рис. 3 показана динамика поведения населенностей уровней двух взаимодействующих кубитов при диагностировании типа булевой функции: постоянная (рис. 3б) или сбалансированная (рис. 3в). Реализация алгоритма Дойча–Йожи была проведена с помощью униполярного воздействия. Выполнение описанного выше алгоритма осуществлялось за счет возбуждения кубитов  $Q_1$  и  $Q_2$  импульсами  $\varepsilon_i(t)$  вида (9), а перепутывание состояний проводилось за счет действия униполярного импульса  $J(t)$ , длительность которого совпадала с длительностью возбуждающих кубитных импульсов,  $\tau_i = \tau_J$ . В остальное время взаимодействие между кубитами выключалось,  $J(t) = 0$  (см. схему подачи импульсов на систему на рис. 3а). При этом для проведения двух гейтов Адамара  $C_{Had}^{\otimes 2}$  на систему взаимодействующих кубитов последовательно воздействовали два униполярных импульса, сдвинутых друг относительно друга на оси времени. В результате система перешла в запутанное состояние, когда все четыре уровня заселены с равными вероятностями:  $W_i(t) = 0.25$  ( $i = 1-4$ ). Далее в результате унитарного воздействия, характеризующего постоянную функцию, квантовое состояние системы претерпело фазовый поворот, в результате которого после последующего преобразования Адамара населенность системы не изменилась (см. рис. 3б). При этом населенность второго состояния системы кубитов после импульсного воздействия составила  $W_2 = 0.98$ . Аналогичные операции были проведены и для сбалансированной функции, при этом произошло перераспределение населенностей (операция «CNOT»), так что najwyżший уровень заселен с вероятностью  $W_4 = 0.98$  (см. рис. 3в).

В процессе численного решения уравнения для матрицы плотности (13) для реализации квантового алгоритма Дойча–Йожи униполярными импуль-

