ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 3, стр. 387–393

СИЛА КАЗИМИРА И СИЛА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ В ОДНОКОМПОНЕНТНОМ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ

Нгуен Ван Тху [a,b*], *Луонг Тхи Теу* [b], *Данг Тхань Хай* [c]

[a] *Institute for Research and Development, Duy Tan University*
550000, Da Nang, Vietnam

[b] *Department of Physics, Hanoi Pedagogical University 2*
100000, Hanoi, Vietnam

[c] *Vietnam Education Publishing House*
100000, Hanoi, Vietnam

Поступила в редакцию 26 апреля 2019 г.,
после переработки 16 июля 2019 г.
Принята к публикации 12 сентября 2019 г.

(Перевод с английского)

CASIMIR AND SURFACE TENSION FORCES ON A SINGLE INTERACTING BOSE-EINSTEIN CONDENSATE IN CANONICAL ENSEMBLE

Nguyen Van Thu, Luong Thi Theu, Dang Thanh Hai

Силы, возникающие в однокомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном между двумя параллельными пластинами, состоят из двух компонент, а именно, силы поверхностного натяжения и силы Казимира. Для канонического ансамбля и для большого канонического ансамбля эти силы существенно различаются. Оказалось, что при малом расстоянии ℓ между пластинами сила поверхностного натяжения, полученная с использованием двойного параболичского приближения, убывает как ℓ^{-3}, в то время как сила Казимира, полученная в рамках квантовой теории поля в однопетлевом приближении, пропорциональна $\ell^{-13/2}$. Кроме того, рассмотрена полная сила и найдена ее точка поворота.

DOI: 10.31857/S0044451020030013

1. ВВЕДЕНИЕ

Нетривиальная структура вакуумного состояния заключенного между двумя пластинами электромагнитного поля и ассоциированного с вакуумными флуктуациями, является одним из наиболее интересных объектов исследований современной квантовой теории поля. Это явление, известное как эффект Казимира, было впервые открыто Х. Казимиром в 1948 г. [1] и положило начало новым перспективным задачам квантовой физики. Начиная с этого момента эффект Казимира исследовался как теоретически, так и экспериментально в связи с его широкими приложениями в науке и технике [2]. Эффект Казимира изучается применительно к различным областям физики, например, в рамках квантовой теории поля [3], физики твердого тела [4], атомной и молекулярной физики [5], физики кварковой материи [6], гравитации и космологии [7, 8].

* E-mail: nvthu@live.com

Исследованиям эффекта Казимира для бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) посвящено много работ. Некоторые интересные свойства двухкомпонентного БЭК были исследованы в работе [9]. В этой работе в рамках квантовой теории поля в однопетлевом приближении было показано, что вследствие взаимодействия между компонентами сила Казимира является не просто суперпозицией сил для двух отдельных компонент БЭК, а в пределе полного разделения компонент данная сила обращается в нуль. В работе [10] было доказано, что в разделенном состоянии, когда взаимодействие между двумя компонентами отсутствует, на пластинах возникает сила типа силы Казимира.

Исследованиям эффекта Казимира для случая однокомпонентного бозе-эйнштейновского конденсата посвящено много работ. В работе [11] в рамках квантовой теории поля в однопетлевом приближении было получено выражение для энергии Казимира как интеграла плотности состояний; оказалось, что данная энергия убывает как ℓ^{-3}. Этот эффект исследовался также при конечных температурах [12, 13]. Сила Казимира для бозе-эйнштейновского конденсата с взаимодействующими компонентами, состоящая из силы среднего поля (или силы поверхностного натяжения) и силы Казимира, была получена в работе [14]. Однако, насколько известно авторам, эти системы соединены с резервуаром (резервуарами) частиц, что означает, что вычисления проводились для большого канонического ансамбля. В настоящей работе рассматриваемая система является изолированной, что соответствует каноническому ансамблю. Кроме того, мы ограничиваемся рассмотрением БЭК в разреженном взаимодействующем газе [11], т. е. $n_0 a_s^3 \ll 1$, где a_s — длина рассеяния s-волны. Объемная плотность n_0 определяется как число частиц в единичном объеме, которое равно отношению полного числа частиц N к объему системы V, т. е. $n_0 = N/V$.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 исследуется сила поверхностного натяжения. В разд. 3 исследуется сила Казимира. Раздел 4 представляет собой Заключение.

