ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 3, стр. 454–460

ФОТОННАЯ ОТДАЧА ПРИ РАССЕЯНИИ СВЕТА НА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Ю. А. Аветисян [a*], *В. А. Малышев* [b**], *Е. Д. Трифонов* [c]

[a] *Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук 410028, Саратов, Россия*

[b] *Zernike Institute for Advanced Materials, University of Groningen 9747 AG, Groningen, the Netherlands*

[c] *Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена 191186, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 29 августа 2019 г.,
после переработки 29 августа 2019 г.
Принята к публикации 17 сентября 2019 г.

Теоретически проанализирован эффект фотонной отдачи при рассеянии света на бозе-эйнштейновском конденсате разреженного атомарного газа с учетом слабого межатомного взаимодействия. Основу подхода составляют связанные уравнения Гросса – Питаевского для конденсата и Максвелла для поля. Рассчитаны дисперсионные зависимости энергии и импульса отдачи, а также выявлено влияние слабой неидеальности конденсата на фотонную отдачу. Продемонстрировано хорошее согласие теории с экспериментом [7] по измерению импульса отдачи фотона в диспергирующей среде.

DOI: 10.31857/S0044451020030062

1. ВВЕДЕНИЕ

Прецизионное измерение импульса фотона в диспергирующей среде представляет собой не только фундаментальное, но и практическое значение. Исследования подобного рода используются, в частности, в квантовой метрологии для уточнения значений мировых констант [1–6] и манипулирования отдельными атомами.

Группой Кеттерле было выполнено измерение импульса отдачи фотона при рассеянии света на бозе-эйнштейновском конденсате (БЭК) разреженного газа [7]. Схема эксперимента была следующей. Вытянутый в одном направлении БЭК атомов рубидия (^{87}Rb) в состоянии $|5^2S_{1/2}, F=1; m_F=-1\rangle$, находившийся в магнитной ловушке Иоффе – Притчарда [8, 9], облучался в перпендикулярном направлении двумя идентичными встречными лазерными импульсами с несущей частотой, квазирезонансной двум переходам между компонентами сверхтонкой структуры:

$$|5^2S_{1/2}, F=1; m_F=-1\rangle \to \to |5^2P_{3/2}, F=1; m_F=-1\rangle,$$

$$|5^2S_{1/2}, F=1; m_F=-1\rangle \to \to |5^2P_{3/2}, F=2; m_F=-1\rangle.$$

Лазерное излучение было линейно поляризовано вдоль направления вытянутости конденсата, так что сверхизлучательное рэлеевское рассеяние света в этом направлении было подавлено [10, 11]. В результате многократных актов рассеяния, из-за полученной фотонной отдачи в конденсате возбуждались две серии когерентных атомных облаков. Они двигались с различными скоростями в противоположных направлениях (вдоль волновых векторов встречных излучений накачки). После некоторого времени задержки система подвергалась воздействию второй пары встречных лазерных импульсов. В результате этого появлялись две новые серии атомных облаков, которые интерферировали с ранее произведенными. Набег фазы волновых функций атомов в

[*] E-mail: yuaavetisyan@mail.ru
[**] E-mail: v.malyshev@rug.nl

первичных облаках к этому моменту времени приводил к интерференционной зависимости их суммарной плотности от времени задержки. Это, в свою очередь, вызывало изменение плотности атомов в основном (неподвижном) облаке конденсата, так как полное число атомов в БЭК сохраняется. Измерение плотности атомов в основном конденсате как функции времени задержки позволило оценить набег фазы движущихся атомных облаков и, таким образом, определить энергию отдачи, получаемую атомами.

В недавней статье [12] мы провели компьютерное моделирование интерференционного эксперимента [7], рассматривая атомы как двухуровневые системы и считая БЭК идеальным газом. В настоящей работе мы предлагаем описание эффекта отдачи для условий, в большей мере приближенных к экспериментальным, т. е. рассматриваем трехуровневую модель атома БЭК и учитываем слабую неидеальность БЭК в приближении Гросса – Питаевского [13–16]. Наш подход также позволяет рассчитать энергию и импульс отдачи, получаемые атомами при рассеянии света, ограничиваясь только однократным возбуждением БЭК и не прибегая к моделированию интерференционного эксперимента [7]. Сопоставление результатов, полученных двумя способами для одной и той же модели конденсата, позволяет оценить точность интерференционного метода при определении средних значений энергии и импульса фотонной отдачи.

