

# НЕТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ И $U(1)$ -ИНВАРИАНТНОСТЬ

Э. Я. Нугаев <sup>a\*</sup>, А. В. Шкерин <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Институт ядерных исследований Российской академии наук  
117312, Москва, Россия

<sup>b</sup> Федеральная политехническая школа Лозанны  
CH-1015, Lausanne, Switzerland

Поступила в редакцию 22 мая 2019 г.,  
после переработки 22 мая 2019 г.  
Принята к публикации 30 мая 2019 г.

Обсуждаются решения классических уравнений движения в теориях с комплексным скалярным полем и глобальной или калибровочной  $U(1)$ -симметрией. Примерами таких решений являются  $Q$ -шары, однородный заряженный скалярный конденсат, а также нелинейные локальные неоднородности на фоне классически устойчивого конденсата. Свойства этих решений, в том числе их устойчивость, обсуждаются с точки зрения различных перспективных приложений в физических задачах. Развитый формализм позволяет рассматривать модели с дополнительными массивными полями и связать нетопологические солитоны, возникающие в таких моделях, с  $Q$ -шарами. Также обсуждаются эффекты, связанные с наличием в теории дополнительных безмассовых полей, таких как электромагнитное или гравитационное.

DOI: 10.31857/S0044451020020145

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Введение</b> .....	357	3.1.1. Нелинейная оптика .....	366
<b>2. Заряженный скалярный конденсат и <math>Q</math>-шары</b> .....	360	3.1.2. Конденсат Бозе–Эйнштейна .....	366
2.1. Описание модели .....	360	3.1.3. Релятивистская теория поля .....	367
2.2. Свойства .....	361	3.2. $Q$ -дырки и $Q$ -балджи .....	367
2.3. Устойчивость .....	363	3.3. Пример .....	370
2.3.1. Линейная классическая устойчивость $Q$ -шаров .....	364	<b>4. <math>Q</math>-шары в теориях с дополнительными полями</b> .....	371
2.3.2. Линейная классическая устойчивость однородного конденсата .....	365	4.1. Дополнительные тяжелые поля .....	371
<b>3. Нелинейные разрежения и сгущения в заряженном скалярном конденсате</b> ....	366	4.2. Калибровочные $Q$ -шары .....	373
3.1. Мотивация .....	366	4.3. Бозонные звезды .....	374
		<b>5. Заключение</b> .....	375
		<b>Литература</b> .....	376

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Термин «солитон» был введен Забуски и Крускалом [1] в 1965 г. при численном изучении нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза. Они обнаружили уединенные волны, упруго взаимодействующие

друг с другом с сохранением своей начальной формы. Немного ранее решения с подобными свойствами изучались в системе синус-Гордона Перрингом и Скиммом [2]<sup>1)</sup>. Вскоре число публикаций о «соли-

\* E-mail: emin@ms2.inr.ac.ru

<sup>1)</sup> Одно из точных решений для изучаемой системы также уже было известно к тому времени.

тонах» стало расти «экспоненциально быстро» (см. подробнее в более ранних обзорах [3, 4]), и к настоящему моменту подобные объекты широко изучаются как теоретически, так и экспериментально в различных областях физики.

В теории поля термин «солитон» применяется к широкому классу полевых конфигураций, описывающих локализованный сгусток энергии [5]. Обычно это частицеподобное решение классических уравнений движения, сохраняющее свой вид при свободном движении, но, вообще говоря, меняющее его при взаимодействии<sup>2)</sup>. Стационарность решения обеспечивается балансом между дефокусирующим дисперсионным эффектом и фокусирующим нелинейным взаимодействием.

В зависимости от асимптотического поведения полей солитоны можно разделить на топологические и нетопологические. Упомянутые выше решения системы синус-Гордона являются топологическими. Помимо них, важным примером для физики частиц являются скирмионы (см., например, [6]). Что касается нетопологических солитонов, то наиболее простые их примеры — Q-шары [7]. Асимптотики нетопологических солитонов имеют одно и то же вакуумное значение на пространственной бесконечности. Таким образом, отображение пространственной бесконечности в вакуумное многообразие, осуществляемое решением, тривиально. Заметим, однако, что локализованные решения могут возникнуть и для невакуумных граничных условий [8]. Существование и устойчивость нетопологических солитонов определяются сохраняющимся зарядом, отвечающим симметрии теории. При фиксированном заряде солитон соответствует локальному экстремуму функционала энергии. В случае, если этот экстремум соответствует локальному минимуму, конфигурация стабильна относительно малых возмущений<sup>3)</sup>. В противоположном случае возникает неустойчивость на классическом уровне.

Солитон соответствует экстремуму гамильтониана. В общем случае это состояние находится далеко от вакуума и не может быть получено из него по теории возмущений. В то же время, теорию возмущений можно строить во внешнем поле солитона. Полученный таким образом спектр возмущений позволяет описать некоторые квантовые эффекты [9] (см. также главу 5 книги [10]). Такой квазиклассиче-

ский подход применим в режиме слабой связи, когда нелинейное взаимодействие параметрически подавлено [5, 11]. Хорошей иллюстрацией этого подхода является скалярная теория поля  $\phi$  с нелинейным потенциалом  $V(\phi)$  в 1+1 измерениях. Если потенциал имеет вид

$$V(\phi) = g^{-2}U(g\phi), \quad (1)$$

где функция  $U$  зависит от  $g$  только через комбинацию  $g\phi$ , то переопределением полей  $g\phi \rightarrow \phi$  можно вынести всю зависимость от константы связи в виде коэффициента  $g^{-2}$  перед лагранжевой плотностью. К теории с такой зависимостью действия от безразмерной константы хорошо применим квазиклассический подход. В четырехмерном пространстве-времени аналогичная процедура применима к потенциалу вида

$$V(\phi) = m^4 g^{-2}U(g\phi/m), \quad (2)$$

где  $m$  характеризует энергетический масштаб теории и, например, может соответствовать массе свободного бозона.

Поскольку солитон является непертурбативным решением уравнений поля, его взаимодействие с пробной частицей, вообще говоря, отличается от двухчастичного взаимодействия свободных частиц. Аналогичная ситуация имеет место в случае нерелятивистского бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК). Тем не менее, непертурбативные возмущения над конденсатом можно изучать и в двухчастичном приближении в случае сильно разреженного конденсата. Условием для использования такого приближения является малость плотности энергии взаимодействия поля в солитоне по сравнению с внешним потенциалом, который определяет условия локализации конденсата.

Вернемся к теории комплексного скалярного поля с глобальной или локальной  $U(1)$ -инвариантностью. При определенных условиях для потенциала взаимодействия в ней существуют локализованные стационарные решения с конечным зарядом и энергией, называемые Q-шарами [7] (см. также главу 6 монографии [12]). История изучения подобных решений началась с работы Розена [13]. Позднее Q-шары изучались в многочисленных расширениях Стандартной модели в физике частиц и космологии, например, в суперсимметричных теориях [14–16], для решения проблемы бариогенезиса [17] и описания фазовых переходов в ранней Вселенной [18], а также в качестве кандидатов на роль темной материи [19]. Компактные Q-шары также рассматриваются в качестве альтернативы черным дырам. Например, тяжелый вращающийся Q-шар в центре галактики трудно отличить от сверхмассивной керровской чер-

<sup>2)</sup> По этой причине используется термин «солитоноподобные» решения, но в обзоре будет использоваться просто «солитон» с учетом приведенной выше оговорки.

<sup>3)</sup> Это еще не гарантирует абсолютную стабильность, см. разд. 2.3.

ной дыры [20, 21] (см. также [22]). С другой стороны,  $Q$ -шары имеют достаточно простую структуру и этим можно воспользоваться при изучении других компактных объектов, чья динамика усложнена дополнительными степенями свободы. Например, некоторые типы бозонных звезд сводятся к  $Q$ -шарам в пределе бесконечной планковской массы [23]. В свою очередь, бозонными звездами можно моделировать реалистичные астрофизические объекты, такие как нейтронные звезды, в случаях, когда внутренней динамикой последних можно пренебречь, см. обзор [24].

Изучение  $Q$ -шаров позволяет понять природу других нелинейных решений классических уравнений движения. К примеру, в теориях действительного скалярного поля отсутствует сохраняющийся  $U(1)$ -заряд, обеспечивающий устойчивость. Тем не менее, классические уравнения допускают долгоживущие локализованные периодические во времени конфигурации, названные осциллонами [25, 26]. Осциллоны могли играть существенную роль в ранней Вселенной, например, на инфляционной стадии [27]. Среди последних исследований на эту тему — описание передачи асимметрии от поля инфлатона барионной материи через осциллоны [28], расчет гравитационно-волнового сигнала от столкновения осциллонов [29, 30], образование первичных черных дыр из действительного скалярного поля [29].

Имея явное решение для  $Q$ -шара в релятивистской теории поля, можно поставить задачу о нелинейных решениях в нерелятивистском режиме. Заметим в связи с этим, что глобальная  $U(1)$ -инвариантность, необходимая для существования солитонов, появляется в нерелятивистском пределе естественным образом, даже если исходная релятивистская теория ей не обладала (см., например, [31, 32]). Нерелятивистские системы с решениями, аналогичными  $Q$ -шарам, такие как БЭК, будут обсуждаться в разд. 3.1.

Помимо  $Q$ -шаров в теории комплексного скалярного поля с глобальной  $U(1)$ -симметрией встречается много других нетривиальных решений. В качестве наиболее естественного примера можно рассмотреть пространственно-однородный заряженный конденсат<sup>4)</sup>. Понимание свойств конденсатного ре-

<sup>4)</sup> Под пространственно-однородным решением мы подразумеваем конфигурацию, у которой и фаза, и амплитуда не зависят от пространственной координаты. Заметим, что можно построить решения, которые спонтанно нарушают трансляционную инвариантность пространства, но сохраняют ненарушенную линейную комбинацию трансляций и генератора  $U(1)$ -симметрии, см. [33].

шения важно, например, для описания динамики скалярных полей после инфляции, см. обзор [34]. В зависимости от потенциала самодействия как конденсат, так и  $Q$ -шары могут быть классически устойчивы [35, 36]. В частности, пространственная нестабильность конденсата ведет к формированию  $Q$ -шаров. Среди других нелинейных конфигураций отметим  $Q$ -дырки и  $Q$ -балджи [8], которые описывают нелинейные разрежения и сгущения в классически устойчивом конденсате. Отметим, что эти солитоны на бесконечности имеют конденсатную, а не вакуумную асимптотику. В данном обзоре мы разберем свойства перечисленных типов решений.

Существуют прямые аналоги  $Q$ -шаров в теориях с дополнительными действительными и комплексными скалярными полями. Наиболее изученным примером являются нетопологические солитоны в модели Фридберга, Ли и Сирлина [37]. В случае, когда масса дополнительного действительного поля в этой модели велика по сравнению с массой бозона комплексного поля, новую степень свободы можно проинтегрировать. В этом случае изучение свойств нетопологических солитонов сводится к изучению  $Q$ -шаров в эффективном потенциале самодействия. В случае отсутствия иерархии энергетических масштабов анализ усложняется. Отдельного рассмотрения заслуживают теории с безмассовыми полями, такими как электромагнитное или гравитационное.

Обычно  $Q$ -шары вполне характеризуются энергией  $E$  и глобальным зарядом  $Q^5$ ). Если добавить к этим величинам сохраняющийся угловой момент  $J$ , то можно также рассмотреть аксиально-симметричные вращающиеся  $Q$ -шары [38] (см. также [39]) либо протяженные вихреобразные конфигурации, называемые  $Q$ -трубками (см., например, [40–42]). Отказ от условия стационарности увеличивает количество решений, но при этом теряется возможность их описания в аналитическом виде.

В данном обзоре будут обсуждаться нетопологические солитоны с глобальной или калибровочной  $U(1)$ -инвариантностью с упором на недавние достижения в этой области. В разд. 2 мы с помощью различных подходов изучим свойства классически устойчивых  $Q$ -шаров, их классически неустойчивые аналоги (так называемые  $Q$ -клауды) и однородный конденсат. Раздел 3 посвящен двум другим типам решений:  $Q$ -дыркам и  $Q$ -балджам. Перед этим мы приведем дополнительные мотивационные сообра-

<sup>5)</sup> Именно, может существовать лишь конечное число решений с разной частотой, но одинаковыми  $E$  и  $Q$ .

жения для изучения подобных решений, возникающие из аналогии между солитонами в релятивистской теории поля и солитонами в нерелятивистских теориях, таких как БЭК и нелинейная оптика.

В разд. 4 изучаются нетопологические солитоны в моделях с дополнительными полями. Наша цель заключается в иллюстрации общих подходов к теориям с дополнительными полями и обычными Q-шарами, а также пределов, где в этих теориях возникают существенные отличия. Сначала будет изучена модель с точным аналитическим решением для дополнительного действительного поля. Затем новая степень свободы будет проинтегрирована и построен эффективный потенциал самодействия комплексного поля. Мы сравним подход с использованием эффективного потенциала и проанализируем свойства явного решения. Затем будут рассмотрены теории с калибровочными Q-шарами, возникающие при расширении группы симметрии до локальной U(1). Также будут затронуты некоторые вопросы, связанные с описанием бозонных звезд, в которых роль дополнительного поля играет гравитация. В разд. 5 приведен обзор перспективных направлений для исследования нетопологических солитонов.

В обзоре используется натуральная система единиц:  $c = \hbar = 1$ . Буквы греческого и латинского алфавитов используются для пространственно-временных и пространственных индексов соответственно, а обозначение  $\dot{\phi}$  используется для производной величины  $\phi$  по времени. Суммирование по повторяющимся индексам подразумевается.

## 2. ЗАРЯЖЕННЫЙ СКАЛЯРНЫЙ КОНДЕНСАТ И Q-ШАРЫ

### 2.1. Описание модели

Рассмотрим теорию комплексного поля  $\phi$  в  $(d + 1)$ -мерном пространстве-времени, описываемую лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - V(\phi^* \phi), \quad (3)$$

где  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Можно искать сферически-симметричные конфигурации  $\phi(r, t)$ ,  $r = \sqrt{-\eta^{ij} x_i x_j}$ , являющиеся локальным экстремумом гамильтониана

$$H = \int d^d x (\dot{\phi}^* \dot{\phi} + \nabla \phi^* \nabla \phi + V(\phi^* \phi)) \quad (4)$$

при определенном значении глобального U(1)-заряда

$$Q = i \int d^d x (\dot{\phi}^* \phi - \dot{\phi} \phi^*). \quad (5)$$

Задача на отыскание условного экстремума сводится к вариации функционала  $H - \omega Q$  с лагранжевым множителем  $\omega$ . Решение этой задачи приводит к стационарной конфигурации [11]

$$\phi(r, t) = f(r) e^{i\omega t} \quad (6)$$

с действительной функцией  $f(r)$ , удовлетворяющей следующему уравнению:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{df}{dr} + \omega^2 f - f \frac{dV(f^2)}{df^2} = 0. \quad (7)$$

Заметим, что конфигурация (6) нестатична, поэтому масштабные аргументы Деррика [43], которые запрещают статические солитоны в скалярных теориях при  $d > 1$ , неприменимы.