2. СИЛА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Начнем с рассмотрения однокомпонентного БЭК, помещенного между двумя параллельными пластинами площадью A, лежащими в плоскости (x, y) и отстоящими друг от друга на расстояние ℓ в направлении z. Обычно требуется, чтобы $\sqrt{A}$ было много больше ℓ. Положение пластин задается координатами $z = -\ell/2$ и $z = \ell/2$. В отсутствие внешнего поля и в пренебрежении квантовыми флуктуациями объемный гамильтониан можно записать в виде [15]

$$\mathcal{H} = \psi^*(z)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2\right]\psi(z) + V_{GP}, \tag{1}$$

где

$$V_{GP} = -\mu\psi(z) + \frac{g}{2}|\psi(z)|^4 \tag{2}$$

— потенциал Гросса – Питаевского (ГП). Волновая функция основного состояния $\psi(z)$ играет роль параметра порядка, m — атомная масса. Постоянная взаимодействия $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m > 0$ соответствует силе взаимодействия отталкивающихся компонент, она определяется через a_s — длину рассеяния s-волны; μ — химический потенциал. Поскольку система является изолированной, число частиц N фиксировано:

$$N = \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} \psi(z)^2 dz. \tag{3}$$

Как было отмечено выше, мы ограничимся случаем, когда рассматриваемая система представляет собой разреженный газ. Тогда, согласно теории среднего поля [11, 16, 17], химический потенциал μ является производной плотности свободной энергии по плотности частиц, в результате чего получаем $\mu = gn_0$.

Минимизируя полный гамильтониан (1), получаем стационарное уравнение ГП [18]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2\psi(z) - \mu\psi(z) + g|\psi(z)|^3 = 0, \tag{4}$$

которое позволяет найти волновую функцию $\psi(z)$ основного состояния. Пластины играют роль твердых стенок, на которых волновая функция обращается в нуль. Этот факт выражается граничным условием Дирихле на стенках:

$$\psi(-\ell/2) = \psi(\ell/2) = 0. \tag{5}$$

Чтобы исследовать силу поверхностного натяжения, решим уравнение ГП (4). Для этого введем безразмерную координату $\varrho = z/\xi$, где $\xi = \hbar/\sqrt{2mgn_0}$ — поправочная длина, и безразмерный параметр порядка $\phi = \psi/\sqrt{n_0}$. Таким образом, потенциал ГП (2) и уравнение ГП (4) можно переписать в виде

$$-\partial_\varrho^2\phi - \phi + \phi^3 = 0, \tag{6}$$

$$V_{GP} = -\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}. \tag{7}$$

В общем случае уравнение (6) невозможно решить точно, однако имеется несколько приближенных методов [16, 19, 20]. Двойное параболическое приближение (ДПП), предложенное в работе [21], позволяет найти аналитическое решение для основного состояния нашей системы. В силу того что значение безразмерного параметра порядка ϕ вблизи пластин меньше, чем в объеме, его можно записать в виде разложения:

$$\phi \approx 1 + \delta, \tag{8}$$

где δ — достаточно малая вещественная величина. Подставляя выражение (8) в уравнение (7), во втором порядке по ϕ получаем ДПП-потенциал в виде

$$V_{DPA} = 2(\phi - 1)^2 - \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Тогда вместо уравнения ГП (4) получаем уравнение Эйлера–Лагранжа

$$-\partial_\varrho^2 \phi + \alpha^2(\phi - 1) = 0, \tag{10}$$

где $\alpha = \sqrt{2}$. Решая уравнение (10) с граничным условием (5), получаем параметр порядка:

$$\phi = 1 - \operatorname{sh}\left(\frac{L}{\alpha}\right) \operatorname{ch}(\alpha\varrho), \tag{11}$$

где $= \ell/\xi$.