2. ФОРМАЛИЗМ

В соответствии с геометрией эксперимента [7] мы ограничиваемся одномерной моделью взаимодействия БЭК с электромагнитным полем и будем описывать эволюцию состояния БЭК с помощью уравнения Гросса – Питаевского [13–16]:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) - \hat{d}E(x,t) + G|\Psi(x,t)|^2\right]\Psi(x,t). \quad (1)$$

Здесь два первых слагаемых в правой части описывают движение атома с массой M в ловушке с потенциалом $U(x)$, третье слагаемое представляет собой оператор взаимодействия атома с электромагнитным полем: $E(x,t)$ — напряженность электрического поля; $\hat{d}$ — оператор атомного дипольного момента. Нелинейный член $G|\Psi(x,t)|^2$ описывает межатомное взаимодействие (слабую неидеальность разреженного газа) в приближении среднего поля, G — константа межатомного взаимодействия. Такой подход представляет собой обобщение ранее примененного метода исследования сверхизлучательного рассеяния света, основанного на решении системы уравнений Максвелла – Шредингера или Максвелла – Блоха, [17–33].

Согласно условиям эксперимента [7], будем рассматривать атом как трехуровневую бозе-частицу с основным состоянием $|a\rangle$ и двумя возбужденными состояниями $|b\rangle$ и $|c\rangle$. Электромагнитное поле, с которым взаимодействуют атомы, представляет собой суперпозицию возбуждающего лазерного поля

$$E_0(x,t) = E_0^+(t)\exp\left[-i\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] + E_0^-(t)\exp\left[-i\omega_0\left(t+\frac{x}{c}\right)\right] \quad (2)$$

с частотой ω_0 и поля, создаваемого поляризованностью $P(x,t)$ атомной среды [17],

$$E(x,t) = E_0(x,t) - \frac{2\pi}{c}\int_0^L dx'\frac{\partial}{\partial t} \times P\left(x', t-\frac{|x-x'|}{c}\right), \quad (3)$$

$$P(x,t) = n_0\langle\Psi(x,t)|\hat{d}|\Psi(x,t)\rangle. \quad (4)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, L — размер БЭК в направлении распространения импульсов накачки, n_0 — концентрация атомов в конденсате. Усреднение в (4), выражаемое угловыми скобками, проводится только по электронным степеням свободы атома.

Волновую функцию атома будем искать в виде

$$\Psi(x,t) = \sum_{j=0,\pm2,\ldots}\{a_j(x,t)\phi_j(x)|a\rangle + \exp(-i\omega_0 t) \times [b_{j+1}(x,t)\phi_{j+1}(x)|b\rangle + c_{j+1}(x,t)\phi_{j+1}(x)|c\rangle]\}, \quad (5)$$

где $\phi_r(x) = L^{-1/2}\exp(irk_0x)$ — волновая функция, описывающая поступательное движение атома с импульсом, кратным импульсу фотона возбуждающего поля, $r\hbar k_0$, $k_0 = \omega_0/c$, $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

В приближении медленного изменения амплитуд поля и волновой функции атома система уравнений Максвелла – Гросса – Питаевского имеет вид

$$\frac{\partial a_j(x,t)}{\partial t} + v_j \frac{\partial a_j(x,t)}{\partial x} = -iw_j a_j(x,t) + E^{+*}(x,t) \times \times [b_{j+1}(x,t) + \eta c_{j+1}(x,t)] + + E^{-*}(x,t)[b_{j-1}(x,t) + \eta c_{j-1}(x,t)] - ig \times \times \sum_{m,l=0,\pm 2,\ldots} a_{j+m-l}(x,t) a_m^*(x,t) a_l(x,t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial b_{j+1}(x,t)}{\partial t} + v_{j+1} \frac{\partial b_{j+1}(x,t)}{\partial x} = = i\left(\Delta_{ba} - w_{j+1} + i\frac{\gamma}{2}\right) b_{j+1}(x,t) - - E^+(x,t) a_j(x,t) - E^-(x,t) a_{j+2}(x,t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial c_{j+1}(x,t)}{\partial t} + v_{j+1} \frac{\partial c_{j+1}(x,t)}{\partial x} = = i\left(\Delta_{ca} - w_{j+1} + i\frac{\gamma}{2}\right) c_{j+1}(x,t) - - \eta E^+(x,t) a_j(x,t) - \eta E^-(x,t) a_{j+2}(x,t), \quad (8)$$