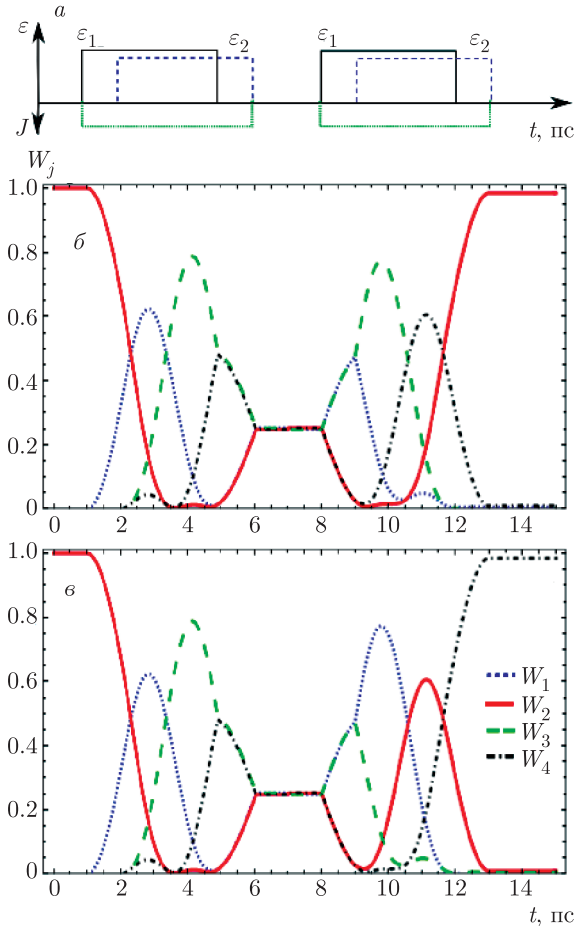
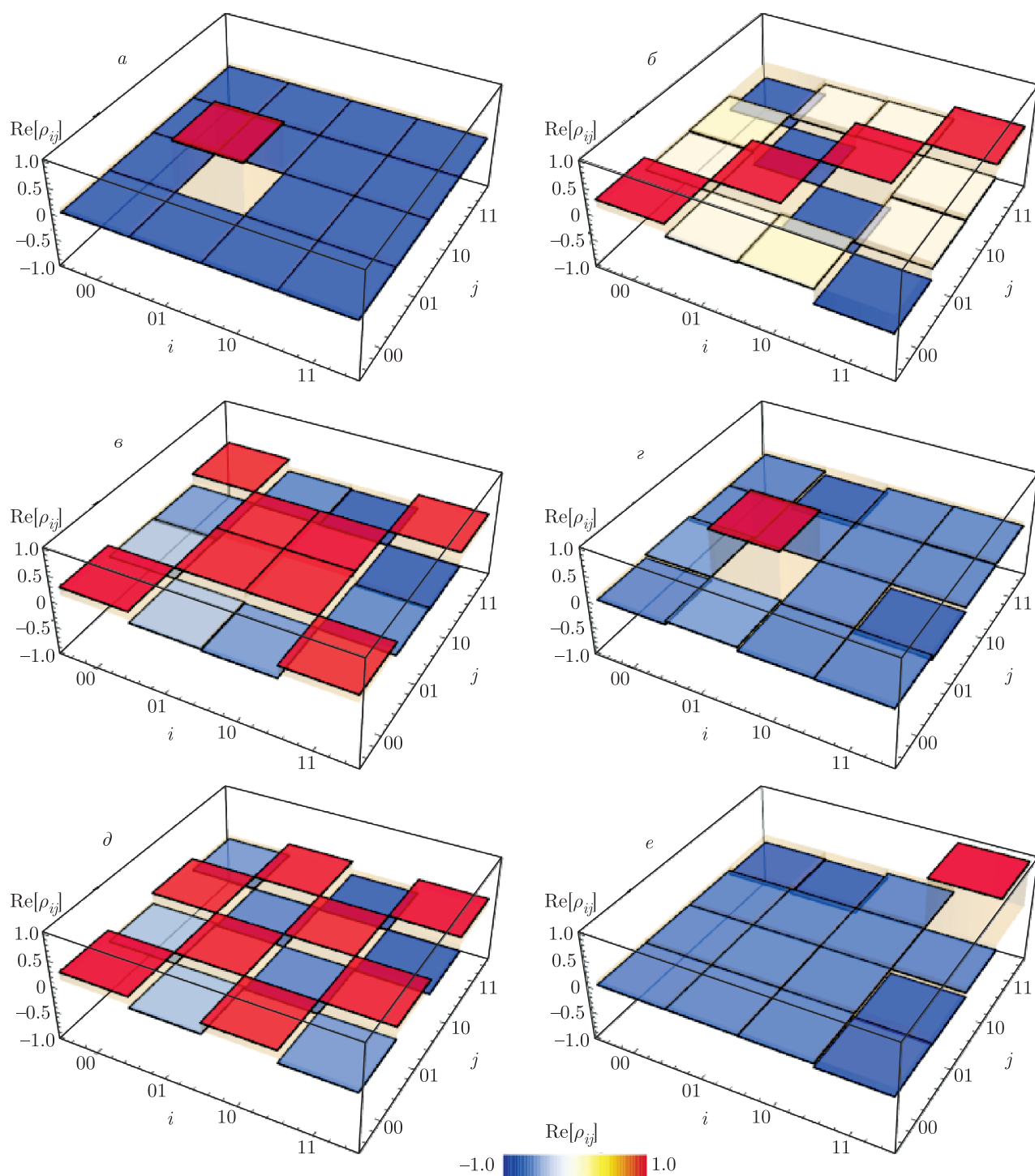


Рис. 3. Квантовая схема подачи униполярных импульсов на систему двух взаимодействующих кубитов (а), реализующая алгоритм Дойча–Йожи. Временные зависимости населенностей уровней двух кубитов под действием униполярных импульсов, реализующих квантовый алгоритм Дойча–Йожи для постоянной (б) и сбалансированной (в) функций. Параметры кубитов и импульсов:  $\Delta_1 = 0.1$  ГГц,  $\Delta_2 = 0.12$  ГГц,  $J = 0.01$  ГГц, импульс на  $Q_1$  —  $A_1 = 1.2$  ГГц ( $1 \text{ пс} \leq t \leq 5 \text{ пс}$  и  $8 \text{ пс} \leq t \leq 12 \text{ пс}$ ) и импульс на  $Q_2$  —  $A_2 = 1.15$  ГГц ( $2 \text{ пс} \leq t \leq 6 \text{ пс}$  и  $9 \text{ пс} \leq t \leq 13 \text{ пс}$ ),  $\gamma_1^{-1} = \gamma_2^{-1} = 100$  мкс

сами нами была проведена томография (восстановление) квантового состояния двухкубитной системы. На рис. 4 показана действительная часть оператора матрицы плотности в момент инициализации (а), после гейтов Адамара (б), в конце воздействия Оракула для постоянной (в) и сбалансированной (д) функций. Также представлены результаты моделирования в момент проектирования (измерения) конечного состояния (з, е). До воздействия Оракула поведение системы полностью идентично для обоих типов функции (рис. 4а, б). Отметим, что хотя