Уравнение движения (7) может быть также получено вариацией лагранжиана с плотностью (3) по отношению к  $\phi$  и  $\phi^*$  и последующей подстановкой анзаца (6). С другой стороны, можно также подставить анзац (6) непосредственно в выражение (3), а затем проварьировать результат по  $f$ . «Принцип максимальной симметричности» [44] гарантирует, что конечное уравнение будет иметь один и тот же вид (см. также Приложение 4 в [5]).

Q-шар описывается регулярным решением вида (6) с конечной энергией, зарядом и монотонно уменьшающимся профилем  $f^6$ ). Рассмотрим условия существования подобных решений. Без потери общности можно положить  $V(0) = 0$ . Качественный анализ решений нелинейного уравнения (7) можно провести, воспользовавшись механической аналогией. В этом подходе уравнение (7) следует из закона Ньютона движения частицы единичной массы в потенциале

$$U_\omega(f) = \frac{1}{2}(\omega^2 f^2 - V(f)) \quad (8)$$

с учетом силы трения при  $d > 1$ . При этом радиальная координата  $r$  соответствует времени, а амплитуда скалярного поля  $f$  — координате частицы. Механическая аналогия часто используется для нахождения классических симметричных решений уравнений теории поля (7) и сводит задачу к поиску и классификации траекторий движения частицы в потенциале (8).

Классическая траектория, соответствующая левому решению, представлена на рис. 1. Из конечности энергии следует, что  $f(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , по-

<sup>6)</sup> Если отказаться от требования монотонности  $f$ , то появляются дополнительные решения с нулями плотности заряда при конечных  $r$ , которые можно интерпретировать как «возбужденные состояния» Q-шаров (см. [45]).

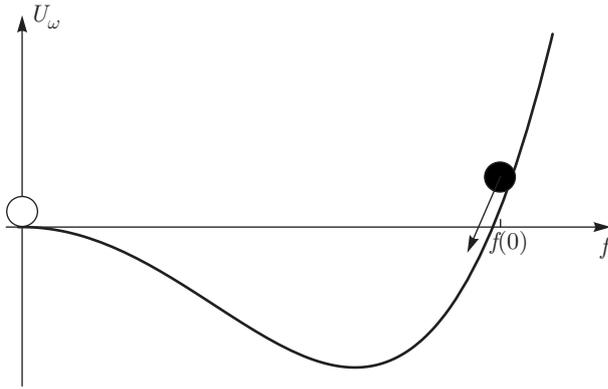


Рис. 1. Вид эффективного потенциала (8), допускающего решения в виде Q-шаров. Траектория частицы представлена для случая  $d > 1$

этому частица должна остановиться на вершине эффективного потенциала  $U_\omega(f)$ . Отсюда имеем ограничение  $U_\omega''(0) < 0$ , из которого следует верхний предел для  $|\omega|$ . Если, например,  $V(\phi^*\phi) \sim m^2\phi^*\phi$  при малых значениях поля, то  $f$  экспоненциально убывает на бесконечности,  $f \sim \exp(-\sqrt{m^2 - \omega^2}r)$ , откуда получаем ограничение  $|\omega| < m$ . Чтобы частица могла закатиться на верхушку барьера  $U_\omega(f)$ , необходимо стартовать из такой точки  $f(0)$ , что  $U_\omega(f(0)) > 0$  при  $d > 1$ , либо  $U_\omega'(f(0)) > 0$  и  $U_\omega(f(0)) = 0$  при  $d = 1$ .

Заметим, что для  $\omega$ , фиксированной в допустимом интервале, частицу можно запускать из разных точек. Если начальное положение частицы ниже  $f(0)$ , то частица не докатится до максимума в начале координат. Если же начальное положение частицы выше  $f(0)$ , то она преодолеет максимум с ненулевой скоростью и покатится дальше. Таким образом, мы имеем качественно разное поведение при «недолете» и «перелете», что очень удобно с точки зрения численного решения.

Рассмотрим теперь другой класс решений уравнения (7) вида

$$f(r) = f_c = \text{const.} \tag{9}$$

Постоянное решение существует, если у потенциала  $U_\omega(f)$  есть локальный экстремум:

$$\left. \frac{dU_\omega(f)}{df} \right|_{f=f_c} = 0. \tag{10}$$

Это решение обладает конечными плотностями энергии и заряда,

$$\rho_Q = 2\omega f_c^2, \quad \rho_E = \omega^2 f_c^2 + V(f_c^2), \tag{11}$$

но в бесконечном пространстве полная энергия и полный заряд расходятся. Заметим, что это решение не соответствует газу свободных частиц около классического вакуума, так как в общем случае  $\rho_E \neq m\rho_Q$ , а описывает однородный заряженный конденсат.

Классически стабильная конфигурация типа конденсата или Q-шара описывает стационарное распределение материи в основном состоянии при нулевой температуре [49,50]. Это состояние спонтанно нарушает трансляции, связанные с генератором  $H$  и внутреннюю  $U(1)$ -симметрию, связанную с генератором  $Q$ . Однако их линейная комбинация

$$F := H - \omega Q \tag{12}$$

остаётся ненарушенной. Эта ситуация с сохранением линейной комбинации генераторов была названа в [50] “spontaneous symmetry probing”. Мы можем ассоциировать частоту  $\omega$  с химическим потенциалом конфигурации. Как будет видно далее, эта аналогия между теорией поля при нулевой температуре и статистической физикой позволяет лучше понять некоторые свойства нетопологических солитонов. В завершение отметим, что нахождение условного экстремума  $H$  при заданном  $Q$  эквивалентно отысканию экстремума  $F$  при фиксированном  $\omega$  [37].

### 2.2. Свойства

Без ограничения общности ниже мы рассматриваем решения с  $\omega > 0$ . Как было упомянуто во Введении, Q-шары характеризуются зарядом и энергией

$$Q = 2\omega \int d^d x f^2, \tag{13}$$

$$E = \int d^d x (\omega^2 f^2 + (\nabla f)^2 + V(f^2)).$$

Возьмем производную по  $\omega$  в выражениях (13) и воспользуемся уравнением движения (7) для получения связи между дифференциалами  $Q$  и  $E$ <sup>7)</sup>:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} = \omega \frac{\partial Q}{\partial \omega}. \tag{14}$$

<sup>7)</sup> Заметим, что заряд и энергия, определенные в (13), имеют смысл не только для решений уравнений движения, но и для более общих конфигураций вида (6). Таким образом, они могут содержать бесконечное количество параметров. Мы выбираем  $\omega$  для параметризации одномерного пространства решений типа Q-шаров и им подобных. Тогда  $\partial Q/\partial \omega$  и  $\partial E/\partial \omega$  можно понимать в смысле производных по направлению. Соотношения (14) и (15) понимаются именно в этом смысле.

Значит,  $Q(\omega)$  и  $E(\omega)$  одновременно возрастают или убывают и имеют экстремумы при одинаковых значениях частоты  $\omega = \omega_c$ . При построении параметрической зависимости  $E$  как функции  $Q$  эти экстремумы становятся точками излома. При  $\omega \neq \omega_c$  уравнение (14) эквивалентно

$$\frac{\partial E}{\partial Q} = \omega. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) являются наиболее важными соотношениями для нетопологических солитонов. Их область применения гораздо шире, чем теория Q-шаров. В самом деле, они справедливы для всех типов солитонов, обсуждаемых в этом обзоре: однородного скалярного конденсата, нелинейных разрежений и сгущений в конденсате, солитонов в теориях с дополнительными скалярными и калибровочными полями, а также с гравитацией.

Точка излома графика  $E(Q)$  может соответствовать решению с максимальными зарядом и энергией (рис. 2а), решению с минимальными зарядом и энергией (рис. 2б) или иному решению (рис. 2в). Как будет показано в разд. 2.3, излом обозначает границу между классически устойчивыми и классически неустойчивыми Q-шарами. Заметим также, что если излом находится справа (как на рис. 2а), то теория содержит статическое решение с нулевым зарядом и положительной энергией. Можно показать, что это решение соответствует туннельному решению в квантовомеханической задаче.

На рис. 2б,в продемонстрированы ситуации, когда энергия и заряд солитонов не ограничены сверху. Часть этих решений абсолютно устойчива. Угловая частота устойчивых солитонов с большим зарядом стремится к нижнему пределу  $\omega_{min}$ . Если этот предел строго положителен, то Q-шары хорошо описываются тонкостенным приближением [7]. Стенка разграничивает область с почти однородным конденсатом и внешнее пространство, где поле стремится к вакуумному значению. В таком приближении полезно определить поверхностную энергию:

$$E_{surf} = \int d^d x (\nabla f)^2. \tag{16}$$

Можно также отметить полезное соотношение между поверхностной энергией и «свободной энергией» Q-шара (12):

$$F = \frac{2}{d} \int d^d x (\nabla f)^2 = \frac{2E_{surf}}{d}. \tag{17}$$

Случай  $\omega_{min} > 0$  типичен для моделей с полиномиальным скалярным потенциалом. Для существования Q-шаров в теориях с одним комплексным полем

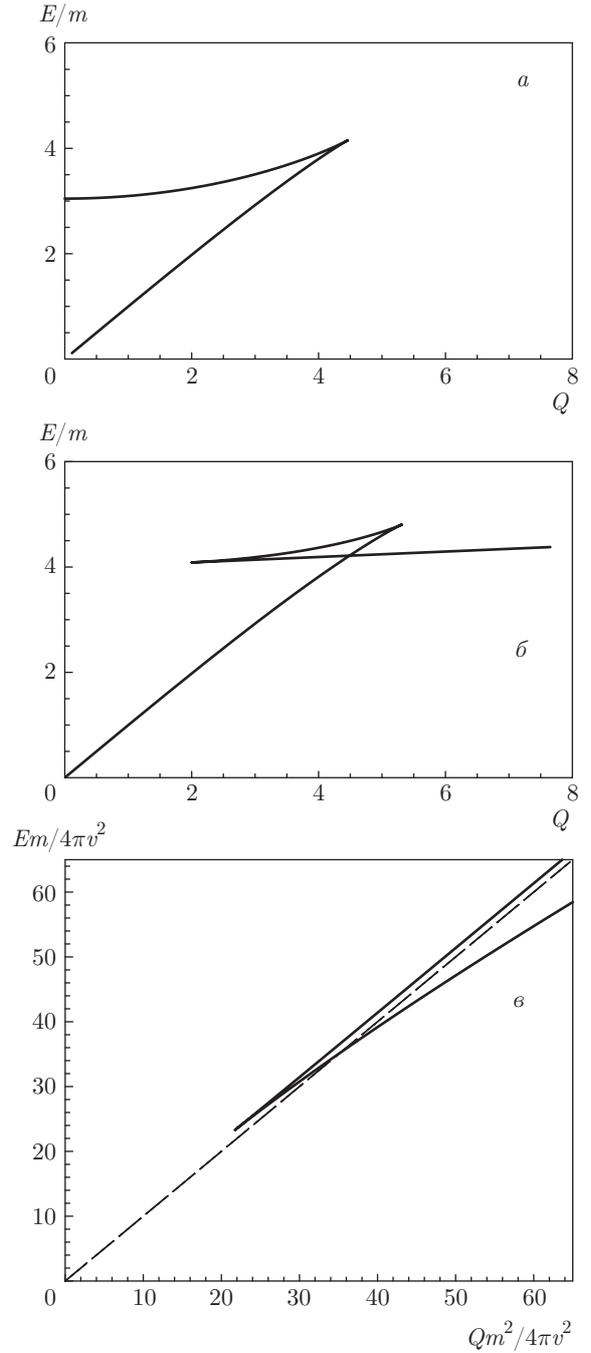


Рис. 2. Параметрическая зависимость энергии Q-шара  $E$  от его заряда  $Q$  в различных моделях. а) (1 + 1)-мерная теория с полиномиальным потенциалом шестой степени (см. выражение (38)). Более подробно Q-шары в этой модели изучены в [46]. Мы взяли  $\alpha = 1$  и  $\beta = 0.1$ , чтобы существовало статическое решение  $\omega_{min} = 0$ . Излом находится справа. б) Та же модель, но при  $\beta = 0.19$  и  $\omega_{min} > 0$ . в) Модель в (3 + 1)-мерном пространстве-времени с плоским кусочно-параболическим потенциалом:  $V(\phi\phi^*) = m^2\phi\phi^*$  для  $\phi\phi^* < v^2$ , и  $V(\phi\phi^*) = m^2v^2$  для  $\phi\phi^* > v^2$ . Q-шары в этой модели изучались в [13, 47, 48]. Излом располагается слева. Штриховая линия соответствует газу невзаимодействующих частиц с  $E = mQ$

и глобальной  $U(1)$ -симметрией ограниченный снизу полиномиальный потенциал должен быть по крайней мере шестой степени по полю [7]<sup>8)</sup>. Интерес с точки зрения феноменологии представляют потенциалы, выходящие на плато при больших амплитудах поля  $f^2$  (см., например, [52, 53]). В этом случае  $\omega_{min} = 0$  и тонкостенное приближение неприменимо.

Как уже упоминалось, стационарные конфигурации вида (6) можно рассматривать с точки зрения статистической физики. Также оказывается полезной гидродинамическая аналогия для нелинейных полевых решений. Рассмотрим тензор энергии-импульса теории (3):

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (18)$$

При  $d > 1$  определим

$$T_{00} = \rho_E(r),$$

$$T_{ij} = \left( \frac{x_i x_j}{r^2} - \frac{1}{d} \delta_{ij} \right) s(r) + \delta_{ij} p(r). \quad (19)$$

Тогда  $\rho_E$  соответствует плотности энергии решения,

$$E = \int d^d x \rho_E, \quad (20)$$

$s(r)$  определяет распределение вязкости<sup>9)</sup>, а  $p(r)$  — давление,

$$p(r) = \omega^2 f^2 - \frac{1}{d} f'^2 - V(f^2), \quad d > 1. \quad (21)$$

Из выражений (13), (20) следует, что для положительного потенциала  $V(f^2)$  плотность энергии  $\rho_E$  также положительна для всех  $r$ . Заметим, что плотность энергии не обязана быть монотонно убывающей функцией радиуса. Далее, из (8) и (21) в случае  $d > 1$  видно, что в центре Q-шара давление положительно, а далеко снаружи оно строго отрицательно. Рисунок 3 иллюстрирует эти свойства в  $(3 + 1)$ -мерной модели. Таким образом, условия термодинамического равновесия не выполняются для Q-шаров. В частности, отношение  $\partial p / \partial \rho_E \equiv (\partial p / \partial r) (\partial r / \partial \rho_E)$ , определяющее квадрат скорости звука, отрицательно везде, кроме области внутри солитона. В тонкостенном приближении и  $p$ , и  $\partial p / \partial \rho_E$  невелики и положительны внутри Q-шара.