где $j = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, а амплитуды полей $E^+(x,t)$ и $E^-(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$E^+(x,t) = E_0^+(t) + 2\int_0^x \left\{ \sum_{j=0,\pm 2,\ldots} [b_{j+1}(x',t) + + \eta c_{j+1}(x',t)]\, a_j^*(x',t) \right\} dx',$$

$$E^-(x,t) = E_0^-(t) + 2\int_x^1 \left\{ \sum_{j=0,\pm 2,\ldots} [b_{j-1}(x',t) + + \eta c_{j-1}(x',t)]\, a_j^*(x',t) \right\} dx'. \quad (9)$$

В качестве единиц длины и времени в уравнениях (6)–(9) мы используем поперечный размер L конденсата и сверхизлучательное время $\tau_R = \hbar/(\pi|d_{ba}|^2 k_0 n_0 L)$ [17], где $d_{ba} = \langle b|\hat{d}|a\rangle$ — матричный элемент оператора дипольного момента перехода. Медленно меняющиеся амплитуды волн индуцированного поля, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях, $E^+(x,t)$ и $E^-(x,t)$, так же как и амплитуды $E_0^{\pm}$ лазерного поля, представлены в шкале $i\hbar/d_{ba}\tau_R$. Величины $w_j = \hbar j^2 k_0^2 \tau_R/2M$ и $v_j = \hbar j k_0 \tau_R/ML$ выражают соответственно кинетическую энергию (в единицах частоты) и скорость атома. Далее мы ограничимся анализом атомов БЭК, находящихся в основном электронном состоянии с индексами «j», принимающими четные значения $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ Величины $\Delta_{ba} = (\omega_0 - \omega_{ba})\tau_R$ и $\Delta_{ca} = (\omega_0 - \omega_{ca})\tau_R$ — отстройки частоты ω_0 внешнего поля от частот атомных резонансов ω_{ba} и ω_{ca}, $\gamma = \Gamma\tau_R$, где Γ — радиационная константа возбужденных состояний атома (одинаковая для обоих состояний), $\eta = d_{ca}/d_{ba}$ — отношение дипольных моментов переходов $a \leftrightarrow c$ и $a \leftrightarrow b$. Безразмерная константа межатомного взаимодействия $g = G\tau_R n_0/\hbar$, причем в дальнейшем мы ограничимся учетом межатомного взаимодействия только для атомов в основном электронном состоянии. Мы также не учитываем запаздывание в уравнениях (6)–(9), так как время пролета фотона через систему, L/c, является самым малым из всех характерных для данной модели времен. Единственным отличным от нуля начальным условием при решении системы уравнений (6)–(9) является значение амплитуды исходного состояния атома, $a_0(x, t=0) = 1$.

При решении системы уравнений (6)–(9) мы использовали условия, близкие к экспериментальным [7]: поперечный размер БЭК $L = 16$ мкм, концентрация атомов конденсата $n_0 = 4.15 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, частота излучения лазера варьировалась вблизи значения $\omega_0 = 2.4 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, радиационная константа перехода $a \leftrightarrow b$ $(5^2S_{1/2}, F = 1; m_F = -1\rangle \leftrightarrow \leftrightarrow |5^2P_{3/2}, F = 1; m_F = -1\rangle)$ $\Gamma = 0.37 \cdot 10^8$ с$^{-1}$, длина волны и дипольный момент этого перехода соответственно $\lambda = 780$ нм и $d_{ba} = 2.07 \cdot 10^{-29}$ К·м, $\eta = d_{ca}/d_{ba} = (3/5)^{1/2}$ [34]. Для этих условий сверхизлучательное время оценивается как $\tau_R \approx \approx 1.75 \cdot 10^{-9}$ с. Тогда для значений параметров в уравнениях (6)–(9) приближенно получаем