**Рис. 4.** Квантовая томография состояний действительной компоненты матрицы плотности  $\text{Re}[\rho_{ij}]$  в начальный момент времени (a), после гейтов Адамара (б), после воздействия Оракула  $O_{f_1}$  (в) и  $O_{f_3}$  (д), проектирование состояния после завершения алгоритма для постоянной (е) и сбалансированной (е) функций. Параметры системы и импульсов аналогичны тем, что приведены на рис. 3

состояние двухкубитной системы и характеризуется равными населенностями уровней (диагональные элементы оператора матрицы плотности), на рис. 3 это временной интервал от 6 пс до 8 пс. Однако реконструкция квантового состояния показывает их существенное различие на рис. 4в,д. Именно благодаря вкладам недиагональных элементов, отвечающих за перепутанные состояния в двухкубитной системе, повторное униполярное воздействие, реализующее гейты Адамара, «распутывает» состояние квантовой системы и диагностирует тип функции. При этом численное моделирование показало, что достоверность выполнения квантового алгоритма Дойча–Йожи униполярными импульсами составляет 98 %.

## 5. КВАНТОВЫЙ АЛГОРИТМ ГРОВЕРА

Алгоритм Гровера решает задачу неструктурированного поиска, когда есть неупорядоченный набор данных и требуется найти в нем какой-то один элемент, удовлетворяющий определенному требованию. Данный алгоритм использует свойство квантовой интерференции для того, чтобы найти значения некоторого параметра, на котором заданная функция обладает определенными свойствами [18].

Кратко опишем суть алгоритма поиска Гровера, который обеспечивает оптимальный метод для нахождения уникального аргумента  $x_0$  булевой функции от  $n$  переменных  $f(x)$ , такого что  $f(x_0) = 1$  и  $f(x) = 0$  для всех остальных значений  $x$ . Классические алгоритмы подобного поиска требуют прямого перебора всех вариантов  $N = 2^n$ , в то время как использование квантового параллелизма и вероятностного характера квантовых вычислений сокращает количество перебираемых вариантов до  $(\pi/4)\sqrt{N}$ .

Для рассматриваемого двухкубитного регистра ( $Q_1$  и  $Q_2$ ) есть четыре значения  $x \in \{00, 01, 10, 11\}$  и в результате четыре возможные функции  $f_{ij}(x)$  с  $i, j \in 0, 1$ . Реализацию квантового алгоритма Гровера можно представить как поиск «помеченного» квантового состояния, причем определение «метки» проводится Оракулом  $O|x\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle$ , при этом для помеченного состояния происходит поворот фазы  $f_{ij}(x) = 1$ .

Схематично данный алгоритм в виде гейтовых операций можно представить согласно схеме на рис. 5а. Сначала проводится инициализация системы  $|\psi_A\rangle = |\psi(0)\rangle = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  (момент отмечен символом А на рис. 5), далее необходимо под-