<sup>8)</sup> Если рассматривать неограниченные снизу потенциалы, то достаточно иметь нелинейность четвертой степени, например  $V = m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$  [51]. Однако все Q-шары в такой модели нестабильны.

<sup>9)</sup> Насколько известно авторам, впервые вязкие силы в контексте Q-шаров были упомянуты в работе [54].

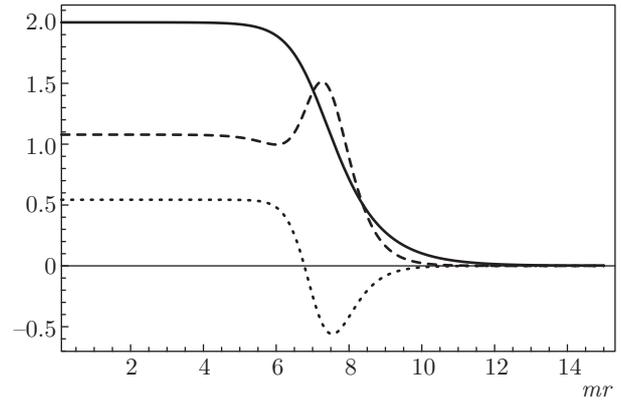


Рис. 3. Плотность энергии (пунктирная линия) и давление (штриховая линия) для Q-шара (профиль показан сплошной линией) в режиме тонкой стенки. Здесь взята  $(3 + 1)$ -мерная теория с потенциалом (38). Все величины нормированы на  $m$ , и  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.2m^{-2}$ ,  $\omega = 0.45m$

Для больших Q-шаров в модели с плоским потенциалом при  $d = 3$  можно получить, что  $\partial p / \partial \rho_E|_{r=0} \approx 5/3$ . Заметим, наконец, что для однородного конденсата величина  $\rho_E$  всегда положительна, в то время как давление  $p = 2U_\omega(f_c)$  и, как следует из выражений (8) и (21), может быть любого знака.

Отметим для полноты, что в  $(1 + 1)$ -мерном случае недиагональные компоненты  $T_{ij}$  отсутствуют, а давление  $p(r) = \omega^2 f^2 + f'^2 - V(f^2) = \text{const} = 0$  принимает нулевое значение для любого решения уравнений движения (7).

Мы приходим к выводу, что гидродинамическое описание может применяться весьма ограниченно к таким системам, как Q-шары. Оно применимо во внутренней области солитона в тонкостенном приближении или для однородного конденсата. Но оно неприменимо, когда имеют место большие градиенты поля, т. е. вблизи поверхности солитона. Коротко говоря, Q-шар — это не капля какой-либо жидкости. Это же справедливо и в отношении других нетопологических солитонов.

### 2.3. Устойчивость

Нестабильность нетопологических солитонов может вызываться различными причинами. Она может проявиться уже на уровне классических уравнений движения. В этом случае в поле солитона имеются малые возмущения, экспоненциально растущие со временем. Неустойчивые моды могут быть как в спектре линейных возмущений, так и на нелинейном уровне. Линейная классическая неустойчивость означает, что солитон с конечной энергией не

является условным минимумом гамильтониана  $H$ , а соответствует локальному максимуму или седловой точке. Оказывается, что классически неустойчивые Q-шары отвечают седловым точкам  $H$ , поскольку в их спектре имеется ровно одна распадная мода<sup>10</sup>). Однородный конденсат также может быть неустойчив относительно линейных возмущений и также имеет не более одной распадной моды.

Солитон, устойчивый на классическом уровне, может тем не менее оказаться нестабильным при учете квантовых и статистических эффектов. Отметим здесь возможность туннелирования солитонного решения в энергетически более выгодное состояние [56, 57], возможность квантового испарения Q-шара в частицы других полей [58, 59], а также неустойчивость, возникающую за счет радиационных поправок к скалярному потенциалу [60]. Ниже в этом разделе мы рассмотрим линейную классическую устойчивость Q-шаров и однородного конденсата.

### 2.3.1. Линейная классическая устойчивость Q-шаров

Рассмотрим линейную классическую устойчивость Q-шаров. Считая заданным классическое решение, изучим его возмущения вида

$$\phi(\mathbf{x}, t) = f(r)e^{i\omega t} + h(\mathbf{x}, t)e^{i\omega t}, \quad (22)$$

где

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{l=0 \\ -l \leq m \leq l}}^{\infty} \left( h_1^{(l)}(r)e^{i\gamma t} + h_2^{(l)}(r)e^{-i\gamma^* t} \right) \times Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (23)$$

В этой подстановке  $h_1^{(l)}$  и  $h_2^{(l)}$  — действительные функции,  $Y_{l,m}$  — сферические гармоники,  $\gamma$  — комплексный параметр. Возмущение (22) надо подставить в линеаризованные уравнения движения для поля  $\phi$ . Если  $\text{Im } \gamma = 0$  на всех решениях линеаризованных уравнений, то Q-шар классически устойчив.

Заметим, что анзац (23) не описывает все возможные типы возмущений фонового решения. В частности, им не описываются моды, соответствующие спонтанному нарушению  $U(1)$ -симметрии и лоренц-инвариантности, см. подробнее [61]. Также заметим, что перемешивание между  $h_1^{(l)}$  и  $h_2^{(l)}$  в линеаризованных уравнениях движения приводит к неэрмитовости оператора, собственные значения которого соответствуют  $\gamma$ , а сами уравнения не сводятся к уравнению Шредингера. Тем не менее, квантовомеханическая интуиция дает правильное представление о связанных состояниях в поле Q-шара [62].

Изучение условий, при которых спектр оператора линейных возмущений не содержит экспоненциально растущих мод, приводит к следующему достаточному условию стабильности Q-шаров [11, 37, 55] (см. также [63])<sup>11</sup>):

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} < 0, \quad (24)$$

или с учетом (14)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Q^2} < 0. \quad (25)$$

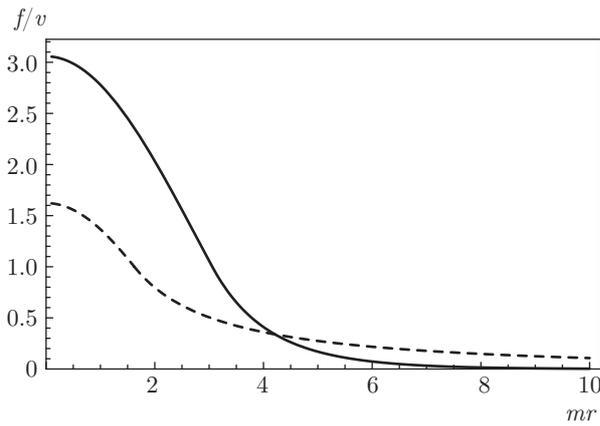
Как показано в работе [55], условие (24) также является необходимым для классической устойчивости Q-шаров. Мы видим, что области стабильных и нестабильных решений разделены точками изломов, в которых  $\partial Q / \partial \omega = \partial E / \partial \omega = 0$ . В соответствии с условием (25), нижняя ветвь решений на рис. 2 стабильна, а верхняя — нестабильна. Большие неустойчивые Q-шары имеют более широкий пространственный профиль, чем устойчивые решения того же заряда, как это проиллюстрировано на рис. 4. По этой причине их также называют Q-клаудами (Q-clouds) [66].

Как обсуждалось в разд. 2.2, частота  $\omega$  для Q-шара играет роль химического потенциала системы. С другой стороны, заряд солитона  $Q$  пропорционален количеству содержащихся в нем в связанном состоянии частиц  $N$ . Тогда условие (24) можно интерпретировать следующим образом. Для удаления одной частицы из Q-шара требуется провести работу  $-(\partial \omega / \partial Q) \Delta Q$ , где  $\Delta Q \sim \Delta N = 1$ . Если эта работа отрицательна, то Q-шару выгодно распадаться на отдельные частицы; в противоположном случае он устойчив по отношению к такому распаду. Мы видим, что аргумент из статистической физики правильно воспроизводит условие классической устойчивости.

Обсудим границы применимости статистического подхода. Он неприменим, если система, устойчивость которой мы исследуем, не изолирована от пространственной бесконечности, где находится

<sup>10</sup>) Авторам неизвестно общее доказательство этого утверждения, но во всех конкретных примерах оно справедливо, см. подробнее [55].

<sup>11</sup>) Заметим, что условие, аналогичное (24), было сначала получено для решений нелинейного уравнения Шредингера [64, 65].



**Рис. 4.** Классически неустойчивый Q-шар (или «Q-клауд», штриховая линия) и классически устойчивый Q-шар (сплошная линия) в (3 + 1)-мерной теории с плоским кусочно-параболическим потенциалом (см. подпись к рис. 2). Оба решения соответствуют одному и тому же заряду  $Qm^2/(4\pi v^2) \sim 10^2$

пробная частица. Примерами являются протяженные аксиально-симметричные конфигурации типа Q-трубок. И действительно, для Q-трубок условие (24) не выполняется [42]. Другой пример возникает в теориях с дополнительными безмассовыми полями, приводящими к появлению дальнедействующих сил. Так, теории с векторными калибровочными полями допускают так называемые калибровочные Q-шары [67]. Для них условие (24) также неприменимо [55] (см. разд. 4.2).

Вернемся к обсуждению спектра линейных возмущений вида (23). Исследования [11, 61] показывают, что неустойчивые Q-шары обладают единственной сферически-симметричной распадной модой. Для нее  $\text{Re } \gamma = 0$ . Значит, неустойчивые решения соответствуют седловым точкам гамильтониана теории. Для устойчивых Q-шаров  $\text{Im } \gamma = 0$  и имеется целый спектр колебательных мод. В пределе большого  $Q$  их количество пропорционально объему солитона  $\propto Q^3$  [62]. В заключение отметим, что при прохождении параметром  $\omega$  точки излома  $\omega = \omega_c$  распадная мода с  $\gamma^2 < 0$  переходит в колебательную с  $\gamma^2 > 0$ . Таким образом, у Q-шара с  $\omega = \omega_c$  есть дополнительная нулевая мода в спектре малых возмущений.

### 2.3.2. Линейная классическая устойчивость однородного конденсата

Необходимое и достаточное условие отсутствия растущих возмущений вида (23) над однородным

конденсатом (9) записывается в виде (см., например, [68])

$$\left. \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} \right|_{f=f_c} > 0, \quad z = \phi^* \phi. \quad (26)$$

Заметим, что если потенциал  $V$  ограничен снизу, то для существования Q-шаров [7] он должен удовлетворять условию (26) при некотором значении  $f_c$ . Далее, интересно сравнить условие (26) с условием стабильности Q-шаров (24). Так как заряд и энергия конденсата расходятся в бесконечном объеме, мы будем накладывать периодические граничные условия с периодом  $L^{(2)}$ . Тогда

$$Q_c = L^d \rho_Q, \quad E_c = L^d \rho_E, \quad (27)$$

где  $\rho_Q, \rho_E$  определяются из (11). Условие (26) переходит в неравенство

$$\left. \frac{\partial Q_c}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} > 0, \quad (28)$$

противоположное критерию (24).

Условия устойчивости конденсата и Q-шаров получились разными, потому что сами эти решения довольно сильно различаются. Можно проверить [55], что рассуждение, приводящее к критерию Вахитова – Колоколова (24), не подходит для однородного решения. Далее, статистический аргумент тоже неприменим, поскольку невозможно изолировать частицу от системы, занимающей весь доступный объем. Интересно отметить, что условия (24) и (28), на самом деле, не исключают друг друга, и можно построить скалярный потенциал, в котором будут как устойчивые Q-шары, так и устойчивый конденсат [68].

Сделаем важное замечание. В литературе подробно обсуждается механизм образования Q-шаров в ранней Вселенной путем распада однородного скалярного конденсата [19, 35, 69–73] (см. также [74]). Этот механизм неприменим, если конденсат классически устойчив. Задача получения устойчивых Q-шаров из устойчивого же конденсата весьма нетривиальна<sup>13)</sup>. Можно предположить, что при определенных условиях однородное решение туннелирует в энергетически более выгодное состояние, содержащее Q-шары. Процесс туннелирования можно описать квазиклассически, туннельное решение при этом является седловой точкой гамильтониана, а, как мы знаем, седловая точка гамильтониана — это Q-клауд. Таким образом, Q-клауд — это

<sup>12)</sup>  $L$  можно взять много больше размера Q-шара заряда  $Q_c$ .

<sup>13)</sup> Похожий вопрос обсуждается в работе [56].

сфалерон, т. е. решение, соответствующее вершине энергетического барьера, разделяющего классически устойчивые решения. Роль Q-клаудов в переходах между однородным и локализованным решениями обсуждалась в [68] и была подтверждена численно в [57].

Напоследок отметим, что распадная мода конденсата, если она существует, единственна, а соответствующее собственное значение  $\gamma$  является чисто мнимым, как и для неустойчивых Q-шаров.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РАЗРЕЖЕНИЯ И СГУЩЕНИЯ В ЗАРЯЖЕННОМ СКАЛЯРНОМ КОНДЕНСАТЕ

#### 3.1. Мотивация

##### 3.1.1. Нелинейная оптика

Как упоминалось во Введении, солитоны возникают во многих разделах физики за пределами релятивистской теории поля. Одним из таких разделов является нелинейная оптика, где солитоны изучаются не только теоретически, но и экспериментально [75, 76]. В частности, распространение нелинейных волн в оптическом волокне исследовалось с 1970-х гг. (см. обзор [77]). Математически солитон в этом случае — это огибающая  $u$  комплексной амплитуды электромагнитного поля волны, бегущей вдоль волокна. Сохранение формы волны достигается за счет баланса между дефокусирующей дисперсией и фокусирующим нелинейным показателем преломления среды.

Распространение нелинейных сохраняющих форму волновых импульсов обсуждалось теоретически в 1973 г. Хасегавой и Таппертом [78, 79] и было обнаружено экспериментально в 1980 г. [80]. В наши дни оптические солитоны привлекают большое внимание из-за возможности их использования для передачи информации на большие расстояния (реализовано на коммерческой основе с 2002 г.), в системах оптической коммутации, логических элементах и пр. [81–83].