$$w_j = 5 \cdot 10^{-5} j^2, \quad v_j = 7.8 \cdot 10^{-7} j,$$

$$\gamma = 6 \cdot 10^{-2}, \quad g = 3.5 \cdot 10^{-6}.$$

Отстройка от резонанса перехода $a \leftrightarrow b$ варьировалась в интервале -1.1 ГГц $\le \Delta_{ba}/2\pi \le 1.1$ ГГц (в безразмерных единицах $-12 \le \Delta_{ba} \le 12$). Для возбуждения конденсата мы использовали прямоугольные импульсы длительностью $\delta t \approx 5$ мкс (в безразмерных единицах $\delta t \approx 3 \cdot 10^3$). Время задержки между импульсами, τ, варьировалось в интервале $[\delta t, 50\delta t]$. Амплитуда E_0 возбуждающего импульса выбиралась (в зависимости от отстройки от резонанса) такой, чтобы за время возбуждения доля атомов в статическом облаке конденсата оставалась на уровне значения 0.9.

3. ИМПУЛЬС ФОТОННОЙ ОТДАЧИ

Прежде чем перейти к моделированию интерференционного эксперимента [7], основанного на двукратном возбуждении конденсата, обратимся к слу-

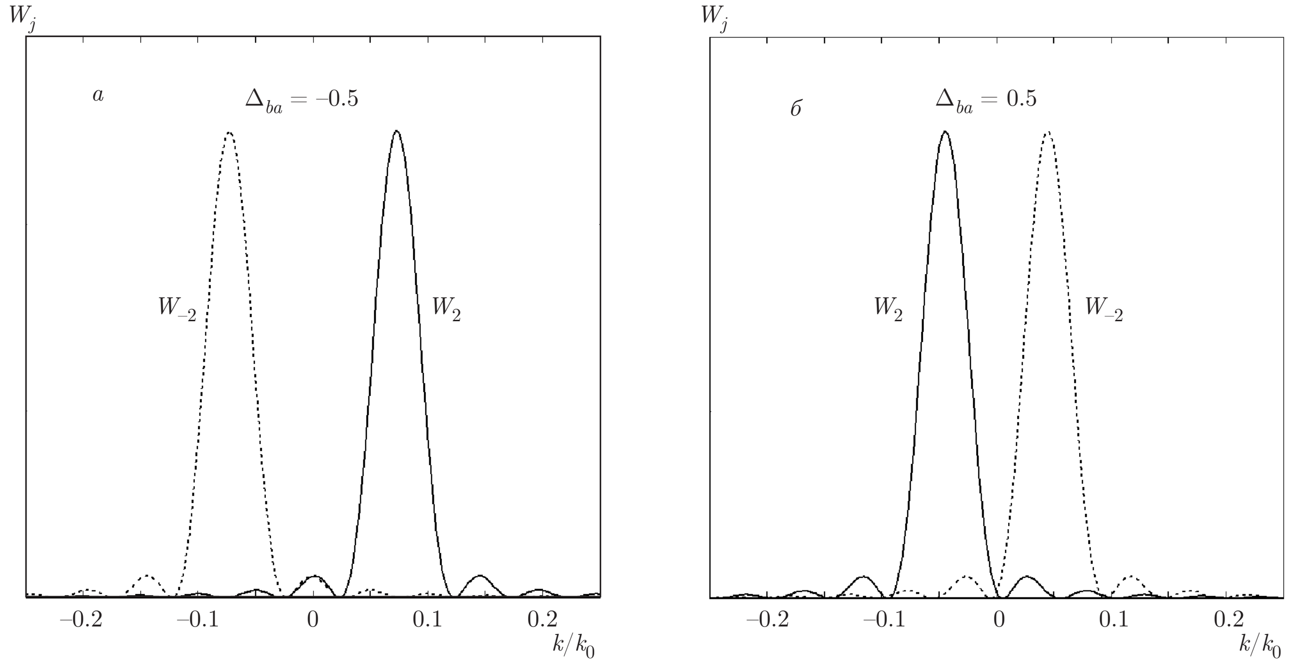

Рис. 1. Распределения плотности вероятности отклонения волнового вектора атома от его вакуумного значения $\pm 2k_0$ в облаках a_{-2} и a_2 (соответственно пунктирные и сплошные кривые) непосредственно после первого возбуждающего импульса длительностью δt для двух значений отстройки от резонанса: a — $\Delta_{ba} = -0.5$; $б$ — $\Delta_{ba} = 0.5$. Различие относительного положения кривых при изменении знака отстройки обусловлено учетом второго уровня в возбужденном состоянии