Теперь рассмотрим силу поверхностного натяжения. Для канонического ансамбля хорошее определение для приращения поверхностной энергии дано в работе [16]; а именно, приращение энергии — это полная энергия за вычетом экстенсивного вклада в объем:

$$\Delta E = E - \mu N = E - N\frac{\partial E}{\partial N}. \tag{12}$$

Комбинируя уравнения (12) и (6), после деления на A получаем поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1}{2} n_0 \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} dz\, \phi \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\phi. \tag{13}$$

Следует отметить, что именно это определение было предложено в работе [22]. Выражение для числа частиц (3), которые удерживаются между пластинами, можно переписать в виде

$$N = \int\limits_V \psi(z)^2 dz = n_0 A \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} \phi^2(z)\, dz \equiv n_0 A I_0. \tag{14}$$

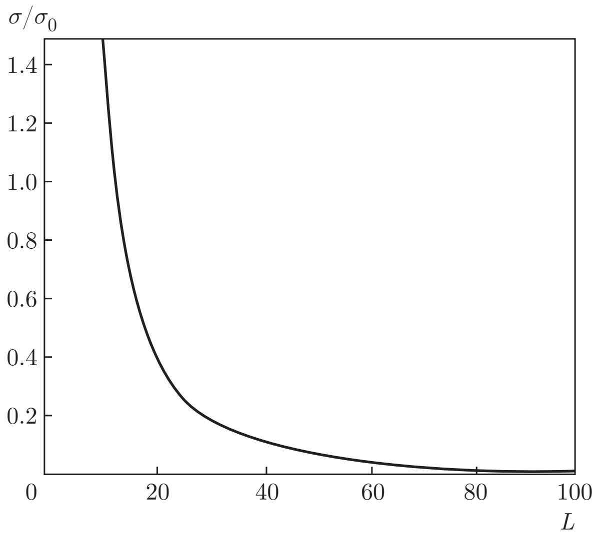

Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимость поверхностного натяжения от расстояния

В размерном виде волновую функцию основного состояния (11) можно записать как

$$\phi(z) = 1 - \operatorname{sh}\left(\frac{\ell}{\alpha\xi}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha z}{\xi}\right). \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) в выражение (14), получаем

$$I_0 = \ell + \frac{\ell}{\operatorname{ch}(\alpha\ell/\xi) + 1} - \frac{3\xi}{\alpha} \operatorname{th}\left(\frac{\ell}{\alpha\xi}\right). \tag{16}$$

Подставляя выражение (11) в выражение (13), с учетом соотношений (14) и (16), получаем

$$\sigma = \sigma_0 \frac{A\hbar^2 \left[\xi \operatorname{sh}(\alpha\ell/\xi) - \alpha\ell\right]}{mg\ell N \left\{\alpha\ell \left[\operatorname{ch}(\alpha\ell/\xi) + 2\right] - 3\xi \operatorname{sh}(\alpha\ell/\xi)\right\}}, \tag{17}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{mg^2 N^3}{\hbar^2 A^3}.$$

Заметим, что поправочная длина ξ зависит от ℓ.

Для иллюстрации приведенных выше аналитических вычислений были проведены численные расчеты для рубидия-87 с параметрами, $m = 86.909\mathrm{u}$ ($1\mathrm{u} = 1.6605.10^{-27}$ кг), $a_s = 100.4 a_0$, $a_0 = 0.529\,\text{Å}$, размер каждой пластины $A = 10^{-6}$ м^2, число частиц $N = 6 \cdot 10^6$ [14]. Для таких параметров на расстоянии порядка поправочной длины объемная плотность равна