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является основным инструментом описания оптических солитонов. В подходящих единицах оно записывается как

$$iu_z - \sigma u_{tt} + 2|u|^2u = 0. \quad (29)$$

Здесь  $z$  обозначает координату вдоль оптического волокна,  $t$  — запаздывающее время в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью вдоль волокна,  $\sigma = \pm 1$ . В зависимости от знака  $\sigma$  реализуются

два режима. Случай  $\sigma = -1$  соответствует аномальной дисперсии групповой скорости. Уравнение (29) тогда имеет решения в форме «светлых» солитонов. Для таких решений  $u$  локализована по переменной  $t$ . Также имеется однородное решение  $|u| = \text{const}$ , аналогичное заряженному конденсату, но при  $\sigma = -1$  оно классически неустойчиво.

Значение  $\sigma = 1$  отвечает нормальной дисперсии групповой скорости. В этом случае «светлые» солитоны отсутствуют. Постоянное решение  $|u| = \text{const}$  по-прежнему имеется и классически устойчиво. Помимо него, уравнение (29) имеет решения, описывающие локальное уменьшение интенсивности на постоянном фоне. Это так называемые «темные» солитоны [84]<sup>14</sup>. Отметим, что у светлого солитона набег фазы равен нулю, в то время как для темного солитона он отличен от нуля (и может достигать  $2\pi$ ). Экспериментально темные солитоны были получены в 1981 г. на фоне широких импульсов, имитирующих постоянный фон [86].

##### 3.1.2. Конденсат Бозе – Эйнштейна

Конденсация Бозе – Эйнштейна [87] в разреженном газе атомов [88] была обнаружена в 1995 г. в экспериментах с парами рубидия, натрия и лития, см. обзор [89]. В наши дни изучение разреженных квантовых газов стало важной частью атомной физики и физики конденсированных сред. Значение БЭК<sup>15</sup> для фундаментальной физики связывается, например, с изучением черных дыр [90, 91]. Также БЭК полезен как кандидат на роль темной материи [92].

Локализация БЭК обусловлена внешними, как правило, гармоническими, силами, создающими ловушку для газа атомов. Внешний потенциал обеспечивается магнитным полем. Обычно БЭК является разреженным основным состоянием системы с неоднородным профилем в импульсном и координатном пространствах. Средняя длина пробега атома в БЭК может быть на несколько порядков больше радиуса межатомного взаимодействия. Тем не менее, роль двухчастичного взаимодействия существенна при образовании конденсата.

В приближении среднего поля конденсат описывается уравнением Гросса – Питаевского. Последнее

<sup>14</sup> Решение НУШ, описывающее темный солитон, было получено в работе [85].

<sup>15</sup> Следует различать бозе-эйнштейновский конденсат и скалярный конденсат, обсуждавшийся в разд. 2. По нашей терминологии последний является однородным решением релятивистских уравнений, в то время как первый обычно неоднороден и описывается нерелятивистским уравнением.

имеет тот же вид, что и НУШ. К примеру, возьмем сферически-симметричный потенциал ловушки  $V(r)$ . Тогда при подходящем выборе единиц (ср. с уравнением (29)) уравнение Гросса–Питаевского записывается в виде

$$i\psi_t + \Delta_r \psi - g|\psi|^2 \psi + V(r)\psi = 0. \quad (30)$$

Здесь  $\psi$  обозначает волновую функцию системы,  $t$  и  $r$  — временную и радиальную координаты соответственно, а  $g$  задает силу межатомного взаимодействия. Если это взаимодействие притягивающее ( $g > 0$ ), в БЭК имеются светлые солитоны, впервые наблюдавшиеся в двухкомпонентной системе в 1999 г. [93]. Если взаимодействие отталкивающее ( $g < 0$ ), возможно наличие темных солитонов, что также было обнаружено на опыте [94].

Заметим, что уравнение Гросса–Питаевского (30) следует из минимизации функционала энергии

$$E[\psi] = \int dr \left( |\nabla \psi|^2 + V(r)|\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4 \right) \quad (31)$$

при фиксированном числе частиц  $N = \int dr |\psi|^2$ . Мы заключаем, что нерелятивистская теория поля, описывающая БЭК, инвариантна относительно глобальных фазовых сдвигов волновой функции  $\psi$ , что очень похоже на глобальную инвариантность релятивистской теории поля  $\phi$ , описывающего Q-шары.

### 3.1.3. Релятивистская теория поля

Как мы уже видели, условие возникновения светлых либо темных солитонов зависит от знака дисперсии либо межатомных сил. Светлые солитоны имеют очевидные аналоги в релятивистской теории поля — это те же Q-шары. Например, в [95] разобраны признаки сходства между Q-шарами и солитонами в БЭК, а в работе [96] обсуждается образование Q-шаров в БЭК.

Решения, аналогичные темным солитонам, также можно найти в релятивистской теории поля. Рассмотрим  $(1+1)$ -мерную теорию действительного скалярного поля  $\varphi$  с потенциалом, допускающим спонтанное нарушение,  $V(\varphi) = -m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4$ ,  $\lambda > 0$ . В ней существует решение типа кинка,  $\varphi \sim \text{th}(mx/\sqrt{2})$  [97–99]. Если сделать из  $\varphi$  комплексное поле  $\phi$  и заменить  $\varphi^2 \rightarrow \phi^*\phi$ , то теория станет  $U(1)$ -инвариантной. В ней могут существовать стационарные решения вида (6). При  $\omega = 0$  будет воспроизводиться обычный кинк с нулевым зарядом. При  $\omega > 0$  имеется непрерывное семейство решений с плотностью заряда

$$\rho_Q = 2\omega f^2. \quad (32)$$

Видно, что  $\rho_Q$  имеет провал в центре конфигурации. Вдали от центра восстанавливается заряженный конденсат<sup>16)</sup>. Заметим, что асимптотики  $\phi$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  имеют разные фазы, как и для темных солитонов НУШ.

Можно поставить вопрос о существовании темных солитонов среди нетопологических конфигураций. Утвердительный ответ на него был получен в [8]. В теории комплексного поля эти конфигурации описывают локализованный провал («Q-дырки») в однородном конденсате. В отличие от темного солитона, топология полей Q-дырки на пространственной бесконечности тривиальна, более того, подобные конфигурации существуют в тех же моделях, где возможны Q-шары. Помимо Q-дырок, могут возникать локальные сгустки («Q-балджи») заряда над конденсатом. Для существования и Q-дырок, и Q-балджей необходимым условием является классическая устойчивость окружающего конденсата.

Оставшаяся часть этого раздела посвящена обсуждению двух упомянутых типов солитонов. В разд. 3.2 обсуждаются условия существования Q-дырок и Q-балджей и их основные свойства. Мы также коснемся вопроса классической устойчивости Q-дырок и Q-балджей. Изложение основано на работе [8]. В разд. 3.3 приводятся явные примеры для  $(1+1)$ -мерной модели с полиномиальным потенциалом.

### 3.2. Q-дырки и Q-балджи

Рассмотрим  $(d+1)$ -мерную теорию комплексного поля с лагранжианом (3) и воспользуемся подстановкой (6) для уравнений скалярного поля. В разд. 2 мы пользовались аналогией между профилем солитона и классическим движением частицы в потенциале (8) для нахождения Q-шаров. Давайте используем эту же аналогию для Q-дырок и Q-балджей.

Пусть у потенциала  $U_\omega$  существует локальный максимум правее начала координат при некоторой  $\omega$ , см. рис. 5a. Тогда можно найти траекторию, стартовую при некотором  $f(0) > 0$  и направленную в сторону максимума, так что при  $r = \infty$ ,  $f(\infty) > f(0)$ . Эта траектория соответствует профилю солитона  $f$ , который монотонно возрастает от центра и достигает постоянного значения на бесконечности. С положением локального максимума  $U_\omega$  ассоциируется однородное конденсатное решение уравнения

<sup>16)</sup> Кинки в комплексной теории поля могут быть отождествлены со сфалеронами в абелевой модели Хиггса, см. главу 11 монографии [100].

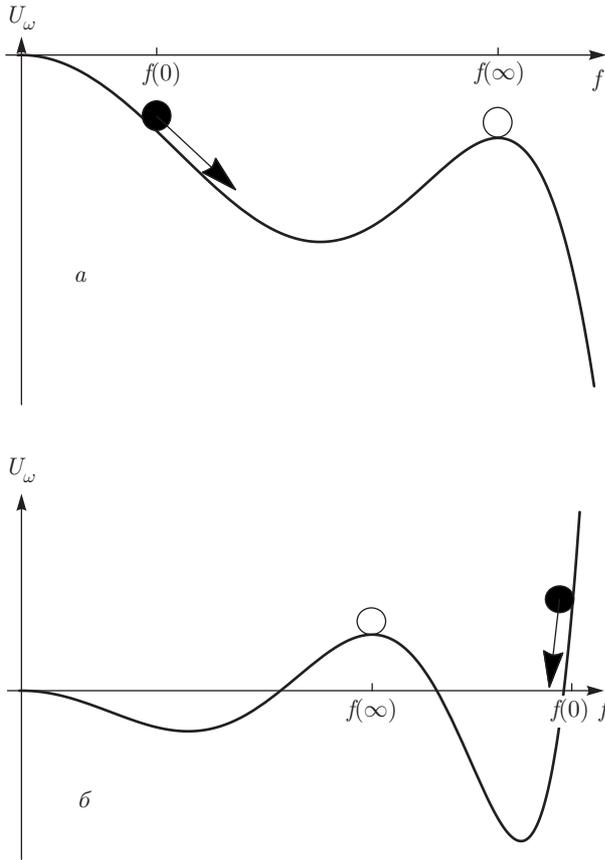


Рис. 5. Схематичная форма потенциала (8), допускающего Q-дырки (а) и Q-балджа (б). Траектория механической частицы показана для случая  $d > 1$

(10). Таким образом, солитон описывает локальный нелинейный провал в скалярном конденсате, поэтому его и называют Q-дыркой.

Пусть теперь потенциал  $U_\omega$  при некоторых  $f$  возрастает выше локального максимума, см. рис. 5б. Тогда существует траектория, стартующая из  $f(0)$  правее локального максимума, достигающая его при  $r = \infty$ ,  $f(\infty) < f(0)$ . Траектория соответствует монотонно убывающему с  $r$  решению, которое стремится к конденсату на бесконечности. Это решение представляет собой локальный нелинейный сгусток в конденсате, который называют Q-балджем.

Ключевое свойство Q-балджей и Q-дырок заключается в том, что на больших расстояниях они не стремятся к классическому вакууму теории. Вместо этого они стремятся к некоторому конденсатному решению, а частота солитона синхронизирована с частотой фонового конденсата.

Заряд  $Q$  и энергия  $E$  для Q-дырки и Q-балджа определены обычными формулами (13). Обе эти величины расходятся в бесконечном пространстве. По-

этому имеет смысл рассматривать значения  $Q$  и  $E$  по отношению к заряду  $Q_c$  и энергии  $E_c$  фонового конденсата:

$$Q_{rel} = Q - Q_c, \quad E_{rel} = E - E_c. \quad (33)$$

Тогда  $Q_{rel}$  и  $E_{rel}$  конечны и удовлетворяют соотношениям (14), (17). Q-дырка (Q-балдж) описывается решением  $\phi(r, t)$ , обеспечивающим локальный экстремум функционала  $E_{rel} = E_{rel}(\omega, f_c)$  при заданном значении  $Q_{rel}$  с фиксированными значениями  $f_c = f_c(\omega)$  и  $\omega$  (амплитуда и частота конденсата). В самом деле, вариационная задача

$$\delta(E_{rel}(\omega, f_c) - \Omega Q_{rel}) = 0 \quad (34)$$

определяет  $\phi = f(r)e^{i\Omega t}$  с  $f$ , удовлетворяющим (7), а требование  $|E_{rel}| < \infty$  приводит к  $\Omega = \omega$ ,  $f \rightarrow f_c$ ,  $r \rightarrow \infty$ <sup>17)</sup>.

Относительный заряд Q-балджа всегда положителен, так же как и энергия, см. (17). Для Q-дырок  $Q_{rel} < 0$ , а энергия  $E_{rel}$  не является положительно определенной. Соответственно, энергия конденсата с дыркой может быть меньше, чем энергия конденсата без дырки. Это случается, когда убыль энергии внутри дырки превышает приращение энергии за счет стенок дырки. Будет ли относительная энергия отрицательной на практике, зависит от конкретной модели. К примеру, в модели с кусочно-параболическим потенциалом, изученной в [8], она отрицательна. В обсуждаемой ниже модели с полиномиальным потенциалом  $E_{rel}$  положительна.

Подчеркнем, что о Q-дырках и Q-балджах имеет смысл говорить, только если конденсат, на фоне которого они существуют, классически устойчив. Значит, даже если наличие дырки энергетически выгодно, она не может появиться в результате развития классической неустойчивости. Можно предположить, что Q-дырка является промежуточным состоянием квантового распада однородного решения.

Для существования Q-дырок дополнительный максимум потенциала  $U_\omega$  должен быть ниже максимума в начале координат, как продемонстрировано на рис. 6б. Напротив, для существования Q-шаров дополнительный максимум должен быть выше основного, как показано на рис. 6в. Но для заданного потенциала  $V$  значение  $U_\omega$  в дополнительном максимуме определяется параметром  $\omega$ . Допустимая область значений частоты Q-шаров есть  $\omega_{min} \equiv \omega_2 < < |\omega| < m$ , где при  $\omega_2$  максимумы вырождены (или

<sup>17)</sup> В конечном объеме  $|E_{rel}| < \infty$  перестает играть определяющую роль и частота Q-дырки (Q-балджа) в общем случае не совпадает с частотой конденсата.