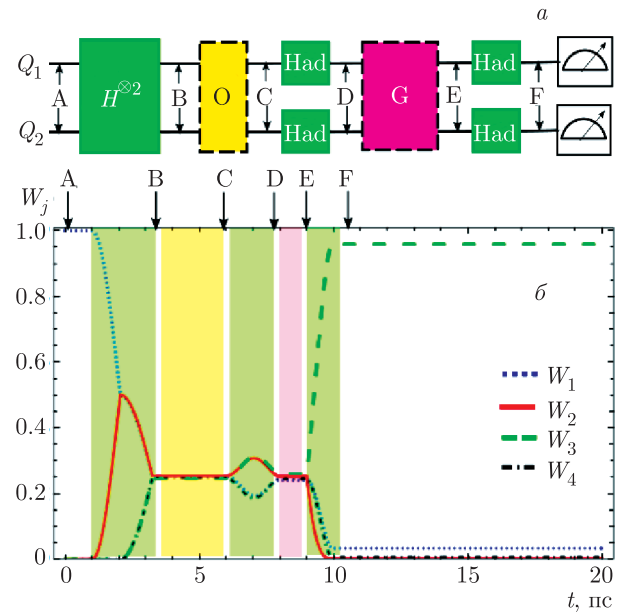


Рис. 5. а) Квантовая схема двух взаимодействующих кубитов, реализующая алгоритм Гровера. б) Зависимость от времени населенностей уровней двухкубитной системы под действием униполярных импульсов, реализующих квантовый алгоритм Гровера для поиска «помеченного» состояния  $x_0 = |10\rangle$ . Параметры кубитов и импульсов:  $\Delta_1 = 0.1$  ГГц,  $\Delta_2 = 0.12$  ГГц; импульсы, действующие на  $Q_1$ :  $A_1 = 1.2$  ГГц ( $1 \text{ пс} \leq t \leq 2.05 \text{ пс}$ ),  $A_1 = 1.6$  ГГц ( $6 \text{ пс} \leq t \leq 7.92 \text{ пс}$  и  $9 \text{ пс} \leq t \leq 9.92 \text{ пс}$ ); импульсы, действующие на  $Q_2$ :  $A_2 = 1.3$  ГГц ( $2.05 \text{ пс} \leq t \leq 3.25 \text{ пс}$ ),  $A_2 = 1.6$  ГГц ( $6 \text{ пс} \leq t \leq 7.92 \text{ пс}$  и  $9 \text{ пс} \leq t \leq 9.92 \text{ пс}$ ); характеристики связи:  $J = 0.01$  ГГц ( $1 \text{ пс} \leq t \leq 3.25 \text{ пс}$  и  $7.92 \text{ пс} \leq t \leq 9 \text{ пс}$ ); параметры шума  $\gamma_1^{-1} = \gamma_2^{-1} = 100$  мкс

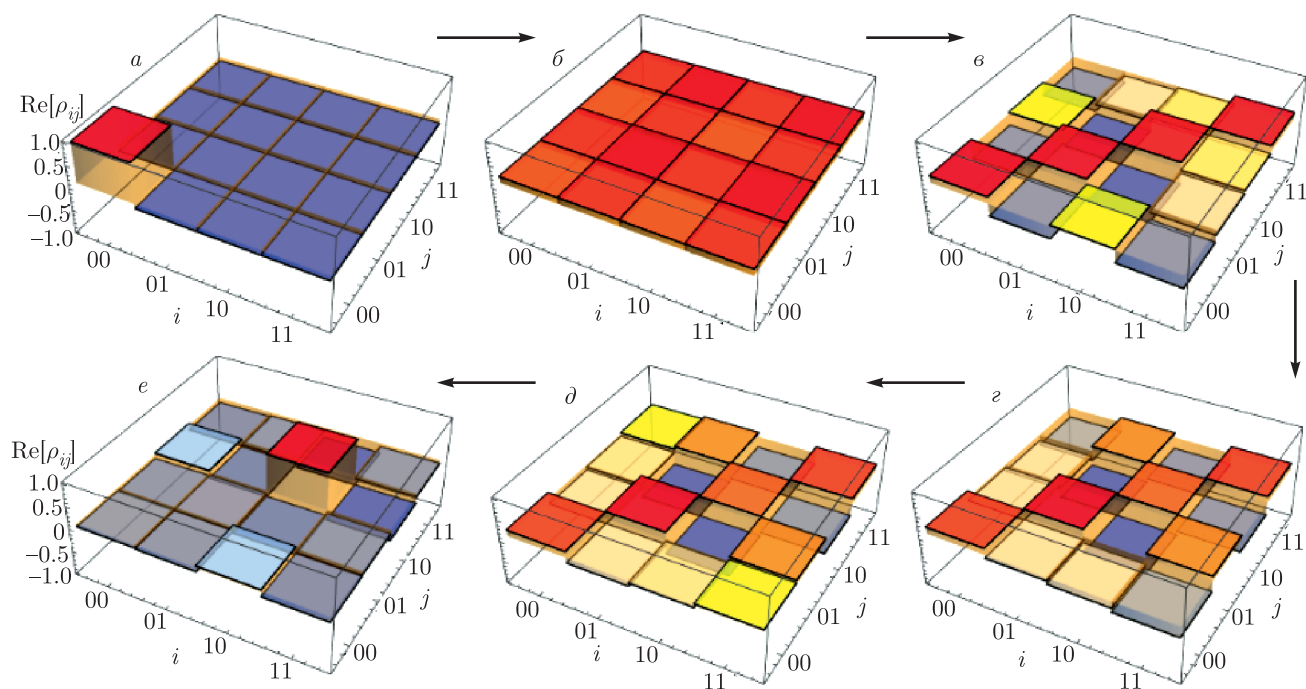
готовить равновероятностную суперпозицию состояний кубитов. Это делается при помощи применения соответствующего гейта Адамара  $C_{Had}^{\otimes 2}$  [18]. После этого состояние квантовой системы можно определить как

$$|\psi_B\rangle = C_{Had}^{\otimes 2}|\psi_A\rangle = \frac{1}{2}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$$

(символ В на рис. 5 соответствует моменту времени формирования состояния  $|\psi_B\rangle$ ). Блок О на рис. 5а определяет действие Оракула, который выделяет («помечает») в качестве примера состояние  $x_0 = |10\rangle$ , что отражается на фазе данного состояния:

$$|\psi_C\rangle = O|\psi_B\rangle = \frac{1}{2}(1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)^T.$$

Далее идет гейт диффузии Гровера, который представляет собой соединение трех гейтов, два из которых — гейты Адамара, а между ними