$$n_0 = N/A\ell \approx 2.5 \cdot 10^{18}\ \text{м}^{-3},$$

условие разреженности газа

$$n_0 a_s^3 \approx 3.745 \cdot 10^{-7} \ll 1$$

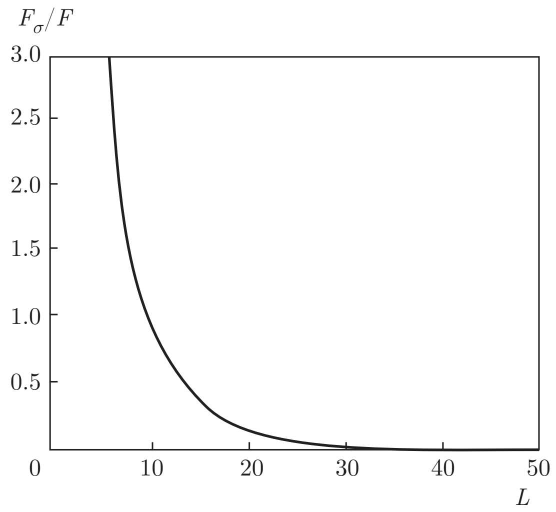

Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимость силы поверхностного натяжения от расстояния

выполнено, следовательно, можно использовать уравнение ГП. На рис. 1 приведена зависимость поверхностного натяжения от расстояния $L = \ell/\xi_0$ при $\xi_0 = 4000$ Å. На рисунке видно, что при уменьшении расстояния ℓ поверхностное натяжение возрастает, а при $\ell \to 0$ оно расходится.

Сила поверхностного натяжения определяется как

$$F_\sigma = -\frac{\partial\sigma}{\partial\ell}. \tag{18}$$

Подставив выражение (17) в выражение (18), получим

$$\frac{F_\sigma}{F_0} = \\ = \frac{F_1}{4g^2\ell m^2 N^2 \left[-3\alpha\xi \operatorname{sh}(\alpha\ell/\xi) + 2\ell \operatorname{ch}(\alpha\ell/\xi) + 4\ell\right]^2}, \tag{19}$$

где

$$F_1 = A\hbar^2 \left\{ 2\alpha\xi \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) \left[3A\hbar^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + \; 9A\hbar^2 - 4g\ell m N \right] - 4A\ell\hbar^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) \right\}$$

и

$$F_0 = \frac{2m^2 g^3 N^4}{\hbar^4 A^4}.$$

Очевидно, что эта сила обращается в нуль на достаточно больших расстояниях, а при $\ell \to 0$ она расходится.

Зависимость силы поверхностного натяжения от расстояния L приведена на рис. 2 для тех же значений параметров, что и на рис. 1. Имеется два основных различия по сравнению с результатами для большого канонического ансамбля [14]. В первую очередь эта сила является отталкивающей и существенно зависит от ℓ. Когда ℓ стремится к нулю, сила становится бесконечной, поскольку конденсат является несжимаемым.

3. СИЛА КАЗИМИРА

Теперь рассмотрим силу Казимира, обусловленную квантовыми флуктуациями над основным состоянием, соответствущими фононным возбуждениям [11, 13, 14, 23]. Лучше всего это сделать в рамках квантовой теории поля в однопетлевом приближении, развитой для однокомпонентного разреженного бозе-газа в работах [11, 17], а для двухкомпонентных бозе-эйнштейновских конденсатов — в работе [9]. Дисперсионное соотношение для элементарного возбуждения, называемое законом Боголюбова, можно записать в виде

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g\psi^2\right)}.$$

Используя безразмерный волновой вектор $\kappa = k\xi$, можно переписать этот закон в виде

$$\varepsilon(\kappa) = g n_0 \sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + \phi^2)}. \tag{20}$$

Плотность свободной энергии имеет вид

$$\Omega = \frac{g n_0}{2\xi^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^3} \sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + \phi^2)}. \tag{21}$$

Наш бозе-газ удерживается между двумя пластинами, это означает, что имеется пространственное ограничение вдоль оси z, вследствие чего волновой вектор является квантованным и его можно разделить на две компоненты, а именно, $k_\perp$ — перпендикулярную оси z, и k_j — параллельную оси z:

$$k^2 \to k_\perp^2 + k_j^2.$$

В безразмерном виде получим

$$\kappa^2 \to \kappa_\perp^2 + \kappa_j^2. \tag{22}$$

После квантования (22) безразмерного волнового вектора дисперсионное соотношение для сжатой геометрии можно записать в виде [14]

$$\varepsilon(\kappa_\perp, \kappa_j) = g n_0 \sqrt{(\kappa_\perp^2 + \kappa_j^2)(\kappa_\perp^2 + \kappa_j^2 + \phi^2)}. \tag{23}$$