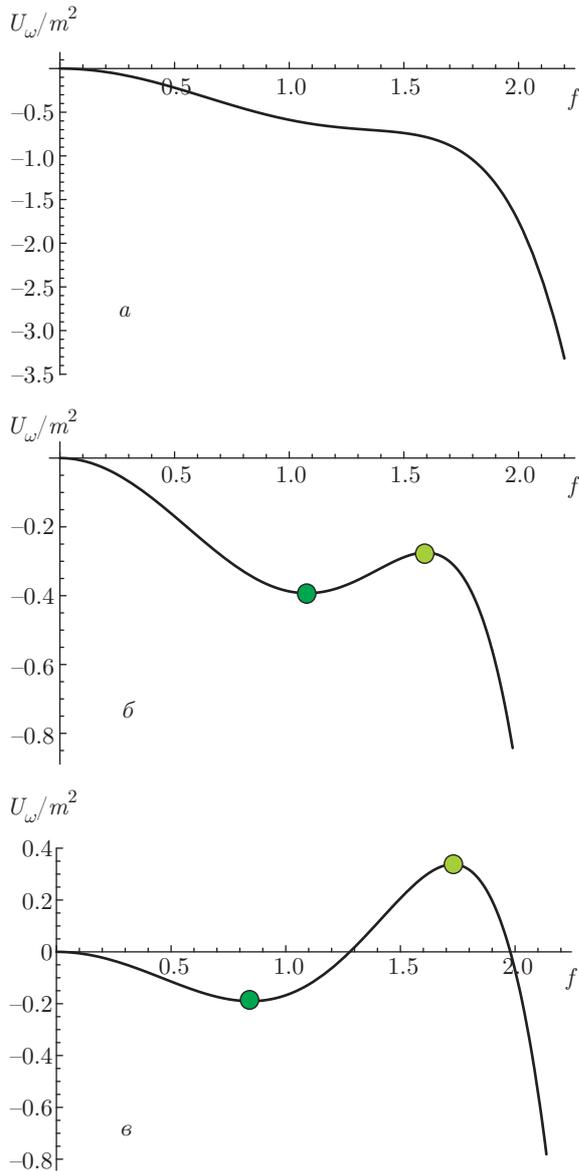


Рис. 6. Потенциал (8), где  $V$  задается формулой (38), при различных  $\omega$  (см. текст). Точки соответствуют конденсатным решениям

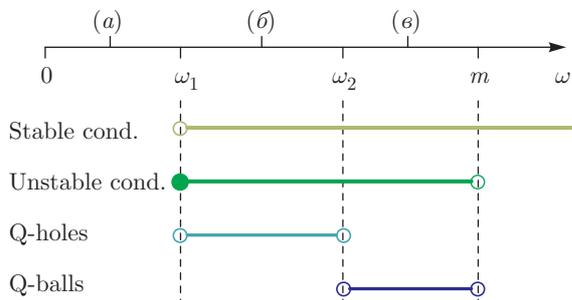


Рис. 7. Спектр классических решений в модели с потенциалом (38). Пометки (а), (б), (в) соответствуют точкам на рис. 6а, б, в соответственно

$\omega_2 = 0$ ), а верхний предел обсуждался в разд. 2. Если  $\omega_2 > 0$ , то в модели присутствуют Q-дырки, а значения  $\omega$ , при которых они существуют, дополняют область существования Q-шаров:  $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$ , где при  $\omega_1$  дополнительный максимум исчезает (или  $\omega_1 = 0$ ). Таким образом, наличие Q-дырок не связано с какими-либо экзотическими свойствами теории; напротив, они совершенно типичны и существуют в тех же моделях, что и Q-шары, но при меньших частотах. Мы проиллюстрируем это ниже на конкретном примере.

Вопрос о классической (не)устойчивости Q-дырок и Q-балджей не является простым. Заметим, что критерий (24) неприменим для решений с невакуумными асимптотиками на бесконечности [55]. В работе [8] приводится аргумент в пользу классической неустойчивости Q-дырок и Q-балджей, который основывается на рассмотрении системы в конечном объеме размера  $L$  с последующим взятием предела  $L \rightarrow \infty$ . Приведем его здесь для случая Q-дырок, для Q-балджей рассуждение аналогично.

Для простоты рассмотрим  $(1 + 1)$ -мерный случай и наложим периодические граничные условия:  $f(-L/2) = f(L/2)$ ,  $f'(-L/2) = f'(L/2)$ . Ничто не запрещает нам применить критерий (24) к конфигурации с конечным объемом [55], так что Q-дырка классически нестабильна в случае

$$\frac{\partial Q_L}{\partial \omega} > 0, \tag{35}$$

где  $Q_L$  — (конечный) заряд конфигурации. Рассмотрим режим, когда  $L$  много больше характерного размера солитона. Тогда существует однородный конденсат с амплитудой  $f_{c,L}$  и зарядом  $Q_{c,L}$  такой, что

$$\begin{aligned} f(\pm L/2) - f_{c,L} &\rightarrow 0, \\ \frac{Q_L - Q_{c,L}}{Q_{c,L}} &\rightarrow 0, \\ \left( \frac{\partial Q_L}{\partial \omega} - \frac{\partial Q_{c,L}}{\partial \omega} \right) \frac{1}{Q_{c,L}} &\rightarrow 0, \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{36}$$

Так как конденсатное решение, будучи фоновым для Q-дырки, классически устойчиво, то на основании критерия (28) естественно ожидать, что при больших  $L$

$$\frac{\partial Q_{c,L}}{\partial \omega} > 0. \tag{37}$$

Это и последнее из соотношений (36) подразумевают, что (35) верно для достаточно больших  $L$ . Таким образом, распадная мода Q-дырки выживает в пределе  $L \rightarrow \infty$ .

### 3.3. Пример

Рассмотрим (1+1)-мерную теорию комплексного поля (3) с полиномиальным потенциалом. Для существования Q-дырок и Q-шаров (ограниченный снизу) потенциал должен быть не ниже шестой степени [7]. С другой стороны, существование Q-балджей требует еще более сложного потенциала, для которого может не существовать Q-шаров. По этой причине мы сфокусируемся на первых двух типах солитонов. Запишем потенциал в следующем виде:

$$V = m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2} \alpha^2 (\phi^* \phi)^2 + \frac{1}{3} \beta (\phi^* \phi)^3, \quad (38)$$

где  $\beta > 0$ . (1+1)-мерные Q-шары в теории с этим потенциалом подробно изучены в работе [46]. Найдем области допустимых значений  $\omega$  для Q-шаров и Q-дырок. Пусть  $\omega_1$  соответствует наименьшему значению частоты, выше которого  $U_\omega$  приобретает два локальных экстремума. Тогда

$$\omega_1^2 = \max \left( 0, m^2 - \frac{\alpha^4}{4\beta} \right). \quad (39)$$

Пусть при  $\omega_2 \equiv \omega_{min}$  второй локальный максимум потенциала  $U_\omega$  пересекает нуль, тогда

$$\omega_2^2 = \max \left( 0, m^2 - \frac{3\alpha^4}{16\beta} \right). \quad (40)$$

Подстроим параметры так, чтобы  $\omega_1 > 0$ . Тогда в области  $0 < |\omega| < \omega_1$  солитонов нет (рис. 6а). В области  $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$  (рис. 6б) существуют Q-дырки, а значениям  $\omega_2 < |\omega| < m$  (рис. 6в) отвечают Q-шары. Помимо Q-дырок и Q-шаров существует два семейства однородных конденсатов. Семейство с меньшей амплитудой скалярного поля соответствует локальному минимуму  $U_\omega$ , для него  $\omega_1 < |\omega| < m$ . Семейство с большей амплитудой соответствует дополнительному максимуму  $U_\omega$ , для него  $|\omega| > \omega_1$ . Используя (26), можно убедиться, что решения первого семейства классически неустойчивы, а решения второго семейства, на фоне которых существуют Q-дырки, классически устойчивы. Рисунок 7 суммирует результаты, а типичный профиль Q-дырки приведен на рис. 8.

Q-шары определяются значениями заряда и энергии по отношению к классическому вакууму, в то время как Q-дырки характеризуются своими зарядом и энергией по отношению к фоновому конденсату. На рис. 9 представлены зависимости  $Q_{rel}$  и  $E_{rel}$  от  $\omega$ . Мы видим, что  $E_{rel}$  неотрицательна, а знак  $Q_{rel}$  противоположен знаку  $\omega$ . В зависимости от параметров потенциала (38) возможны два

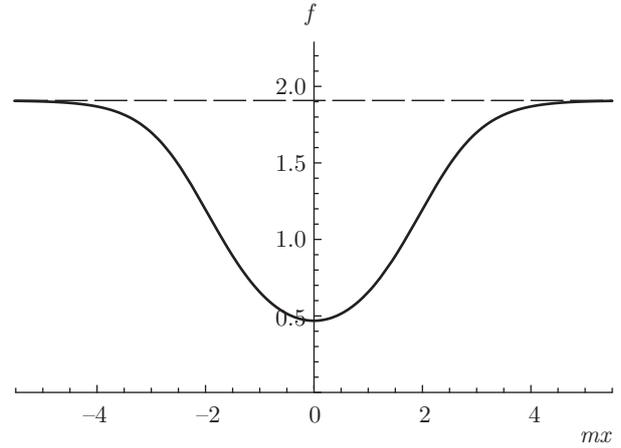


Рис. 8. Q-дырка в потенциале (38). Здесь  $\alpha = m$ ,  $\beta = 0.2m^2$  и  $\omega = 0.1m$ . Штриховая линия соответствует амплитуде фонового конденсата

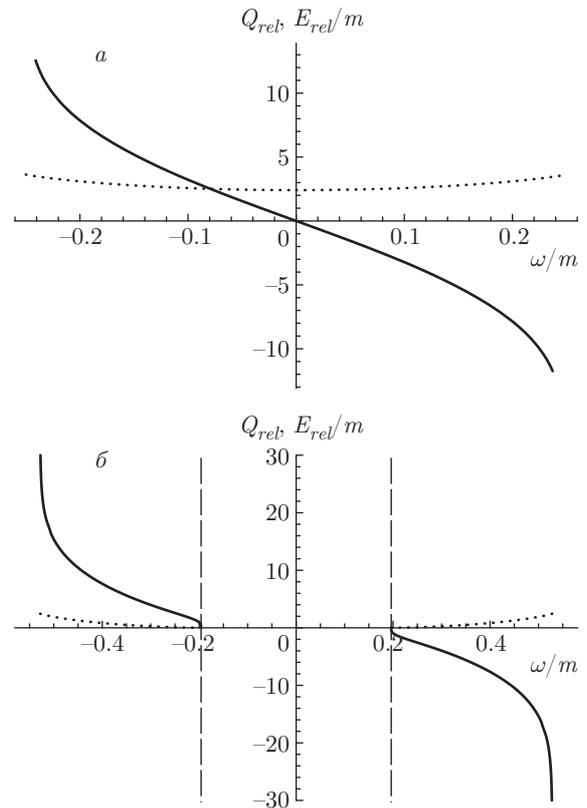


Рис. 9. Относительный заряд (сплошные линии) и энергия (пунктирные линии) Q-дырок в модели с потенциалом (38). а)  $\alpha = m$ ,  $\beta = 0.12m^2$ . Из (39) имеем  $\omega_1 = 0$ . б)  $\alpha = m$ ,  $\beta = 0.26m^2$ . Здесь  $\omega_1 = 0.2m$  и обозначена вертикальными штриховыми линиями

случая. Если  $\omega_1 = 0$ , в теории имеется статическая Q-дырка с нулевым относительным зарядом, но с положительной относительной энергией. Фоновый конденсат в этом случае — не что иное, как дополнительный (ложный) классический вакуум. Можно предположить, что статическая Q-дырка — это промежуточный продукт распада ложного вакуума. Если  $\omega_1 > 0$ , то, выбирая  $|\omega|$  сколь угодно близко к  $\omega_1$ , можно получить Q-дырку, сколь угодно мало отличающуюся от фонового конденсата, так что в пределе  $|\omega| = \omega_1$  солитон полностью исчезает. В противоположном пределе,  $|\omega| \rightarrow \omega_2$ , Q-дырки описываются тонкостенным приближением с почти вакуумным значением поля внутри солитона.

#### 4. Q-ШАРЫ В ТЕОРИЯХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Выше мы ограничивались рассмотрением нетопологических солитонов в моделях с одним комплексным полем  $\phi$  и глобальной U(1)-симметрий. Введение в теорию дополнительных полей может сильно влиять на свойства солитонов. Новые поля могут прямо не участвовать в построении нелинейного решения. Это типично, например, для Q-шаров в суперсимметричных расширениях Стандартной модели, где роль поля  $\phi$  играет комбинация кварков и слептонов [14]. Как обсуждалось в разд. 2.3, взаимодействие поля  $\phi$  с остальными степенями свободы может повлиять на устойчивость солитона, например, путем изменения эффективного потенциала. В этом разделе мы рассмотрим случаи, когда дополнительные поля имеют большие числа заполнения и влияют на существование и стабильность классических решений. Мы обсудим модели с одним комплексным скалярным полем и дополнительными полями спина 0, 1 (калибровочные поля) и 2 (гравитационное поле). Цель состоит в сравнении многокомпонентных солитонов с обычными Q-шарами, описанными в разд. 2.

Интересно отметить, что исторически термин «нетопологические солитоны» относился к решениям в теории одного комплексного и одного действительного массивных скалярных полей, взаимодействующих друг с другом [101]. В общем случае эти решения не попадают под определение Q-шаров, данного Коулменом [7]. Тем не менее, последователи исследования выявили многочисленные общие свойства у многокомпонентных солитонов и Q-шаров. Например, дифференциальное соотношение (14) остается в силе для всех классов решений.

Более того, для некоторых случаев можно проинтегрировать дополнительные поля и свести многокомпонентный солитон к обычному Q-шару.

Настоящий раздел организован следующим образом. Сначала мы рассмотрим три примера с двумя массивными скалярными полями, включая модель Фридберга, Ли и Сирлина [37] (разд. 4.1). Будет показано, как подход с использованием эффективной теории позволяет установить соответствие между двухкомпонентным солитоном и Q-шаром в модели с эффективным потенциалом. В разд. 4.2 обсудим свойства Q-шаров в теориях с локальной U(1)-симметрией. В этом случае роль дополнительных полей играют безмассовые калибровочные поля. Ключевое отличие от случая глобальной U(1)-группы заключается в том, что безмассовые поля приводят к дальнедействующему (кулоновскому) взаимодействию, а это существенно меняет свойства солитонов. В разд. 4.3 будет рассмотрен еще один пример с дальнедействующими силами. А именно, мы разберем основные свойства бозонных звезд — нетопологических солитонов в присутствии динамической гравитации.

##### 4.1. Дополнительные тяжелые поля

В качестве первого примера рассмотрим (1+1)-мерную модель скалярных полей  $\phi$  и  $\chi$  с лагранжевой плотностью [102]

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - m^2 \phi^* \phi - \frac{M^2}{2} \chi^2 + g \chi \phi^* \phi + g' \chi^3. \quad (41)$$

Здесь  $\phi$  заряжено по глобальной U(1)-группе, а  $\chi$  действительно. Если  $g = g'$ , модель имеет явное аналитическое решение для солитонов, в которых  $\phi$  имеет форму (6)<sup>18</sup>. При  $m \ll M$  имеем

$$|\phi| \sim \frac{\tilde{m}M}{g} \operatorname{ch}^{-1}(\tilde{m}x), \quad \chi \sim \frac{\tilde{m}^2}{g} \operatorname{ch}^{-2}(\tilde{m}x), \quad (42)$$

где  $\tilde{m}^2 = m^2 - \omega^2$  и  $0 \leq \omega < m$ . Видно, что

$$\chi \sim \frac{g}{M^2} |\phi|^2 \quad \text{при всех } x. \quad (43)$$

Отсюда можно заключить, что в пределе  $g/M^2 \rightarrow 0$  двухполевое решение (42) сводится к обычному

<sup>18</sup>) Возможность проинтегрировать уравнения связана с тем, что соответствующая механическая задача для точечной частицы сводится к описанию движения в потенциале Хенона – Хейлеса [103].