**Рис. 6.** Квантовая томография состояний для действительной компоненты матрицы плотности  $\text{Re}[\rho_{ij}]$  при выполнении алгоритма поиска Гровера в моменты времени, указанные стрелками на рис. 5б: А (а), В (б), С (в), D (г), Е (д), F (е). Параметры кубитов и импульсов аналогичны тем, что приведены на рис. 5а; цветовая шкала  $\text{Re}[\rho_{ij}]$  представлена на рис. 4

гейт, осуществляющий переворот кубитов относительно среднего значения  $G = 2|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| - I$  (блок между символами D и E на рис. 5а). Последовательно проследим за преобразованием состояния двухкубитной системы: 1) после блоков Адамара  $|\psi_D\rangle = \frac{1}{2}(1 \ -1 \ 1 \ 1)^T$ , 2) после действия оператора Гровера  $|\psi_E\rangle = G|\psi_D\rangle = \frac{1}{2}(1 \ 1 \ -1 \ -1)^T$ , 3) после блоков Адамара  $|\psi_{off}\rangle = |\psi_F\rangle = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ .

На рис. 5б показана динамика поведения населенностей уровней (диагональных элементов матрицы плотности  $W_i(t) = \rho_{ii}$ ) двух взаимодействующих кубитов при выполнении квантового алгоритма Гровера унитарными импульсами для поиска «помеченного» состояния (для примера «метка» была на состоянии  $x_0 = |10\rangle$ ). Заметим, что точность выполнения алгоритма при этом составила  $F = \langle\psi_{off}|\rho|\psi_{off}\rangle \approx 93\%$ . Стрелками и символами А–F на рис. 5б показаны моменты времени, когда численно была проведена реконструкция квантового состояния (томография), изображенная на рис. 6. Полученные зависимости согласуются с име-

ющимися данными по реализации алгоритма Гровера в сверхпроводниковых кубитах на основе техники Раби [10]. Как видно из численного анализа одно- и двухкубитных операций, изменение техники управления состояниями на унитарное воздействие позволяет существенно ускорить выполнение логических операций, а также выполнить основные квантовые алгоритмы с высокой точностью.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное на классическом компьютере моделирование функционирования одно- и двухкубитных гейтов демонстрирует возможность ускорения (как минимум на два порядка) выполнения ключевых операций и алгоритмов. Требуемые импульсы поля пикосекундной длительности вполне могут быть реализованы с использованием цифровых устройств сверхпроводниковой электроники, при этом существенно снижаются требования к сложности и количеству используемых устройств СВЧ-электроники для реализации раби-импульсов.

Показано, что пикосекундные униполярные импульсы позволяют осуществить формирование запутанных состояний Белла в двухкубитном сверхпроводниковом регистре. Выполнено имитационное моделирование процедуры томографии квантовых состояний на основе решения уравнения для матрицы плотности. Показано, что с использованием БОК-управления можно осуществить быстрое (на пикосекундных временах) формирование перепутанных состояний с достоверностью 95–98 %. На основе численного моделирования разработаны протоколы выполнения базовых квантовых алгоритмов: Дойча – Йоижи с точностью более 98 % и Гровера с точностью 93 %. Разработанные методы управления с использованием БОК-цепей позволяют осуществить про-

граммирование двухкубитного квантового процессора.

**Благодарности.** Авторы признательны Л. Н. Шуру за внимание к работе.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-07-00952). Вклад в работу Н. В. Клёнова выполнен в рамках гранта Президента МД-186.2020.8.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для случая идентичных кубитов ( $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ) операторы эволюции  $U(\tau_1)$ ,  $U(\tau_J)$ ,  $U(\tau_2)$  в матричном виде определены как

$$U_{\tau_1}^{(12)} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \left( \cos \frac{\tau_1\Omega}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} \right) & 0 & -\frac{iA}{\Omega} e^{-\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \left( \cos \frac{\tau_1\Omega}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} \right) & 0 & -\frac{iA}{\Omega} e^{\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} \\ -\frac{iA}{\Omega} e^{-\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} & 0 & e^{-\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \left( \cos \frac{\tau_1\Omega}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{iA}{\Omega} e^{\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} & 0 & e^{\frac{i\Delta\tau_1}{2}} \left( \cos \frac{\tau_1\Omega}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_1\Omega}{2} \right) \end{pmatrix},$$