чаю однократного возбуждения. Для этого рассмотрим преобразование Фурье (по координате) амплитуд $a_j(x,t)$ основного электронного состояния атома:

$$F_j(k,t) = \int\limits_0^1 e^{-ikx} a_j(x,t)\, dx. \tag{10}$$

Следует специально отметить, что переменная Фурье k в (10) представляет собой отклонение волнового вектора атома от его вакуумного значения jk_0 (в дальнейшем мы отождествляем волновой вектор и импульс). Тогда нормированное распределение плотности вероятности отклонения имеет вид

$$W_j(k,t) = \frac{|F_j(k,t)|^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_j(k',t)|^2 dk'}. \tag{11}$$

Вычислив $W_j(k,t)$, можно найти среднее значение отклонения $\overline{k}_j$ и его дисперсию D_j:

$$\overline{k}_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k W_j(k,t)\, dk, \tag{12}$$

$$D_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k - \overline{k}_j)^2 W_j(k,t)\, dk. \tag{13}$$

Поскольку $|\overline{k}_j| \ll k_0$, среднее значение кинетической энергии отдачи (в единицах частоты) можно представить как

$$\varepsilon_j = \overline{\frac{\hbar(k_0 j + k_j)^2}{2M}} \approx \frac{\hbar k_0^2 j^2}{2M} + \frac{\hbar k_0 j \overline{k}_j}{M}. \tag{14}$$

На рис. 1 приведены примеры функций распределения плотности вероятности отклонения волнового вектора k от его вакуумного значения $\pm 2k_0$ в облаках $a_{\pm 2}$ непосредственно после возбуждения (при $t = \delta t$). При выбранных нами начальных условиях эти распределения зеркально симметричны.

Результаты для среднего значения $\overline{k}_2$ и его стандартного отклонения $D_2^{1/2}$ как функции отстройки от резонанса Δ_{ba} для атома в облаке a_2 представлены на рис. 2. Отметим, что сравнительно большое и практически не зависящее от отстройки Δ_{ba} значение стандартного отклонения обусловлено ограниченностью размера ловушки и вызванной этим пространственной неоднородностью атомной плотности конденсата. В силу соотношения (14) дисперсионная зависимость отклонения среднего значения кинетической энергии отдачи ε_j от значения $\hbar k_0^2 j^2/2M$ практически определяется дисперсионной кривой для среднего отклонения импульса отдачи. Если величину $\pm 2k_0 + \overline{k}_{\pm 2}$ интерпретировать

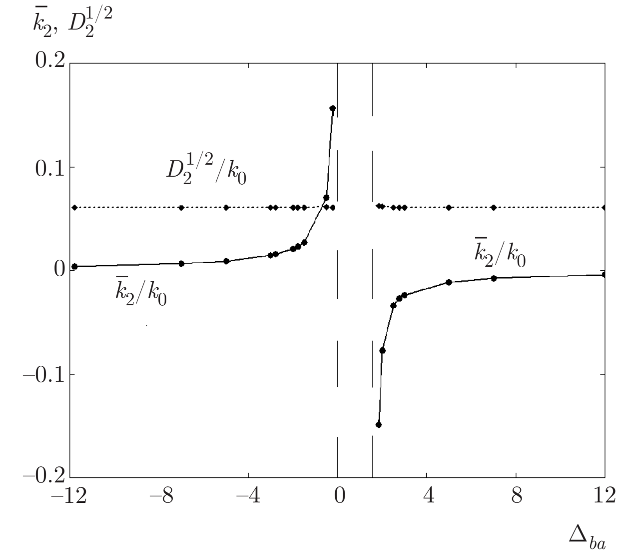

Рис. 2. Среднее значение отклонения $\overline{k}_2$ импульса отдачи от его вакуумного значения $2k_0$ и его стандартное отклонение $D_2^{1/2}$ в единицах k_0 как функции отстройки Δ_{ba} от резонанса. Точки — результаты расчетов