Поскольку мы рассматриваем только нулевые температуры, т. е. учитываем только квантовые флуктуации, энергия Казимира принимает вид

$$\Omega = \frac{gn_0}{2\xi^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_\perp}{(2\pi)^2} \times \times \sqrt{(\kappa_\perp^2 + \kappa_j^2)(\kappa_\perp^2 + \kappa_j^2 + \phi^2)}. \quad (24)$$

Используя периодическое граничное условие, получаем

$$k_j = \frac{\pi j}{\ell},$$

или в безразмерном виде

$$\kappa_j = \frac{\pi j}{L} \equiv \frac{j}{\widetilde{L}}, \quad (25)$$

где $\widetilde{L} = L/2\pi$.

Другой способ вычисления уравнения (24) дает [9]

$$\Omega = \frac{gn_0}{2\xi^2 \widetilde{L}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_\perp}{(2\pi)^2} \times \times \sqrt{(\widetilde{L}^2\kappa_\perp^2 + j^2)(M^2 + j^2)}, \quad (26)$$

где

$$M = \widetilde{L}\sqrt{\kappa_\perp^2 + \phi^2}. \quad (27)$$

Чтобы исключить из уравнения (26) расходящуюся часть, введем обрезание по импульсам Λ для $\kappa_\perp$, тогда (26) можно записать в виде

$$\Omega = \frac{gn_0}{4\pi\xi^2 \widetilde{L}^2} \int_0^\Lambda \kappa_\perp d\kappa_\perp \times \times \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(\widetilde{L}^2\kappa_\perp^2 + j^2)(M^2 + j^2)}. \quad (28)$$

Энергия Казимира определяется как конечная часть выражения (28), таким образом, используя формулу Эйлера – Маклорена [24]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^\infty F(n) dn = -\frac{1}{12} F'(0) + + \frac{1}{720} F'''(0) - \frac{1}{30240} F^{(5)}(0) + \ldots, \quad (29)$$

а затем переходя к пределу при $\Lambda \to \infty$, получим

$$\Omega = -\frac{gn_0}{\xi^2} \frac{\pi^2 \phi}{1440 L^3}. \quad (30)$$

Заметим, что в рамках квантовой теории поля в однопетлевом приближении параметр порядка является постоянной величиной [9, 11, 14].

Как было отмечено выше, в каноническом ансамбле объемная плотность n_0 зависит от расстояния, поэтому поправочная длина также зависит от ℓ. С учетом уравнения (14), энергию Казимира (30) можно переписать в виде

$$\Omega = -\frac{\pi^2 \phi \hbar^2}{1440 \alpha m \xi I_0 \ell^2}. \quad (31)$$

Сила Казимира определяется аналогично (18), тогда, с учетом (31), получаем

$$\frac{F_C}{F_0} = \frac{M}{1440 \alpha m^3 g^3 N^4 \ell^3 \left[2\ell \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) + 4\ell - 3\alpha\xi \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right)\right]^2}, \quad (32)$$

где

$$M = \pi^2 A^3 \phi \hbar^4 \operatorname{ch}\left(\frac{\ell}{\alpha\xi}\right) \times \times \left[\operatorname{sh}\left(\frac{\ell}{\alpha\xi}\right)\left(9A\hbar^2 + 4gmN\ell\right) + 9A\hbar^2 \operatorname{sh}\left(\frac{3\ell}{\alpha\xi}\right) - - 29\alpha mgN\xi \operatorname{ch}\left(\frac{\ell}{\alpha\xi}\right) - 7\alpha mgN \operatorname{ch}\left(\frac{3\ell}{\alpha\xi}\right)\right].$$

На рис. 3 показана зависимость силы Казимира от расстояния для рубидия-87 при тех же значениях параметров, которые были приведены выше. На рисунке видно, что сила всегда является притягивающей, а при $\ell = 0$ она расходится. При возрастании расстояния сила резко убывает.

