

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МИКРОРЕЗОНАТОРЕ

*О. Ф. Васильева**, *А. П. Зинган*, *В. В. Васильев*

*Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
3300, Тирасполь, Молдова*

Поступила в редакцию 11 июня 2019 г.,
после переработки 11 июня 2019 г.
Принята к публикации 20 июня 2019 г.

Изучена динамика поляритонов в микрорезонаторе в режиме параметрического осциллятора, когда два поляритона накачки превращаются в поляритоны сигнальной и холостой мод и обратно. При этом накачка осуществляется двумя лазерными импульсами с близкими частотами. Найдены аналитические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Получены периодический и аperiodический режимы превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод, а также режим покоя системы.

DOI: 10.31857/S0044451020010174

1. ВВЕДЕНИЕ

Смешанные экситон-фотонные состояния в плоских полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных квазичастиц с уникальными свойствами [1–13]. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора. В условиях сильной связи экситонная и фотонная моды расталкиваются и возникают верхняя и нижняя микрорезонаторные поляритонные моды. Непараболичность нижней поляритонной ветви допускает возникновение параметрического процесса, в результате которого два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды с сохранением энергии и импульса. Поэтому огромный интерес вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильно нелинейные свойства [6–13]. Такие нелинейности были обнаружены в спектрах люминесценции микрорезонаторов [14–18] при резонансном возбуждении нижней поляритонной ветви, которые объяснялись че-

тырехволновым смещением или параметрическим рассеянием фотовозбужденных поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды. Экспериментально идентифицированы два механизма нелинейности: поляритонное параметрическое рассеяние [6, 19, 20] и голубой сдвиг поляритонной дисперсии [2, 5]. С помощью рунр-probe-метода в работах [8, 9] впервые наблюдалось параметрическое усиление в микрорезонаторе при возбуждении нижней поляритонной ветви пикосекундным импульсом накачки под углом падения 16.5° . После возбуждения (с небольшой задержкой) нижней поляритонной ветви дополнительно слабым пробным импульсом, падавшим нормально, обнаружилось, что этот импульс в отражении усиливался более чем в 70 раз. При этом появлялась также холостая мода под углом 35° . Именно для этих углов выполнялись резонансные условия. Результаты экспериментов [8, 9] были воспроизведены также в [21] и моделировались в [7] с использованием механизма поляритон-поляритонного рассеяния. Аналогичные процессы наблюдались в [22] при использовании двух пучков накачки под углами $\pm 45^\circ$ и пробного пучка под углом 0° . Режим параметрического осциллятора наблюдался в [9, 14] при непрерывном возбуждении нижней поляритонной ветви излучением накачки под «магическим» углом 16° без пробного импульса. Выше пороговой интенсивности наблюдались сильные пучки сигнальной и хо-

* E-mail: florina_of@mail.ru

лостой мод под углами 0° и 35° соответственно. В работе [20] обнаружена сильная и необычная зависимость поляризации света, излучаемого микрорезонатором, от поляризации накачки. Эта зависимость интерпретируется с использованием псевдоспиновой модели в рамках квазиклассического формализма, где параметрическое рассеяние описывается как резонансное четырехволновое смешение. В работах [23–25] наблюдалось бистабильное пропускание излучения в зависимости от интенсивности накачки при возбуждении экситон-поляритонов в микрорезонаторе. Отметим, что процесс параметрического рассеяния наблюдался как при импульсном [20, 26], так и при непрерывном [14, 16, 27] возбуждении.

Описание поляритонных параметрических осцилляторов и усилителей представлено в ряде работ [2, 5, 7, 8, 12, 13, 28]. Экситон-экситонные взаимодействия играют ключевую роль в сильных нелинейностях, присутствующих в поляритонных системах микрорезонатора. Первой попыткой контроля этих взаимодействий было использование концепции диполяритонов [29] путем включения двойных асимметричных квантовых ям в электрически смещенный микрорезонатор. Как прямые, так и непрямые экситоны соединяются с одной и той же модой резонатора, образуя новый тип поляритона с аналогичными свойствами по отношению к экситон-поляритонной системе. В работе [30] теоретически исследовалась динамика диполяритонов при учете трех каналов рассеяния. Получены аperiодические и периодические режимы эволюции диполяритонов накачки в диполяритоны сигнальной и холостой мод. В работе [31] путем объединения широких квантовых ям в простом волноводе наблюдалось образование диполярных поляритонов. Основным ограничением исследуемых поляритонных систем по сравнению с их атомными аналогами для изучения сильно коррелированных явлений и физики многих тел является их относительно слабое двухчастичное взаимодействие по сравнению с хаосом. В [32] показаны новые возможности усиления таких локальных взаимодействий и нелинейностей путем настройки экситон-поляритонного дипольного момента в электрически смещенных полупроводниковых микрорезонаторах, включающих широкие квантовые ямы.