как импульс отдачи, полученный атомом при рассеянии поля в диспергирующей среде, то можно положить $\pm 2k_0 + \overline{k}_{\pm 2} = \pm 2k_0 n$, где n — показатель преломления.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим схему двукратного возбуждения БЭК, соответствующую эксперименту [7]. Нас интересует прежде всего доля числа атомов $S_0(t)$ в неподвижном облаке a_0 в момент времени $t = \tau + \delta t$, т. е. непосредственно после действия второго импульса (напомним, что δt — длительность возбуждающего импульса, τ — время задержки второго импульса, т. е. разность моментов времени включений второго и первого импульсов). Эта величина определяется как

$$S_0(\tau) = \int\limits_0^1 |a_0(x, \tau + \delta t)|^2 dx. \tag{15}$$

Представляется интересным сравнить величину $S_0(t)$ с долей числа атомов в движущихся облаках $a_{j\neq 0}$:

$$S_j(\tau) = \int\limits_0^1 |a_j(x, \tau + \delta t)|^2 dx, \quad j = \pm 2, \pm 4, \ldots \tag{16}$$

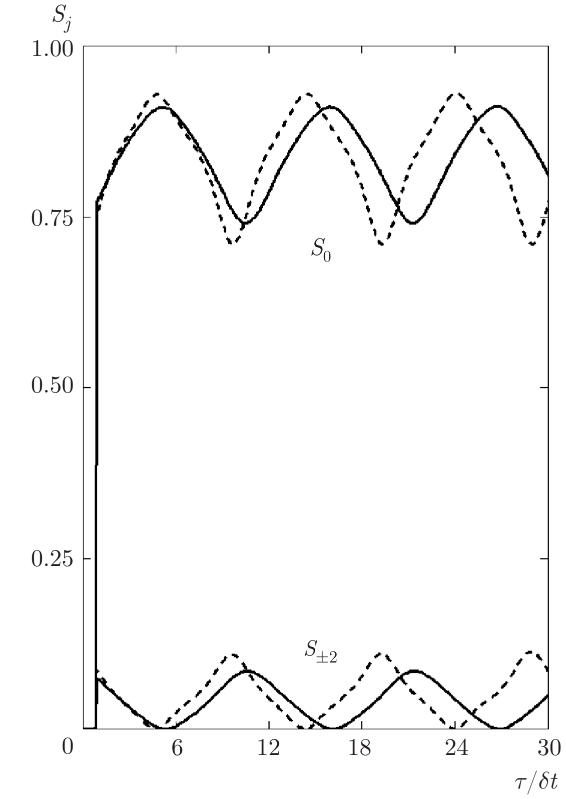

Рис. 3. Результаты моделирования интерференционного эксперимента: населенности S_0 и $S_{\pm 2}$ атомных облаков в зависимости от времени задержки τ. Сплошные (штриховые) кривые получены для отстройки $\Delta_{ba} = 0.5$ ($\Delta_{ba} = -0.5$)

На рис. 3 мы проводим такое сравнение для облаков a_0 и $a_{\pm 2}$. Как видно, величины S_0 и $S_{\pm 2}$ как функции времени задержки τ демонстрируют осцилляции, обнаруженные в эксперименте [7]. Отметим, что в осцилляциях населенностей S_0 и $S_{\pm 2}$ проявляется строгая корреляция по частоте, фазе и амплитуде. Это отражает тот факт, что полное число атомов БЭК сохраняется.

Оценим влияние межатомного взаимодействия на величину энергии отдачи. Если в уравнении Гросса – Питаевского (1) учесть лишь межатомное взаимодействие, то получим

$$\frac{\partial a_j(x,t)}{\partial t} = \\ = -ig \sum_{m,l=0,\pm 2,\ldots} a_{j+m-l}(x,t) a_m^*(x,t) a_l(x,t). \tag{17}$$

Так как истощение неподвижного облака конденсата мы считаем слабым, т. е. $a_0 \approx 1$, то для него находим

$$\frac{\partial a_0(x,t)}{\partial t} \approx -iga_0(x,t)a_0^*(x,t)a_0(x,t) \approx \approx -iga_0(x,t), \quad (18)$$

в то время как при $j \neq 0$

$$\frac{\partial a_j(x,t)}{\partial t} \approx -ig\{a_j(x,t)a_0^*(x,t)a_0(x,t) + + a_0(x,t)a_0^*(x,t)a_j(x,t)\} = = -2iga_j(x,t)a_0^*(x,t)a_0(x,t) \approx -2iga_j(x,t). \quad (19)$$

Отсюда следует, что принятая модель межатомного взаимодействия приближенно приводит для состояния a_0 к сдвигу уровня энергии на величину g, а для состояния $a_{j\neq 0}$ — к сдвигу уровня энергии на величину $2g$.