Q-шару, поправки к которому из-за наличия поля  $\chi$  можно учитывать по теории возмущений в рамках эффективной теории поля.

Разберемся более подробно, как работает эффективная теория поля. Для этого проинтегрируем поле  $\chi$ . Это приводит к низкоэнергетической теории (3) со следующим эффективным потенциалом для поля  $\phi$ :

$$V = m^2 \phi^* \phi + g \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{g}{M^2}\right)^n (\phi^* \phi)^{n+1}, \quad (44)$$

где  $a_n = \mathcal{O}(1)$  для всех  $n$ . Полагая, что

$$\max_x |\phi(x)|^2 \ll \frac{M^2}{g}, \quad (45)$$

можно ограничиться первым нелинейным слагаемым в потенциале, для которого  $a_1 = -1/2$ . В этом случае в низкоэнергетической теории имеются Q-шары, поле которых  $\phi$  ведет себя в соответствии с (42). Мы получили соответствие между двухполевыми солитонами и их однокомпонентными аналогами при наличии иерархии масштабов между тяжелым и легким полями (задаваемой соотношением (45)). При этом важно, чтобы иерархия масштабов соблюдалась на всем протяжении солитона. В модели (41) это обеспечивается тем, что характерный масштаб длины  $\tilde{m}^{-1}$ , на котором меняется решение, одинаков как для  $\phi$ , так и для  $\chi$ .

Дополнительное тяжелое поле можно также зарядить по группе  $U(1)$ . В качестве примера рассмотрим теорию двух массивных комплексных скалярных полей  $\phi$  и  $X$  с потенциалом (см. [104, 105])

$$V_{\phi, X} = m^2 \phi^* \phi + M^2 X^* X + g X \phi^* \phi^* + g^* X^* \phi \phi. \quad (46)$$

Здесь заряд поля  $X$  в два раза больше, чем заряд поля  $\phi$ . Как и прежде, в случае  $g/M^2 \ll 1$  можно проинтегрировать поле  $X$  и свести задачу с двухкомпонентными солитонами к изучению обычных Q-шаров в полиномиальном потенциале (44). Эффективная теория для поля  $\phi$  применима, если выполнено условие (45).

В приведенных выше примерах эффективную теорию поля можно применять, потому что на солитонном решении дополнительное тяжелое поле всюду близко к вакууму. Легко привести пример решения, для которого это не так. Рассмотрим Q-шар в режиме тонкой стенки. Тонкая стенка означает, что по крайней мере два нелинейных члена в потенциале одинаково важны. Но тогда из (44) следует, что все нелинейные члены одинаково важны, и теория возмущений неприменима. Значит, тонкостенные Q-шары

нельзя получить интегрированием тяжелого поля в модели с двумя полями. И наоборот, теория возмущений над классическим вакуумом неприменима для двухкомпонентных солитонов в тонкостенном режиме, так как средние значения обоих полей внутри солитона заметно отличаются от вакуумных.

Для двухкомпонентного солитона в режиме тонкой стенки естественно строить различные теории возмущений для одного из полей над различными значениями второго поля внутри и снаружи солитона. Продемонстрируем это на примере модели Фридберга – Ли – Сирлина в  $(3+1)$ -измерениях [37]<sup>19)</sup>:

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - g \chi^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\chi^2 - v^2)^2, \quad (47)$$

где  $g, \lambda > 0$ . В общем случае солитонное решение в этой модели приходится искать численно (см., например, [107]). Однако, если частота  $\omega$  поля  $\phi$  близка к  $gv$ , для поля  $\chi$  реализуется тонкостенный режим, который можно рассмотреть аналитически. В этом случае снаружи солитона поля можно положить равными вакуумным значениям,  $\chi = v$ ,  $\phi = 0$ . Разложение над вакуумом дает эффективный потенциал для  $\phi$ . Он квадратичен около  $\phi = 0$ , поэтому воспроизводятся экспоненциально убывающие асимптотики  $\phi$  на больших расстояниях. Теория возмущений, построенная для  $\chi = v$ , применима до тех пор пока

$$|\phi(x)| \ll \frac{\lambda v^2}{g}. \quad (48)$$

Внутри солитона  $\chi$  почти равно нулю. Теория возмущений для поля  $\phi$  над этим значением  $\chi$  дает плоский скалярный потенциал. Опять же, поведение  $\phi$  для такого потенциала,  $|\phi| \propto \sin(\omega r)/r$ , согласуется с поведением решения вблизи нуля в модели (47).

Приведенные соображения проясняют причину сходства солитонов в теории (47) и теории (3) с плоским потенциалом. В частности, график на рис. 2в, на котором приведена зависимость энергии однокомпонентного Q-шара от его заряда, похож на аналогичный график в теории (47) [37]. Заметим также, что для всех приведенных примеров критерий классической стабильности Вахитова – Колоколова (24) остается в силе (см., например, [55]).

<sup>19)</sup> Заметим, что, в отличие от теории одного скалярного поля, потенциал для двух полей, допускающий нетопологические солитоны, может быть перенормируемым.

### 4.2. Калибровочные Q-шары

Q-шары в теории комплексного скалярного поля с локальной U(1)-симметрией («калибровочные Q-шары») были впервые предложены в работе [67]<sup>20)</sup> и активно изучались в [108]. Позже их свойства, в том числе классическая устойчивость, были детально изучены в работах [55, 106, 109–111]. Для того чтобы описать результаты этих исследований, рассмотрим теорию в (3 + 1)-измерениях (ср. с (3)):

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu} D_\mu \phi^* D_\nu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi^* \phi). \quad (49)$$

Здесь  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ ,  $A_\mu$  — 4-потенциал,  $e$  обозначает константу связи, а  $V$  — некий скалярный потенциал, выбранный так, чтобы существовали Q-шары в отсутствие калибровочного поля. При подходящем выборе калибровки сферически-симметричная подстановка для калибровочных Q-шаров имеет вид

$$\phi = f(r)e^{i\omega t}, \quad A_0 = A_0(r), \quad A_i = 0. \quad (50)$$

Требование конечности энергии накладывает ограничения на асимптотики при больших расстояниях:  $\phi(r), A_0(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ . Регулярность в начале координат приводит к требованиям  $\phi'(0) = A_0'(0) = 0$ . Энергия и заряд калибровочного Q-шара даются выражениями (ср. с выражениями (13))

$$Q = 2 \int d^3x f^2(\omega + eA_0),$$

$$E = \int d^3x ((\omega + eA_0)^2 f^2 + (\nabla f)^2 + V(f) + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2). \quad (51)$$

Также можно показать, что дифференциальное соотношение (14) остается в силе [110].

Когда константа связи  $e$  и/или заряд  $Q$  малы, обратной реакцией калибровочного поля на скалярное поле можно пренебречь, и свойства калибровочных Q-шаров в этом режиме те же, что и у обычных Q-шаров. Качественно новое поведение наблюдается в случае, когда обратная реакция становится существенной. Это происходит потому, что калибровочное поле приводит к дальнедействующей отталкивающей силе между заряженными скалярными частицами, составляющими солитон. Отталкивающее взаимодействие проявляется, например, в том, что заряд Q-шара становится ограничен сверху. Наличие

<sup>20)</sup> Интересно, что и глобальные [13], и калибровочные [67] Q-шары предложены в следующих одна за другой статьях в одном и том же выпуске журнала.

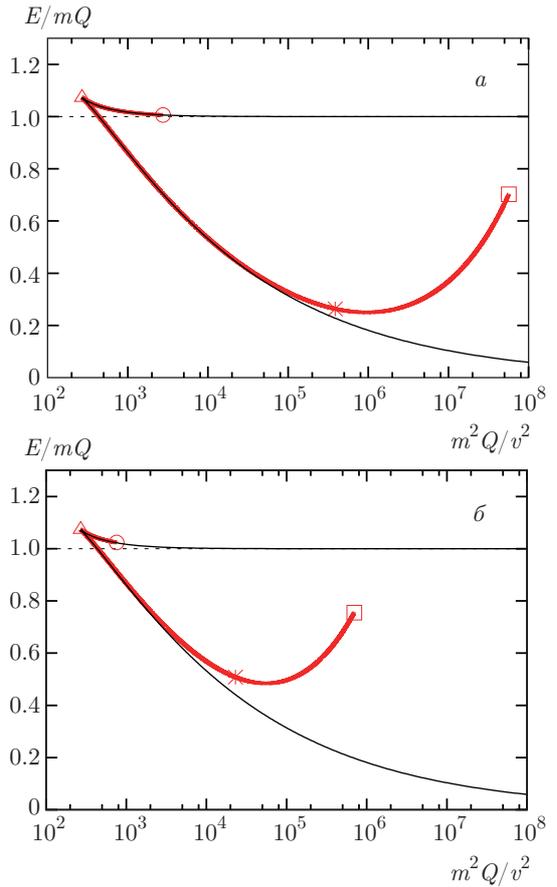
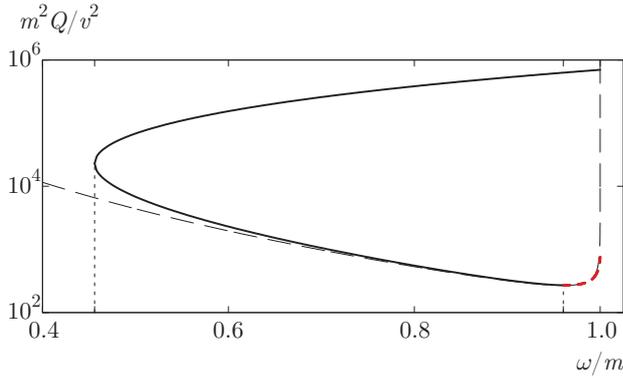


Рис. 10. Параметрическая зависимость энергии  $E$  и заряда  $Q$  калибровочных Q-шаров от частоты  $\omega$  в модели (49) с кусочно-параболическим потенциалом:  $V(\phi^* \phi) = m^2 \phi^* \phi$  при  $|\phi| < v$ ,  $V(\phi^* \phi) = m^2 v^2$  при  $|\phi| > v$ . Тонкая черная линия соответствует случаю глобальной симметрии. Константа связи  $e = 0.005m/v$  (а),  $e = 0.02m/v$  (б). Кружком и квадратом помечены точки, в которых  $\omega = m$ , треугольником помечена точка  $\partial Q/\partial \omega = 0$  (излом), звездочка соответствует точке, в которой  $\partial Q/\partial \omega = \infty$ . Заметим, что ни одно из решений не расходится на верхнем пределе для  $\omega$ . Взято из работы [106]

максимального заряда  $Q_{max}$  означает, что оба конца интервала допустимых значений частоты  $\omega$  достигаются при конечных зарядах и энергиях, как показано на рис. 10. Напомним, что в случае глобальной симметрии  $\omega < m$  (как обычно,  $m$  обозначает массу  $\phi$ -бозона). В калибровочном же случае имеется особое решение с  $\omega = m$  [106]. Q-шар с максимальной частотой также имеет максимальный заряд<sup>21)</sup>. Калибровочные Q-шары с  $\omega > m$  отсутствуют. Заметим еще, что задание частоты может не опреде-

<sup>21)</sup> Хотя этот факт не был строго доказан, его справедливость подтверждена численными расчетами.



**Рис. 11.** Заряд  $Q$  как функция частоты  $\omega$  для калибровочных  $Q$ -шаров в модели (49) с кусочно-параболическим потенциалом, см. подпись к рис. 10. Сплошная линия соответствует калибровочным  $Q$ -шарам, которые устойчивы относительно сферически-симметричных возмущений вида (52). Линия с коротким пунктиром означает решения, неустойчивые относительно этих возмущений, а штриховая линия соответствует  $Q$ -шарам в модели с глобальной симметрией и тем же потенциалом. Видно, что  $\omega$  не определяет калибровочный  $Q$ -шар однозначно. Калибровочная константа выбрана как  $e = 0.02m/v$ . Взято из работы [55]

лять калибровочный  $Q$ -шар однозначным образом, см. рис. 11 в качестве иллюстрации.

Вопрос о классической устойчивости калибровочных  $Q$ -шаров достаточно сложен [55]. Во-первых, неясно, существуют ли асферические распадные моды для решений вида (50). Напомним, что для глобальных  $Q$ -шаров, описываемых анзацем (6), распадная мода, если она есть, единственна и сферически-симметрична. Во-вторых, рассмотрим следующее возмущение классического решения [55]:

$$\begin{aligned} \phi &= f(r)e^{i\omega t} + e^{i\omega t}e^{\gamma t}(u(r) + iv(r)), \\ A_0 &= A_0(r) + e^{\gamma t}a_0(r), \\ A_\varphi &= A_\theta = A_r = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Здесь  $a_0$ ,  $u$  и  $v$  являются действительными функциями. Можно численно показать, что, с одной стороны, для калибровочных  $Q$ -шаров, удовлетворяющих условию  $\partial Q/\partial\omega > 0$ , может не существовать растущих со временем возмущений вида (52). Пример приведен на рис. 11. С другой стороны, такие моды могут возникать для решений, для которых  $\partial Q/\partial\omega < 0$ . Вывод состоит в том, что критерий классической устойчивости (24) неприменим для калибровочных  $Q$ -шаров даже в классе сферически-симметричных возмущений. Что касается статистического аргумента, который приведен в разд. 2.3, то он неприменим из-за наличия дальнодействующей силы.

В конце заметим, что из-за кулоновского отталкивания в калибровочной теории не существует однородного конденсата, аналогичного (9).

### 4.3. Бозонные звезды

Еще один пример дальнодействующей силы — это гравитация. Она ожидаемо приводит к дополнительной стабилизации локализованных сгустков материи. В плоском пространстве и в пренебрежении обратной реакцией скалярного поля на гравитацию энергия  $Q$ -шаров не ограничена сверху (см. рис. 2б), так что в принципе допустимы решения астрономических размеров и масс. При последовательном изучении таких решений уравнения скалярного поля дополняются нерелятивистским уравнением Пуассона, описывающим гравитационный потенциал, либо полной системой уравнений Эйнштейна. Нетопологические солитоны, возникающие в теориях с  $U(1)$ -симметрией и динамической гравитацией, называются бозонными звездами. Подробный обзор на эту тему см., например, в [24, 112].