В завершение данного раздела сравним силу поверхностного натяжения с силой Казимира. Сразу видно, что эти силы протвоположны — сила поверхностного натяжения является отталкивающей, а сила Казимира — притягивающей. Определим полную силу F_{total} как сумму силы поверхностного натяжения и силы Казимира:

$$F_{total} = F_\sigma + F_C. \quad (33)$$

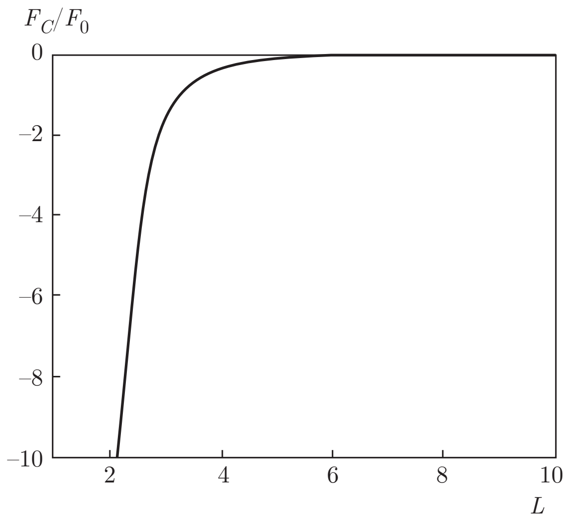

Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимость силы Казимира от расстояния

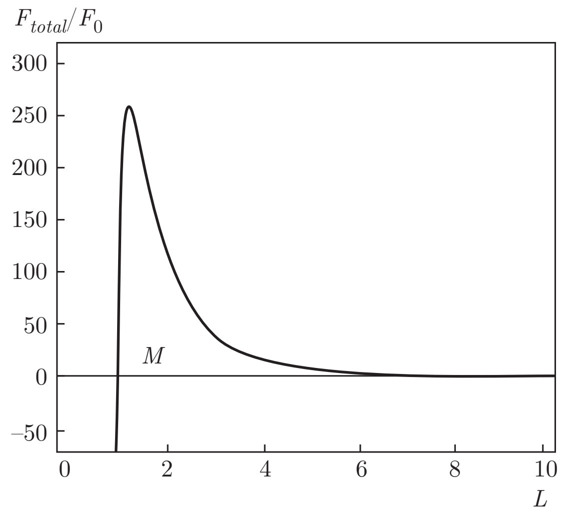

Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимость полной силы от расстояния

На рис. 4 показана зависимость полной силы от расстояния для рубидия-87 при тех же значениях параметров, которые были приведены выше. На рисунке видно, что на больших расстояниях полная сила является отталкивающей (красная кривая), а на малых — притягивающей (синяя кривая). Для рубидия-87 полная сила изменяет свое направление в точке M при $L = 1.0327$. Эта точка точно совпадает с точкой, в которой полная энергия $E = \sigma + \Omega$ достигает максимального значения (см. рис. 5). Чтобы в этом убедиться, разложим эти силы в ряд в области малых расстояний. Тогда главный член уравнения (19) будет иметь вид

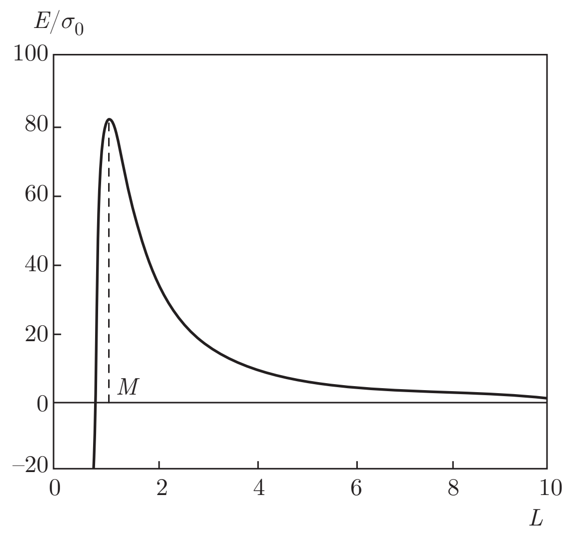

Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимость полной энергии от расстояния

$$F_\sigma \approx \frac{5A^3\hbar^6}{2m^3g^3N^3\ell^3}, \tag{34}$$

а из уравнения (32) получаем

$$F_C^{(CE)} \approx -\frac{11\pi^2A^5\phi\hbar^8}{192\alpha^4m^4g^4N^5\ell^7}\xi. \tag{35}$$