Таким образом, в интерференционном эксперименте после действия первого импульса появляются облака $a_{j\neq 0}^{(1)}$, в которых уровни энергии атомов сдвинуты на величину $2g$. Поэтому волновые функции, после задержки длительности τ приобретают фазовый множитель $\exp[-i(\varepsilon_j + 2g)\tau]$. Ко времени действия на конденсат второго импульса основное облако a_0 уже за время задержки приобрело фазовый множитель $\exp(-ig\tau)$. Чтобы при вторичном возбуждении получить облака $a_j^{(2)}$ с такой же фазовой зависимостью, приводящей к положительной (конструктивной) интерференции, необходимо, чтобы время задержки было бы кратно периоду осцилляций основного облака, $2\pi/g$. Поэтому частота интерференции будет равна $w_j + g$ в отличие от собственной частоты облаков $\varepsilon_j + 2g$, определяющей энергию отдачи.

На рис. 4 мы приводим для сравнения дисперсионные кривые энергии фотонной отдачи, полученные после однократного возбуждения (*1, 3*) и с помощью моделирования интерференционного эксперимента (*2*). Кривые *1* получены в результате вычисления частоты осцилляций вещественной (или мнимой) части комплексной амплитуды $a_2(x = L/2, t)$ в центре ловушки, кривые *2* — результат моделирования интерференционного эксперимента, кривые *3* описывают дисперсию кинетической энергии отдачи ε_2.

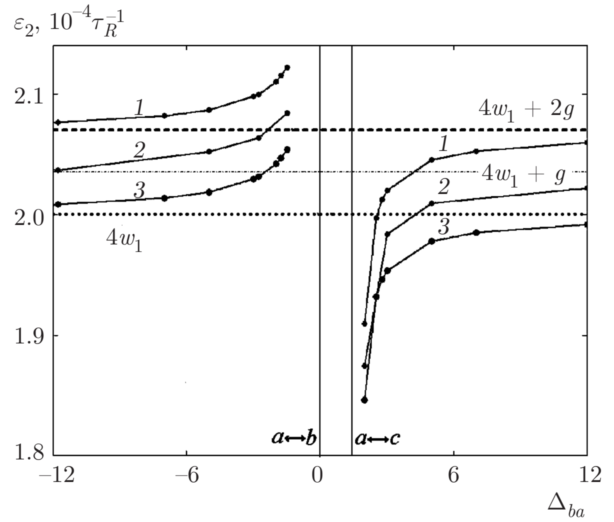

Рис. 4. Дисперсионные кривые энергии отдачи ε_2 (в единицах $10^{-4}\tau_R^{-1}$) для атомов в облаке a_2. Горизонтальные асимптоты соответствуют значениям энергии $4w_1$, $4w_1 + g$ и $4w_1 + 2g$, в то время как вертикальные — частотам переходов $a \leftrightarrow b$ и $a \leftrightarrow c$. Точки — результаты расчетов. Нумерация кривых объяснена в тексте

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках микроскопического подхода развита теория, позволяющая выполнять анализ энергии и импульса отдачи фотона в диспергирующей среде, в частности, в БЭК разреженного атомарного газа с учетом слабого межатомного взаимодействия. Основу теории составляет связанная система уравнений Максвелла – Гросса – Питаевского. Проведено решение данной системы в приближении медленного изменения амплитуд. Расчеты, выполненные для случаев однократного и двукратного возбуждений БЭК (второй — интерференционный метод определения фотонной отдачи [7]) позволили определить влияние слабой неидеальности БЭК на фотонную отдачу в диспергирующей среде и получить согласованные дисперсионные зависимости средних значений кинетической и полной энергий отдачи в актах рассеяния. Теория также корректно описывает частоты осцилляций числа атомов в неподвижном облаке конденсата, которые были обнаружены в эксперименте [7].

Помимо средних значений импульса и энергии отдачи мы провели также вычисление дисперсий D_j этих величин. Найденные значения стандартного отклонения $D_j^{1/2}$ определяют погрешность, с которой средние значения можно считать характеристиками отдельного атома. В то же время выполненное моделирование интерференционного метода подтверждает принципиальную возможность определения средних значений импульсов и энергии отдачи интерференционным методом с достаточно высокой степенью точности.