Микрорезонаторные экситон-поляритоны обладают бистабильностью при низких оптических мощностях благодаря их сильным нелинейностям [24]. Поляризационная зависимость нелинейностей вызывает поляризационную мультистабильность [33, 34], которая может быть использована для

создания спиновых запоминающих устройств [35], логических вентилях [36, 37] или переключателей [38].

В работах [39–41] при исследовании свойств оптического параметрического осциллятора использовались два одинаковых фотона накачки на нижней ветви поляритонного закона дисперсии. Однако в [42, 43] было показано, что два различных пучка накачки можно конвертировать в два вырожденных на частоте фотонов сигнальной и холостой мод. Наличие двух различных пучков накачки дает большие возможности для генерации сигнального и холостого пучков с заданными свойствами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель данной работы — изучить изменение во времени плотности поляритонов при накачке нижней ветви в двух близких по энергии точках закона дисперсии. Мы будем считать, что оба пучка накачки различаются по амплитуде (интенсивности), однако энергии фотонов различаются слабо. Рассматриваем ситуацию на временах порядка либо меньших времени релаксации возбуждений среды (экситон-поляритонов). В этом случае процессы релаксации не успевают срабатывать, а эволюция системы представляет собой предел оптической нутации экситон-поляритонов под действием ультракоротких импульсов лазерного излучения, ответственных за создание начального условия системы. Мы рассматриваем поведение системы поляритонов в нестационарном режиме, когда накачка осуществляется фемто- и пикосекундными импульсами лазерного излучения. В этом случае можно считать, что ультракороткие импульсы возбуждения служат лишь для создания начальных плотностей поляритонов, т. е. начальных условий системы. Затем система предоставляется самой себе и она эволюционирует во времени. Такая постановка задачи используется и при исследовании явления оптической нутации в пространственно-однородной системе двухуровневых атомов [44] либо экситонов [45]. Мы считаем, что с помощью ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в микрорезонаторе создается система когерентных экситон-поляритонов. Микрорезонатор обеспечивает пространственное ограничение области существования поляритонов, которые взаимно превращаются друг в друга. Квантовая яма, в которой возникают поляритоны, вставляется в брэгговскую структуру, которая характеризуется определенным пропус-

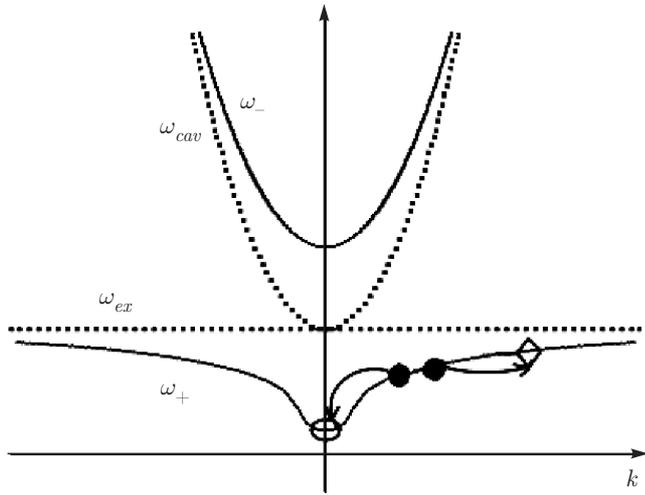


Рис. 1. Энергии поляритонов верхней и нижней ветвей (ω_{\pm}). Дисперсия собственных частот микрорезонатора ω_{cav} и экситона ω_{ex} . Два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды

канием, отражением и потерями [8,9,12,15,27]. Особенности эволюции системы будут проявляться в генерации вторичных субимпульсов либо периодического излучения на частотах экситон-поляритонов.