Вследствие гравитационного притяжения условия существования локализованных решений слабее таковых для  $Q$ -шаров. Так, «мини-бозонные звезды» имеются уже в теории свободного массивного скалярного поля [113]. Естественно, такие решения не выживают в пределе  $M_P \rightarrow \infty$ , где  $M_P$  — планковская масса. С другой стороны, «солитонные бозонные звезды» в теориях с самодействием переходят в обычные  $Q$ -шары в пределе плоского пространства [23]. Похожим образом вращающиеся бозе-звезды сводятся к вращающимся  $Q$ -шарам в случае, если их существование допускается скалярным потенциалом [39, 114].

Важнейшими характеристиками бозонных звезд являются критическая масса  $M_c$  и компактность  $M/R$ , где  $R$  — характерный размер конфигурации. Критическая масса устанавливает энергетический порог, выше которого не существует стационарного решения без горизонта. Конфигурации с массой выше массы  $M_c$ , если они вообще существуют, содержат черную дыру<sup>22)</sup>, либо это нестационарные решения, коллапсирующие в черную дыру или распадающиеся, например, в множество более легких

<sup>22)</sup> Заметим, что при выполнении слабого условия энергодоминантности и при условии минимального взаимодействия с гравитацией в скалярных теориях поля с каноническим кинетическим членом не существует стационарных сферически-симметричных конфигураций с горизонтом [115]. Подобные решения (черные дыры со скалярными «волосами») были получены в классе аксиально-симметричных вращающихся конфигураций, см. обзор в [116].

солитонов. Для рассмотрения бозонных звезд в качестве альтернативы черным дырам [117] полезно сравнить их критическую массу с пределом Чандрасекара. В случае свободного скалярного поля с массой  $m$  можно получить  $M_c \sim M_P^2/m \ll M_P^3/m^2$  (см., например, [113]). Включение самодействия для скалярного поля модифицирует оценку для  $M_c$ . Например, замена  $m^2|\phi|^2$  на  $m^2|\phi|^2(1-|\phi|^2/\phi_0^2)^2$  приводит к  $M_c \sim M_P^4/m^3$  [118]. Итак, критическая масса бозонных звезд может меняться от величин, характерных для звезд, до значений, характерных для галактических гало [119].

Помимо массы, верхний предел можно также получить и для компактности бозонных звезд. В рамках общей теории относительности модельно-независимый верхний предел для компактности сферически-симметричного тела, состоящего из идеальной жидкости, был получен Бухдалом [120]. При этом предполагались некоторые условия на распределение жидкости и ее уравнение состояния [120]. Этот предел,  $M/R \leq (4/9)M_P^2$ , строго меньше компактности шварцшильдовой черной дыры,  $M_{BH}/R_{BH} = 0.5M_P^2$ . В принципе, это ограничение можно обойти, отказываясь от некоторых условий, использованных при его выводе. Компактность неврашающихся бозонных звезд обычно заметно меньше предела Бухдала. Предел может достигаться при некоторых частотах и определенном скалярном потенциале (см., например, [117, 121]). Для вращающихся бозонных звезд имеется тенденция увеличения компактности с ростом скорости вращения [122, 123].

Феноменологический интерес к бозонным звездам вызван двумя обстоятельствами. С одной стороны, они служат относительно простыми моделями наблюдаемых астрономических объектов типа нейтронных звезд. Заменяя объект со сложной внутренней динамикой бозонной звездой, структура которой достаточно проста, можно в некоторых случаях существенно упростить исследование. Примером является динамика вращения в системах двойных нейтронных звезд<sup>23</sup>). С другой стороны, бозонные звезды являются альтернативной гипотезой при анализе астрофизических проявлений нейтронных звезд и черных дыр. Так, в недавних работах обсуждалась возможность различить сверхмассивную черную дыру в центре Млечного Пути и бозонную звезду

[20, 21] (см. также [22]). Кроме того, можно сравнивать гравитационно-волновые сигналы от слияния черных дыр и бозонных звезд [127]. Также в моделях со сверхлегкой темной материей бозонные звезды могут играть роль галактических гало, решая таким образом проблему плотности темной материи в центрах галактик [128].

В свете многочисленных применений бозонных звезд в астрофизике и космологии важно понимать механизм их образования (см. обзор [129]). В работе [130] было показано, что гравитационное взаимодействие приводит к появлению компактной солитонной конфигурации из начальных неоднородностей в распределении материи. Позже был изучен механизм «гравитационного остывания» в системе Шредингера – Пуассона, который позволяет описать формирование бозонной звезды [131]. В работе [132] изучалось образование бозонного ядра компактной звезды путем аккреции из окружающего конденсата. Недавно было продемонстрировано [133], что гравитационная неустойчивость в однородном распределении материи или миникластере приводит к формированию компактных объектов. Также формирование солитонов из маленьких пространственных неоднородностей и их последующая кластеризация в нерелятивистской теории с самодействием были изучены в [134].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим перспективные направления исследований, которые, как нам кажется, интересны как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения феноменологических применений.

В данном обзоре в основном изучались четыре типа нетопологических солитонов, возникающих в релятивистских теориях с глобальной  $U(1)$ -симметрией. Это однородный заряженный конденсат,  $Q$ -шары,  $Q$ -дырки и  $Q$ -балджи. Примечательно, что первые три типа решений могут существовать в рамках одной теории, а первые два типа могут быть одновременно классически устойчивыми. Естественно задаться вопросом о динамических процессах, включающих классические и квантовые переходы между всеми этими решениями. Это важно для понимания сложной динамики скалярных полей, например, после окончания инфляции. На сегодняшний день вопрос далек от полного разрешения. В частности, роль  $Q$ -дырок (или  $Q$ -балджей) в подобных процессах остается неясной. Изучение классической устойчивости  $Q$ -дырок и  $Q$ -балджей может пролить свет на эту проблему.

<sup>23</sup>) В этом случае имеет значение отклик распределения масс внутри компактного объекта на приливные силы (см., например, [124, 125]). Детали внутренней структуры объекта не важны для решения задачи о его внешнем движении [126].

Изучение классической устойчивости дает много информации о свойствах солитона как изолированного, так и находящегося во взаимодействии с другими солитонами и частицами. Как обсуждалось в разд. 2.3, критерий линейной классической устойчивости (24) не имеет простого обобщения на все типы нетопологических солитонов. В частности, он неприменим для однородных конфигураций, Q-дырок, калибровочных Q-шаров и бозонных звезд. Так что любой прогресс в изучении классической устойчивости имеет значение.

Сделаем замечание относительно гидродинамического описания Q-шаров, обсуждаемого в разд. 2.2. Как было указано, недиагональные компоненты тензора энергии-импульса для Q-шара (даже абсолютно устойчивого) не равны нулю, что указывает на наличие сил вязкости. С точки зрения теории поля значение этих сил не вполне ясно. Однако на уровне кинетических уравнений учет вязкости становится обязательным, так как играет критическую роль, например, при образовании солитонов.

Изучение квантовых свойств солитонов (за рамками  $(1+1)$ -мерных моделей) представляет некоторые трудности, так как поле солитона, подлежащее квантованию, не является ни однородным, ни статическим. Необходимым промежуточным шагом на этом пути является изучение спектра линейных классических возмущений над (классически устойчивым) солитоном. В этой части существует определенный прогресс (см., например, [62]). С другой стороны, некоторые квантовые эффекты можно описать в ведущем порядке в квазиклассическом приближении. Среди них процесс туннелирования, который строго изучен для Q-шаров относительно недавно [57].

Еще раз подчеркнем, что Q-шары хорошо подходят для моделирования на их примере различных явлений, проистекающих в более сложных системах, таких как черные дыры, нейтронные и бозонные звезды. Отметим, например, тот нетривиальный факт, что квантовый переход между классически устойчивым однородным конденсатом и классически устойчивым Q-шаром осуществляется через не сферически-симметричное туннельное решение [57]. Интересно также, что на примере Q-шаров можно изучать спонтанное нарушение пространственных симметрий в системах с внутренней глобальной симметрией (см., например, [50]).

В заключение упомянем, что в ранних работах по солитонам в релятивистских полевых теориях предпринимались попытки отождествить их с фундаментальными объектами, такими как элементар-

ные частицы, связанные состояния адронов и пр. При этом взаимодействия между частицами предполагалось свести к классическому взаимодействию солитонов. Как мы теперь знаем, эти попытки не увенчались успехом. Однако в астрофизике, космологии, теории конденсированного состояния — везде, где речь идет о классических фоновых решениях — роль солитонов трудно переоценить. А значит, их изучение и, в частности, изучение Q-шаров, будет продолжаться.

**Благодарности.** Авторы благодарны Д. Левкову, А. Панину, М. Смолякову, И. Тимирясову, С. Троицкому, А. Флорио, М. Шапошникову и Я. Шниру за полезные обсуждения и критические замечания.

**Финансирование.** Работа Э. Н. (разд. 1, 2, 3.1) была поддержана Российским научным фондом (грант РНФ 16-12-10-494). Работа А. Ш. (разд. 3.2, 3.3, 4, 5) была поддержана Швейцарским национальным научным фондом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965), doi:10.1103/PhysRevLett.15.240.
2. J. K. Perring and T. H. R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **31**, 550 (1962), doi:10.1016/0029-5582(62)90774-5.
3. A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin, *IEEE Proc.* **61**, 1443 (1973), doi:10.1109/PROC.1973.9296.
4. V. G. Makhankov, *Phys. Rep.* **35**, 1 (1978), doi:10.1016/0370-1573(78)90074-1.
5. S. R. Coleman, *Subnucl. Ser.* **13**, 297 (1977).
6. G. E. Brown, *World Scientific Series in 20th Century Physics*, 3, World Sci., Singapore (1994), p. 438.
7. S. R. Coleman, *Nucl. Phys. B* **262**, 263 (1985); Erratum: *Nucl. Phys. B* **269**, 744 (1986). doi:10.1016/0550-3213(85)90286-X, 10.1016/0550-3213(86)90520-1.
8. E. Nugaev, A. Shkerin, and M. Smolyakov, *JHEP* **1612**, 032 (2016), doi:10.1007/JHEP12(2016)032 [arXiv:1609.05568 [hep-th]].
9. N. H. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev. D* **12**, 1606 (1975), doi:10.1103/PhysRevD.12.1606.
10. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, Netherlands: North-Holland, Amsterdam (1982).

11. T. D. Lee and Y. Pang, Phys. Rep. **221**, 251 (1992), doi:10.1016/0370-1573(92)90064-7.
12. Y. M. Shnir, *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2018).
13. G. Rosen, J. Math. Phys. **9**, 996 (1968).
14. A. Kusenko, Phys. Lett. B **405**, 108 (1997), doi:10.1016/S0370-2693(97)00584-4 [hep-ph/9704273].
15. G. R. Dvali, A. Kusenko, and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **417**, 99 (1998), doi:10.1016/S0370-2693(97)01378-6 [hep-ph/9707423].
16. A. Kusenko, M. E. Shaposhnikov, and P. G. Tinyakov, Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 229 (1998), [JETP Lett. **67**, 247 (1998)], doi:10.1134/1.567658 [hep-th/9801041].
17. I. Affleck and M. Dine, Nucl. Phys. B **249**, 361 (1985), doi:10.1016/0550-3213(85)90021-5.
18. J. A. Frieman, G. B. Gelmini, M. Gleiser, and E. W. Kolb, Phys. Rev. Lett. **60**, 2101 (1988), doi:10.1103/PhysRevLett.60.2101.
19. A. Kusenko and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **418**, 46 (1998), doi:10.1016/S0370-2693(97)01375-0 [hep-ph/9709492].
20. F. H. Vincent, Z. Meliani, P. Grandclement, E. Gourgoulhon, and O. Straub, Class. Quant. Grav. **33**, 105015 (2016), doi:10.1088/0264-9381/33/10/105015 [arXiv:1510.04170 [gr-qc]].
21. S. Troitsky, JCAP **1611**, 027 (2016), doi:10.1088/1475-7516/2016/11/027 [arXiv:1510.07132 [hep-ph]].
22. K. Akiyama et al. [Event Horizon Telescope Collaboration], Astrophys. J. **875**, L1 (2019), doi:10.3847/2041-8213/ab0ec7.
23. B. W. Lynn, Nucl. Phys. B **321**, 465 (1989), doi:10.1016/0550-3213(89)90352-0.
24. S. L. Liebling and C. Palenzuela, Living Rev. Rel. **15**, 6 (2012); Living Rev. Rel. **20**, 5 (2017); doi:10.12942/lrr-2012-6, 10.1007/s41114-017-0007-y [arXiv:1202.5809 [gr-qc]].
25. I. L. Bogolyubsky and V. G. Makhankov, JETP Lett. **24**, 12 (1976).
26. M. Gleiser, Phys. Rev. D **49**, 2978 (1994), doi:10.1103/PhysRevD.49.2978 [hep-ph/9308279].
27. M. A. Amin, R. Easther, H. Finkel, R. Flauger, and M. P. Hertzberg, Phys. Rev. Lett. **108**, 241302 (2012), doi:10.1103/PhysRevLett.108.241302 [arXiv:1106.3335 [astro-ph.CO]].
28. K. D. Lozanov and M. A. Amin, Phys. Rev. D **90**, 083528 (2014), doi:10.1103/PhysRevD.90.083528 [arXiv:1408.1811 [hep-ph]].
29. E. Cotner, A. Kusenko, and V. Takhistov, Phys. Rev. D **98**, 083513 (2018), doi:10.1103/PhysRevD.98.083513 [arXiv:1801.03321 [astro-ph.CO]].
30. K. D. Lozanov and M. A. Amin, Phys. Rev. D **99**, 123504 (2019), doi:10.1103/PhysRevD.99.123504 [arXiv:1902.06736 [astro-ph.CO]].
31. K. Mukaida, M. Takimoto, and M. Yamada, JHEP **1703**, 122 (2017), doi:10.1007/JHEP03(2017)122 [arXiv:1612.07750 [hep-ph]].
32. M. H. Namjoo, A. H. Guth, and D. I. Kaiser, Phys. Rev. D **98**, 016011 (2018), doi:10.1103/PhysRevD.98.016011 [arXiv:1712.00445 [hep-ph]].
33. D. Musso, arXiv:1810.01799 [hep-th].
34. M. A. Amin, M. P. Hertzberg, D. I. Kaiser, and J. Karouby, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530003 (2014), doi:10.1142/S0218271815300037 [arXiv:1410.3808 [hep-ph]].
35. S. Kasuya and M. Kawasaki, Phys. Rev. D **62**, 023512 (2000), doi:10.1103/PhysRevD.62.023512 [hep-ph/0002285].
36. V. A. Rubakov and D. S. Gorbunov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory*, World Sci. (2018), doi:10.1142/10447.
37. R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Phys. Rev. D **13**, 2739 (1976), doi:10.1103/PhysRevD.13.2739.
38. M. S. Volkov and E. Wahnert, Phys. Rev. D **66**, 085003 (2002), doi:10.1103/PhysRevD.66.085003 [hep-th/0205157].
39. B. Kleihaus, J. Kunz, and M. List, Phys. Rev. D **72**, 064002 (2005), doi:10.1103/PhysRevD.72.064002 [gr-qc/0505143].
40. N. Sakai, H. Ishihara, and K.-i. Nakao, Phys. Rev. D **84**, 105022 (2011), doi:10.1103/PhysRevD.84.105022 [arXiv:1011.4828 [hep-th]].
41. T. Tamaki and N. Sakai, Phys. Rev. D **86**, 105011 (2012), doi:10.1103/PhysRevD.86.105011 [arXiv:1208.4440 [gr-qc]].
42. E. Nugaev and A. Shkerin, Phys. Rev. D **90**, 016002 (2014), doi:10.1103/PhysRevD.90.016002 [arXiv:1404.3207 [hep-th]].
43. G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964), doi:10.1063/1.1704233.