$$U_{\tau_J}^{(12)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\tau_J\Omega_J}{2} - \frac{2i\Delta}{\Omega_J} \sin \frac{\tau_J\Omega_J}{2} & 0 & 0 & -\frac{iJ}{\Omega_J} \sin \frac{\tau_J\Omega_J}{2} \\ 0 & \cos \frac{\tau_J\Omega_J}{2} & -i \sin \frac{\tau_J\Omega_J}{2} & 0 \\ 0 & -i \sin \frac{\tau_J\Omega_J}{2} & \cos \frac{\tau_J\Omega_J}{2} & 0 \\ -\frac{iJ}{\Omega_J} \sin \frac{\tau_J\Omega_J}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{\tau_J\Omega_J}{2} + \frac{2i\Delta}{\Omega_J} \sin \frac{\tau_J\Omega_J}{2} \end{pmatrix},$$

$$U_{\tau_2}^{(12)} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \left( \cos \frac{\tau_2\Omega}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} \right) & -\frac{iA}{\Omega} e^{-\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{iA}{\Omega} e^{-\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} & e^{-\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \left( \cos \frac{\tau_2\Omega}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \left( \cos \frac{\tau_2\Omega}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} \right) & -\frac{iA}{\Omega} e^{\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{iA}{\Omega} e^{\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} & e^{\frac{i\Delta\tau_2}{2}} \left( \cos \frac{\tau_2\Omega}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\tau_2\Omega}{2} \right) \end{pmatrix},$$

где  $\Omega = \sqrt{A^2 + \Delta^2}$  и  $\Omega_J = \sqrt{J^2 + 4\Delta^2}$ .

Вероятности переходов между базисными состояниями двухкубитной системы  $W_x = \left| \langle x | U_{\tau_2}^{(12)} U_{\tau_J}^{(12)} U_{\tau_1}^{(12)} | 00 \rangle \right|^2$ , где  $x = 1$  соответствует базисному состоянию  $|x\rangle = |010_2\rangle$ ,  $x = 2 - |x\rangle = |011_2\rangle$ ,  $x = 3 - |x\rangle = |110_2\rangle$ ,  $x = 4 - |x\rangle = |111_2\rangle$ , определены как



$$W_2 = \frac{A^2}{\Omega^4 \Omega_J^2} \left( \sin^2 \frac{\tau_1 \Omega}{2} \left( 2\Delta^2 \sin \frac{\tau_1 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_J \Omega_J}{2} + \left( -\Delta \sin \frac{\tau_J J}{2} \sin \frac{\tau_1 \Omega}{2} + \Omega \cos \frac{\tau_1 \Omega}{2} \cos \frac{\tau_J \Omega_J}{2} \right) \Omega_J \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( 2\Delta \cos \frac{\tau_1 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_2 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_J \Omega_J}{2} \Omega + \sin \frac{\tau_1 \Omega}{2} \left( \Delta \cos \frac{\tau_J \Omega_J}{2} \sin \frac{\tau_2 \Omega}{2} + \cos \frac{\tau_2 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_J J}{2} \Omega \right) \Omega_J \right)^2 \right), \quad (\text{A.1})$$

$$W_3 = \frac{A^2}{\Omega^4 \Omega_J^2} \left( \sin^2 \frac{\tau_2 \Omega}{2} \left( J\Omega \cos \frac{\tau_1 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_J \Omega_J}{2} + \Delta \Omega_J \cos \frac{\tau_J J}{2} \sin \frac{\tau_1 \Omega}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{\tau_1 \Omega}{2} \left( J\Delta \sin \frac{\tau_2 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_J \Omega_J}{2} - \Omega \Omega_J \cos \frac{\tau_J J}{2} \cos \frac{\tau_2 \Omega}{2} \right)^2 \right), \quad (\text{A.2})$$