Финансирование. Один из авторов (Е. Д. Т.) благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку работы (проект

№ 15-02-08369-А). Разработка усовершенствованного алгоритма математического моделирования для анализа элементарных актов рассеяния выполнена Ю. А. Аветисяном в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А18-118042790042-4) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00378).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Weiss, B. C. Young, and S. Chu, Phys. Rev. Lett. **70**, 2706 (1993).

2. B. Taylor, Metrologia **31**, 181 (1994).

3. A. Wicht, J. M. Hensley, E. Sarajlic, and S. Chu, Phys. Scr. T **102**, 82 (2002).

4. S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **89**, 140401 (2002).

5. R. Battesti, P. Clade, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, Phys. Rev. Lett. **92**, 253001 (2004).

6. Y. Le Coq, J. A. Retter, S. Richard, A. Aspect, and P. Bouyer, Appl. Phys. B **84**, 627 (2006).

7. G. K. Campbell, A. E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E. W. Streed, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **94**, 170403 (2005).

8. Y. V. Gott, M. S. Ioffe, and V. G. Telkovsky, in *Nuclear Fusion*, Suppl., Pt. 3, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna (1962), p. 1045.

9. D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **94**, 1336 (1983).

10. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **285**, 571 (1999).

11. D. Schneble, J. Torii, M. Boyd, E. W. Streed, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **300**, 475 (2003).

12. Yu. A. Avetisyan, V. A. Malyshev, and E. D. Trifonov, J. Phys. B **50**, 085002 (2017).

13. E. P. Gross, Nuovo Cim. **20**, 454 (1961); J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).

14. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961).

15. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).

16. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).

17. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance*: *Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publishing, Bristol (1996).

18. M. G. Moore and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **83**, 5202 (1999).

19. O. E. Mustecaplioglu and L. You, Phys. Rev. A **62**, 063615 (2000).

20. N. Piovella, M. Gatelli, and R. Bonifacio, Opt. Comm. **194**, 167 (2001).

21. Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **120**, 1117 (2001); Теор. Мат. Физ. **139**, 449 (2004); Опт. и спектр. **98**, 545 (2005); E. D. Trifonov, Laser Phys. **12**, 211 (2002); Laser Phys. Lett. **2**, 153 (2005).

22. H. Pu, W. Zhang, and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **91**, 150407 (2003).

23. C. Benedek and M. G. Benedict, J. Opt. B **6**, 3 (2004).

24. Yu. A. Avetisyan and E. D. Trifonov, Laser Phys. Lett. **1**, 373 (2004); **2**, 512 (2005); **4**, 247 (2007); Laser Phys. **19**, 545 (2009); Phys. Rev. A **88**, 025601 (2013); Ю. А. Аветисян, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **130**, 771 (2006); Опт. и спектр. **100**, 307 (2006); ЖЭТФ **133**, 495 (2008); Опт. и спектр. **105**, 613 (2008); УФН **185**, 307 (2015).

25. Е. Д. Трифонов, Н. И. Шамров, ЖЭТФ **126**, 54 (2004).

26. G. R. M. Robb, N. Piovella, and R. Bonifacio, J. Opt. B **7**, 93 (2005).

27. N. I. Shamrov, Laser Phys. **16**, 1734 (2006); **17**, 1424 (2007).

28. O. Zobay and G. M. Nikolopoulos, Phys. Rev. A **73**, 013620 (2006); Laser Phys. **17**, 180 (2007).

29. N. Bar-Gill, E. E. Rowen, and N. Davidson, Phys. Rev. A **76**, 043603 (2007).

30. N. Piovella, L. Volpe, M. M. Cola, and R. Bonifacio, Laser Phys. **17**, 174 (2007).

31. X. Xu, X. Zhou, and X. Chen, J. Phys. B **41**, 165302 (2008).

32. L. Deng, M. G. Payne, and E. W. Hagley, Phys. Rev. Lett. **104**, 050402 (2010).

33. C. J. Zhu, L. Deng, E. W. Hagley, and G. X. Huang, Laser Phys. **24**, 065402 (2014).

34. D. A. Steck, *Rubidium 87 D Line Data*, http://steck.us/alkalidata.