44. R. S. Palais, *Comm. Math. Phys.* **69**, 19 (1979), doi:10.1007/BF01941322.
45. M. Mai and P. Schweitzer, *Phys. Rev. D* **86**, 096002 (2012), doi:10.1103/PhysRevD.86.096002 [arXiv:1206.2930 [hep-ph]].
46. T. I. Belova, N. A. Voronov, N. B. Konyukhova, and B. S. Pariisky, *Phys. Atom. Nucl.* **57**, 2028 (1994), [*Yad. Fiz.* **57**, 2105 (1994)].
47. S. Theodorakis, *Phys. Rev. D* **61**, 047701 (2000), doi:10.1103/PhysRevD.61.047701.
48. I. E. Gulamov, E. Y. Nugaev, and M. N. Smolyakov, *Phys. Rev. D* **87**, 085043 (2013), doi:10.1103/PhysRevD.87.085043 [arXiv:1303.1173 [hep-th]].
49. M. Laine and M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **532**, 376 (1998), doi:10.1016/S0550-3213(98)00474-X [hep-ph/9804237].
50. A. Nicolis and F. Piazza, *JHEP* **1206**, 025 (2012), doi:10.1007/JHEP06(2012)025 [arXiv:1112.5174 [hep-th]].
51. D. L. T. Anderson and G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **11**, 1336 (1970), doi:10.1063/1.1665265.
52. F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **659**, 703 (2008), doi:10.1016/j.physletb.2007.11.072 [arXiv:0710.3755 [hep-th]].
53. F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *JHEP* **0907**, 089 (2009), doi:10.1088/1126-6708/2009/07/089 [arXiv:0904.1537 [hep-ph]].
54. M. Mai and P. Schweitzer, *Phys. Rev. D* **86**, 076001 (2012), doi:10.1103/PhysRevD.86.076001 [arXiv:1206.2632 [hep-ph]].
55. A. G. Panin and M. N. Smolyakov, *Phys. Rev. D* **95**, 065006 (2017), doi:10.1103/PhysRevD.95.065006 [arXiv:1612.00737 [hep-th]].
56. K. M. Lee and E. J. Weinberg, *Nucl. Phys. B* **267**, 181 (1986), doi:10.1016/0550-3213(86)90150-1.
57. D. Levkov, E. Nugaev, and A. Popescu, *JHEP* **1712**, 131 (2017), doi:10.1007/JHEP12(2017)131 [arXiv:1711.05279 [hep-ph]].
58. A. G. Cohen, S. R. Coleman, H. Georgi, and A. Manohar, *Nucl. Phys. B* **272**, 301 (1986), doi:10.1016/0550-3213(86)90004-0.
59. M. Kawasaki and M. Yamada, *Phys. Rev. D* **87**, 023517 (2013), doi:10.1103/PhysRevD.87.023517 [arXiv:1209.5781 [hep-ph]].
60. A. V. Kovtun and E. Y. Nugaev, *Mod. Phys. Lett. A* **32**, 1750198 (2017), doi:10.1142/S021773231750198X [arXiv:1612.00700 [hep-ph]].
61. M. N. Smolyakov, *Phys. Rev. D* **97**, 045011 (2018), doi:10.1103/PhysRevD.97.045011 [arXiv:1711.05730 [hep-th]].
62. A. Kovtun, E. Nugaev, and A. Shkerin, *Phys. Rev. D* **98**, 096016 (2018), doi:10.1103/PhysRevD.98.096016 [arXiv:1805.03518 [hep-th]].
63. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *УФН* **182**, 569 (2012) [V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, *UFN* **55**, 535 (2012)].
64. N. Vakhitov and A. Kolokolov, *Radiophys. Quant. Electron.* **16**, 787 (1973).
65. A. Kolokolov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **14**, 426 (1973).
66. M. G. Alford, *Nucl. Phys. B* **298**, 323 (1988), doi:10.1016/0550-3213(88)90269-6.
67. G. Rosen, *J. Math. Phys.* **9**, 999 (1968).
68. E. Nugaev and A. Shkerin, *Phys. Lett. B* **747**, 287 (2015), doi:10.1016/j.physletb.2015.06.008 [arXiv:1501.05903 [hep-ph]].
69. E. W. Kolb and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3051 (1993), doi:10.1103/PhysRevLett.71.3051 [hep-ph/9303313].
70. A. Kusenko, *Phys. Lett. B* **406**, 26 (1997), doi:10.1016/S0370-2693(97)00700-4 [hep-ph/9705361].
71. S. Khlebnikov and I. Tkachev, *Phys. Rev. D* **61**, 083517 (2000), doi:10.1103/PhysRevD.61.083517 [hep-ph/9902272].
72. M. A. Amin, arXiv:1006.3075 [astro-ph.CO].
73. E. Krylov, A. Levin, and V. Rubakov, *Phys. Rev. D* **87**, 083528 (2013), doi:10.1103/PhysRevD.87.083528 [arXiv:1301.0354 [hep-ph]].
74. V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **26**, 994 (1968).
75. Y. S. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Elsevier Science (2003).
76. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Dissipative Solitons*, Lect. Notes Phys., Springer, Berlin, Heidelberg (2005).
77. A. Kumar, *Phys. Rep.* **187**, 63 (1990).
78. A. Hasegawa and F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973).
79. A. Hasegawa and F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171 (1973).
80. L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1095 (1980), doi:10.1103/PhysRevLett.45.1095.

81. A. Hasegawa, *Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlin. Sci.* **10**, 475 (2000).
82. S. Blair and K. Wagner, in *Collision-Based Computing*, Springer, London (2002), pp. 355–380.
83. F. Mitschke, A. Hause, C. Mahnke, and P. Rohrmann, *Nonlin. Phenomena Complex Syst.* **15**, 369 (2012).
84. Y. S. Kivshar, *IEEE J. Quant. Electron.* **29**, 250 (1993).
85. V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *JETP* **37**, 823 (1973).
86. M. Weiner, J. Heritage, R. Hawkins, N. Thurston, M. Kirschner, D. Leaird, and J. Tomlinson, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2445 (1988).
87. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose–Einstein Condensation*, Oxford Univ. Press, Oxford (2003).
88. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2008).
89. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999), doi:10.1103/RevModPhys.71.463 [cond-mat/9806038].
90. L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **63**, 023611 (2001), doi:10.1103/PhysRevA.63.023611 [gr-qc/0005131].
91. O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon, and J. Steinhauer, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 240401 (2010), doi:10.1103/PhysRevLett.105.240401 [arXiv:0906.1337 [cond-mat.quant-gas]].
92. A. Suarez, V. H. Robles, and T. Matos, *Astrophys. Space Sci. Proc.* **38**, 107 (2014), doi:10.1007/978-3-319-02063-1\_9 [arXiv:1302.0903 [astro-ph.CO]].
93. M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999), doi:10.1103/PhysRevLett.83.2498.
94. S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999), doi:10.1103/PhysRevLett.83.5198 [cond-mat/9910487].
95. K. Enqvist and M. Laine, *JCAP* **0308**, 003 (2003), doi:10.1088/1475-7516/2003/08/003 [cond-mat/0304355].
96. Y. M. Bunkov and G. E. Volovik, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 265302 (2007), doi:10.1103/PhysRevLett.98.265302 [cond-mat/0703183 [cond-mat.soft]].
97. R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 4130 (1974), doi:10.1103/PhysRevD.10.4130.
98. A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974), [Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 430 (1974)].
99. J. Goldstone and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **11**, 1486 (1975), doi:10.1103/PhysRevD.11.1486.
100. N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, doi:10.1017/CBO9780511617034.
101. T. D. Lee, *Comments Nucl. Part. Phys.* **7**(6), 165 (1978).
102. E. Nugaev, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **20**, 443 (2015), doi:10.1016/j.cnsns.2014.06.016 [arXiv:1403.0434 [hep-th]].
103. M. Henon and C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).
104. D. B. Kaplan, *Nucl. Phys. B* **494**, 471 (1997), doi:10.1016/S0550-3213(97)00178-8 [nucl-th/9610052].
105. P. F. Bedaque, H. W. Hammer, and U. van Kolck, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 463 (1999), doi:10.1103/PhysRevLett.82.463 [nucl-th/9809025].
106. I. E. Gulamov, E. Y. Nugaev, A. G. Panin, and M. N. Smolyakov, *Phys. Rev. D* **92**, 045011 (2015), doi:10.1103/PhysRevD.92.045011 [arXiv:1506.05786 [hep-th]].
107. V. Loiko, I. Perapechka, and Y. Shnir, *Phys. Rev. D* **98**, 045018 (2018), doi:10.1103/PhysRevD.98.045018 [arXiv:1805.11929 [hep-th]].
108. K. M. Lee, J. A. Stein-Schabes, R. Watkins, and L. M. Widrow, *Phys. Rev. D* **39**, 1665 (1989), doi:10.1103/PhysRevD.39.1665.
109. H. Arodz and J. Lis, *Phys. Rev. D* **79**, 045002 (2009), doi:10.1103/PhysRevD.79.045002 [arXiv:0812.3284 [hep-th]].
110. I. E. Gulamov, E. Y. Nugaev, and M. N. Smolyakov, *Phys. Rev. D* **89**, 085006 (2014), doi:10.1103/PhysRevD.89.085006 [arXiv:1311.0325 [hep-th]].
111. T. Tamaki and N. Sakai, *Phys. Rev. D* **90**, 085022 (2014), doi:10.1103/PhysRevD.90.085022.
112. P. Jetzer, *Phys. Rep.* **220**, 163 (1992), doi:10.1016/0370-1573(92)90123-H.
113. R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang, *Phys. Rev. D* **35**, 3640 (1987), doi:10.1103/PhysRevD.35.3640.
114. B. Kleihaus, J. Kunz, M. List, and I. Schaffer, *Phys. Rev. D* **77**, 064025 (2008), doi:10.1103/PhysRevD.77.064025 [arXiv:0712.3742 [gr-qc]].
115. I. Pena and D. Sudarsky, *Class. Quant. Grav.* **14**, 3131 (1997), doi:10.1088/0264-9381/14/11/013.

116. C. A. R. Herdeiro and E. Radu, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, 1542014 (2015), doi:10.1142/S0218271815420146 [arXiv:1504.08209 [gr-qc]].
117. V. Cardoso and P. Pani, *Living Rev. Rel.* **22**, 4 (2019), doi:10.1007/s41114-019-0020-4 [arXiv:1904.05363 [gr-qc]].
118. T. D. Lee, *Phys. Rev. D* **35**, 3637 (1987), doi:10.1103/PhysRevD.35.3637.
119. J.-w. Lee and I.-g. Koh, *Phys. Rev. D* **53**, 2236 (1996), doi:10.1103/PhysRevD.53.2236 [hep-ph/9507385].
120. H. A. Buchdahl, *Phys. Rev.* **116**, 1027 (1959), doi:10.1103/PhysRev.116.1027.
121. B. Kleihaus, J. Kunz, and S. Schneider, *Phys. Rev. D* **85**, 024045 (2012), doi:10.1103/PhysRevD.85.024045 [arXiv:1109.5858 [gr-qc]].
122. M. Kesden, J. Gair, and M. Kamionkowski, *Phys. Rev. D* **71**, 044015 (2005), doi:10.1103/PhysRevD.71.044015 [astro-ph/0411478].
123. P. Grandclément, *Phys. Rev. D* **95**, 084011 (2017), doi:10.1103/PhysRevD.95.084011 [arXiv:1612.07507 [gr-qc]].
124. P. Pani, L. Gualtieri, A. Maselli, and V. Ferrari, *Phys. Rev. D* **92**, 024010 (2015), doi:10.1103/PhysRevD.92.024010 [arXiv:1503.07365 [gr-qc]].
125. V. Cardoso, E. Franzin, A. Maselli, P. Pani, and G. Raposo, *Phys. Rev. D* **95**, 8, 084014 (2017); Addendum: *Phys. Rev. D* **95**, 089901 (2017); doi:10.1103/PhysRevD.95.089901, 10.1103/PhysRevD.95.084014 [arXiv:1701.01116 [gr-qc]].
126. T. Damour, in *Three Hundred Years of Gravitation*, ed. by S. Hawking and W. Israel (1987), pp. 128–198.
127. V. Cardoso, S. Hopper, C. F. B. Macedo, C. Palenzuela, and P. Pani, *Phys. Rev. D* **94**, 084031 (2016), doi:10.1103/PhysRevD.94.084031 [arXiv:1608.08637 [gr-qc]].
128. L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, *Phys. Rev. D* **95**, 043541 (2017), doi:10.1103/PhysRevD.95.043541 [arXiv:1610.08297 [astro-ph.CO]].
129. A. R. Liddle and M. S. Madsen, *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 101 (1992), doi:10.1142/S0218271892000057.
130. E. Seidel and W. M. Suen, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2516 (1994), doi:10.1103/PhysRevLett.72.2516 [gr-qc/9309015].
131. F. S. Guzman and L. A. Urena-Lopez, *Astrophys. J.* **645**, 814 (2006), doi:10.1086/504508 [astro-ph/0603613].
132. R. Brito, V. Cardoso, C. F. B. Macedo, H. Okawa, and C. Palenzuela, *Phys. Rev. D* **93**, 044045 (2016), doi:10.1103/PhysRevD.93.044045 [arXiv:1512.00466 [astro-ph.SR]].
133. D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 151301 (2018), doi:10.1103/PhysRevLett.121.151301 [arXiv:1804.05857 [astro-ph.CO]].
134. M. A. Amin and P. Mocz, *Phys. Rev. D* **100**, 063507 (2019), doi:10.1103/PhysRevD.100.063507 [arXiv:1902.07261 [astro-ph.CO]].