$$W_4 = \frac{1}{4\Omega^4 \Omega_J^2} \left( J^2 \left( (A^2 + 2\Delta^2) \cos \frac{(\tau_1 - \tau_2)\Omega}{2} + A^2 \cos \frac{(\tau_1 + \tau_2)\Omega}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{(\tau_1 - \tau_2)\Delta}{2} \sin^2 \frac{\tau_J \Omega_J}{2} + \right. \\ \left. + 4 \cos^2 \frac{(\tau_1 - \tau_2)\Delta}{2} \left( -A^2 \Omega_J \cos \frac{\tau_J J}{2} \sin \frac{\tau_1 \Omega}{2} \sin \frac{\tau_2 \Omega}{2} - J\Delta \Omega \sin \frac{(\tau_1 - \tau_2)\Omega}{2} \sin \frac{\tau_J \Omega_J}{2} \right)^2 \right). \quad (\text{A.3})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для численных расчетов матрицу плотности удобно представить в виде разложения по полному набору матриц группы  $SU(4)$ , представляющих собой кронекерово (прямое) произведение матриц для группы  $SU(2)$ :  $\rho = \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha}^{(1)} \otimes \sigma_{\beta}^{(2)}$ ,  $R_{\alpha, \beta} = \text{Tr}(\sigma_{\alpha}^{(1)} \otimes \sigma_{\beta}^{(2)} \rho)$  — компоненты вектора (16 элементов),  $\sigma_{\alpha}^{(i)} = \{\sigma_0^{(i)}, \sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \sigma_z^{(i)}\}$  — набор матриц, где  $\sigma_0^{(i)} = I^{(i)}$  — единичная матрица  $2 \times 2$  и  $\sigma_{x,y,z}^{(i)}$  — матрицы Паули. Уравнение (13) для матрицы плотности эквивалентно уравнениям для компонент вектора  $R_{\alpha, \beta}$  (15 ненулевых компонент,  $R_{0,0} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \dot{R}_{x,0} &= 4(JR_{y,z} - R_{x,0}\gamma_1 + R_{y,0}\varepsilon_1(t)), \\ \dot{R}_{y,0} &= -4(JR_{x,z} + R_{y,0}\gamma_1 - R_{z,0}\Delta_1 + R_{x,0}\varepsilon_1(t)), \\ \dot{R}_{z,0} &= -4R_{y,0}\Delta_1, \\ \dot{R}_{0,x} &= 4(JR_{z,y} - R_{0,x}\gamma_2 + R_{0,y}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{0,y} &= -4(JR_{z,x} + R_{0,y}\gamma_2 - R_{0,z}\Delta_2 + R_{0,x}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{0,z} &= -4R_{0,y}\Delta_2, \\ \dot{R}_{x,x} &= 4(-R_{x,x}(\gamma_1 + \gamma_2) + R_{y,x}\varepsilon_1(t) + R_{x,y}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{x,y} &= -4(R_{x,y}(\gamma_1 + \gamma_2) - R_{x,z}\Delta_2 - R_{y,y}\varepsilon_1(t) + R_{x,x}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{x,z} &= 4(JR_{y,0} - R_{x,z}\gamma_1 - R_{x,y}\Delta_2 + R_{y,z}\varepsilon_1(t)), \\ \dot{R}_{y,x} &= -4(R_{y,x}(\gamma_1 + \gamma_2) - R_{z,x}\Delta_1 + R_{x,x}\varepsilon_2(t) - R_{y,y}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{y,y} &= -4(R_{y,y}(\gamma_1 + \gamma_2) - R_{z,y}\Delta_1 - R_{y,z}\Delta_2 + R_{x,y}\varepsilon_1(t) + R_{y,x}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{y,z} &= -4(JR_{x,0} + R_{y,z}\gamma_1 - R_{z,z}\Delta_1 + R_{y,y}\Delta_2 + R_{x,z}\varepsilon_1(t)), \\ \dot{R}_{z,x} &= 4(JR_{0,y} - R_{z,x}\gamma_2 - R_{y,x}\Delta_1 + R_{z,y}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{z,y} &= -4(JR_{0,x} + R_{z,y}\gamma_2 + R_{y,y}\Delta_1 - R_{z,z}\Delta_2 + R_{z,x}\varepsilon_2(t)), \\ \dot{R}_{z,z} &= -4(R_{y,z}\Delta_1 + R_{z,y}\Delta_2). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

В начальный момент времени при  $t = 0$  система двух кубитов находится в основном состоянии, т. е. матрица плотности построена на собственных функциях невозмущенного гамильтониана (7), когда  $A_1 = A_2 = 0$  и  $J = 0$  в (4), и определена выражением  $\rho(0) = \sum_i |\psi_{in}(0)\rangle \langle \psi_{in}(0)|$ . Компоненты вектора  $R_{\alpha, \beta}$  определены

как  $R_{\alpha,\beta}(0) = \text{Tr}(\sigma_{\alpha}^{(1)} \otimes \sigma_{\beta}^{(2)} \rho(0))$ . Населенности уровней кубитов (диагональные элементы матрицы плотности  $W_i(t) = \rho_{ii}$ ) при этом рассчитываются через компоненты вектора  $R_{\alpha,\beta}$  и имеют вид