Заметим, что $\xi \propto \ell^{1/2}$, поэтому из уравнения (35) следует, что сила Казимира пропорциональна $\ell^{-13/2}$, а из уравнения (34) следует, что сила поверхностного натяжения пропорциональна ℓ^{-3}. Таким образом, полная сила является притягивающей в области малых ℓ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривались силы, возникающие в разреженном бозе-газе, заключенном между параллельными пластинами, в случае канонического ансамбля. Были получены следующие результаты.

1. С использованием ДПП было найдено основное состояние разреженного бозе-газа, заключенного между параллельными пластинами, а затем была вычислена сила поверхностного натяжения. Оказалось, что эта сила является отталкивающей, а когда расстояние между пластинами стремится к нулю, она расходится, потому что система не соединена с резервуаром. В области малых ℓ сила поверхностного натяжения пропорциональна ℓ^{-3}.

2. Сила Казимира рассматривалась в рамках квантовой теории поля в однопетлевом приближении. Эта сила является притягивающей, а когда

расстояние стремится к нулю, она пропорциональна $\ell^{-13/2}$. Это существенно отличается от результата, полученного для большого канонического ансамбля.

Кроме того, была подробно рассмотрена полная сила. Она является либо притягивающей, либо отталкивающей, в зависимости от расстояния между пластинами. На основании уравнений (34) и (35) можно приближенно найти точку M, в которой происходит поворот полной силы:

$$\ell_0 \approx \frac{1}{4}\left(\frac{121\pi^4\hbar^6 A^5}{450 m^3 g^3 N^3}\right)^{1/7}. \tag{36}$$

В области малых ℓ, $\ell < \ell_0$, сила Казимира преобладает, поэтому полная сила является притягивающей. Для области больших ℓ ситуация противоположная.

Благодарности. Авторы благодарят Tran Huu Phat и Shyamal Biswas за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED), грант № 103.01-2018.02.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

2. M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).

3. B. S. Kay, Phys. Rev. D **20**, 3052 (1979).

4. C. Genet, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. A **62**, 012110 (2000).

5. J. F. Babb, Adv. in Atom. Molec. and Opt. Phys. **59**, 1 (2010).

6. Tran Huu Phat and Nguyen Van Thu, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450078 (2014).

7. J. Q. Quach, Phys. Rev. Lett. **114**, 081104 (2015).

8. J. Q. Quach, Phys. Rev. Lett. **118**, 139901 (2017).

9. Nguyen Van Thu and Luong Thi Theu, J. Stat. Phys **168**, 1 (2017).

10. N. V. Thu, T. H. Phat, and P. T. Song, J. Low Temp. Phys. **186**, 127 (2017).

11. J. Schiefele and C. Henkel, J. Phys. A **42**, 045401 (2009).

12. D. Dantchev, M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. E **67**, 066120 (2003).

13. S. Biswas, Eur. Phys. J. D **42**, 109 (2007).

14. S. Biswas et al., J. Phys. B **43**, 085305 (2010).

15. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press (2008).

16. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).

17. J. O. Andersen, Rev. Mod. Phys. **76**, 599 (2004).

18. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press (2003).

19. I. E. Mazets, Phys. Rev. **65**, 033618 (2002).

20. D. A. Takahashi, M. Kobayashi, and M. Nitta, Phys. Rev. B **91**, 184501 (2015).

21. J. O. Indekeu, C.-Y. Lin, N. V. Thu, B. Van Schaeybroeck, and T. H. Phat, Phys. Rev. A **91**, 033615 (2015).

22. A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw Hill, Boston (1971).

23. S. Biswas, J. Phys. A **40**, 9969 (2007).

24. D. C. Roberts and Y. Pomeau, arXiv:cond-mat/0503757.