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \frac{1 + R_{z,0} + R_{0,z} + R_{z,z}}{4}, \\ W_2(t) &= \frac{1 + R_{z,0} - R_{0,z} - R_{z,z}}{4}, \\ W_3(t) &= \frac{1 + R_{0,z} - R_{z,0} - R_{z,z}}{4}, \\ W_4(t) &= \frac{1 - R_{z,0} - R_{0,z} + R_{z,z}}{4}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. S. L. Brandao, D. A. Buell, B. Burkett, Yu Chen, Z. Chen, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, A. Dunsworth, E. Farhi, B. Foxen, A. Fowler, C. Gidney, M. Giustina, R. Graff, K. Guerin, S. Habegger, M. P. Harrigan, M. J. Hartmann, A. Ho, M. Hoffmann, T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lindmark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandrà, J. R. McClean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quintana, E. G. Rieffe, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Trevithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven, and J. M. Martinis, *Nature* **574**, 505 (2019).
2. J. Preskil, *Quantum* **2**, 79 (2018).
3. A. A. Zhukov, S. V. Remizov, W. V. Pogosov, and Yu. E. Lozovik, *Quant. Inf. Proces.* **17**, 223 (2018).
4. A. A. Zhukov, E. O. Kiktenko, A. A. Elistratov, W. V. Pogosov, and Yu. E. Lozovik, *Quant. Inf. Proces.* **18**, 31 (2019).
5. Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. S. Tsai, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 246601 (2001).
6. G. Wendin, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 106001 (2017).
7. R. Barends, J. Kelly, A. Megrant, A. Veitia, D. Sank, E. Jeffrey, T. C. White, J. Mutus, A. G. Fowler, B. Campbell, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, C. Neill, P. O'Malley, P. Roushan, A. Vainsencher, J. Wenner, A. N. Korotkov, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, *Nature* **508**, 500 (2014).
8. J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Tornberg, J. Koch, L. S. Bishop, A. A. Houck, B. R. Johnson, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 090502 (2009).
9. Y. He, S. K. Gorman, D. Keith, L. Kranz, J. G. Keizer, and M. Y. Simmons, *Nature* **571**, 371 (2019).
10. L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature* **460**, 240 (2009).
11. D. V. Averin, K. Rabenstein, and V. K. Semenov, *Phys. Rev. B* **73**, 094504 (2006).
12. A. Fedorov, A. Shnirman, G. Schoen, and A. Kidiyavova-Shevchenko, *Phys. Rev. B* **75**, 224504 (2007).
13. A. Herr, A. Fedorov, A. Shnirman, E. Ilichev, and G. Schon, *Supercond. Sci. Technol.* **20**, S450 (2007).
14. K. K. Likharev and V. K. Semenov, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **1**, 3 (1991).
15. R. McDermott and M. G. Vavilov, *Phys. Rev. Appl.* **2**, 014007 (2014).
16. E. Leonard, M. A. Beck, J. Nelson, B. G. Christensen, T. Thorbeck, C. Howington, A. Opremcak, I. V. Pechenezhskiy, K. Dodge, N. P. Dupuis, M. D. Hutchings, J. Ku, F. Schlenker, J. Suttle, C. Wilen, S. Zhu, M. G. Vavilov, B. T. Plourde, and R. McDermott, *Phys. Rev. Appl.* **11**, 014009 (2019).
17. K. Li, R. McDermott, and M. G. Vavilov, *Phys. Rev. Appl.* **12**, 014044 (2019).
18. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, Санкт-Петербург (2006).
19. N. V. Klenov, A. V. Kuznetsov, I. I. Soloviev, S. V. Bakurskiy, M. V. Denisenko, and A. M. Satanin, *Low Temp. Phys.* **43**, 789 (2017).
20. M. V. Denisenko, N. V. Klenov, and A. M. Satanin, *AIP Conf. Proc.* **1936**, 020009 (2018).

21. M. V. Bastrakova, N. V. Klenov, and A. M. Satanin, *Phys. Sol. St.* **61**, 1515 (2019).
22. М. В. Денисенко, Н. В. Кленов, А. М. Сатанин, *ЖЭТФ* **155**, 258 (2019) [M. V. Denisenko, N. V. Klenov, and A. M. Satanin, *JETP* **128**, 227 (2019)].
23. N. V. Klenov, A. V. Kuznetsov, I. I. Soloviev, S. V. Bakurski, and O. V. Tikhonova, *Beilstein J. Nanotechnol.* **6**, 1946 (2015).
24. M. Grajcar, A. Izmailkov, S. H. W. van der Ploeg, S. Linzen, E. Il'ichev, Th. Wagner, U. Hübner, H.-G. Meyer, A. Maassen van den Brink, S. Uchaikin, and A. M. Zagoskin, *Phys. Rev. B* **72**, 020503(R) (2005).
25. N. Takeuchi, D. Ozawa, Y. Yamanashi, and N. Yoshikawa, *Supercond. Sci. Technol.* **26**, 035010 (2013).
26. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, S. V. Bakurskiy, M. Yu. Kupriyanov, A. L. Gudkov, and A. S. Sidorenko, *Beilstein J. Nanotechnol.* **8**, 2689 (2017).
27. A. E. Schegolev, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, and M. V. Tereshonok, *Beilstein J. Nanotechnol.* **7**, 1397 (2016).
28. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2003).