Ниже мы рассматриваем ситуацию, когда поляритоны возбуждаются на нижней ветви закона дисперсии под «магическим» углом (рис. 1). В работах [4, 5] показано, что процесс параметрического рассеяния двух поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды описывается гамильтонианом вида

$$\frac{1}{\hbar} H = \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_1} + \omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} + \omega_s \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \mu \left(\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_i \right), \quad (1)$$

где ω_{p_1} , ω_{p_2} , ω_s и ω_i — собственные частоты поляритонов накачки первого и второго импульса, сигнальной и холостой мод соответственно; \hat{a}_{p_1} , \hat{a}_{p_2} , \hat{a}_s , \hat{a}_i — операторы уничтожения поляритонов; μ — константа параметрической поляритон-поляритонной конверсии. Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов \hat{a}_{p_1} , \hat{a}_{p_2} , \hat{a}_s , \hat{a}_i . Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля (mean field approximation), применимость которого обоснована в [46], для комплексных амплитуд поляритонов $a_{p_1} = \langle \hat{a}_{p_1} \rangle$, $a_{p_2} = \langle \hat{a}_{p_2} \rangle$, $a_s = \langle \hat{a}_s \rangle$ и $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$ можно получить следующую систему нелинейных эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{p_1} &= \omega_{p_1} a_{p_1} + \mu a_{p_2}^* a_s a_i, \\ i\dot{a}_{p_2} &= \omega_{p_2} a_{p_2} + \mu a_{p_1}^* a_s a_i, \\ i\dot{a}_s &= \omega_s a_s + \mu a_{p_1} a_{p_2} a_i^*, \quad i\dot{a}_i = \omega_i a_i + \mu a_{p_1} a_{p_2} a_s^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (2) дополним начальными условиями, которые запишем в виде

$$\begin{aligned} a_{p_1}|_{t=0} &= a_{p_1 0} \exp(i\varphi_{p_1 0}), \\ a_{p_2}|_{t=0} &= a_{p_2 0} \exp(i\varphi_{p_2 0}), \\ a_s|_{t=0} &= a_{s 0} \exp(i\varphi_{s 0}), \quad a_i|_{t=0} = a_{i 0} \exp(i\varphi_{i 0}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_{p_1 0}$, $a_{p_2 0}$, $a_{s 0}$, $a_{i 0}$ и $\varphi_{p_1 0}$, $\varphi_{p_2 0}$, $\varphi_{s 0}$, $\varphi_{i 0}$ — действительные амплитуды и фазы поляритонов в начальный момент времени.

Введем далее в рассмотрение плотности поляритонов

$$\begin{aligned} n_{p_1} &= a_{p_1}^* a_{p_1}, \quad n_{p_2} = a_{p_2}^* a_{p_2}, \\ n_s &= a_s^* a_s, \quad n_i = a_i^* a_i \end{aligned}$$

и две компоненты «поляризации»

$$\begin{aligned} Q &= i \left(a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* - a_s a_i a_{p_1}^* a_{p_2}^* \right), \\ R &= a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* + a_s a_i a_{p_1}^* a_{p_2}^*. \end{aligned}$$

Используя (2), для введенных функций получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{n}_{p_1} &= \mu Q, \quad \dot{n}_{p_2} = \mu Q, \\ \dot{n}_s &= -\mu Q, \quad \dot{n}_i = -\mu Q, \\ \dot{Q} &= \Delta R + 2\mu (n_s n_i (n_{p_2} + n_{p_1}) - n_{p_1} n_{p_2} (n_i + n_s)), \quad \dot{R} = -\Delta Q, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta = \omega_{p_1} + \omega_{p_2} - \omega_s - \omega_i$ — расстройка резонанса. Используя (3), начальные условия для этих функций можно записать в виде

$$\begin{aligned} n_{p_1}|_{t=0} &\equiv n_{p_1 0} = |a_{p_1 0}|^2, \\ n_{p_2}|_{t=0} &\equiv n_{p_2 0} = |a_{p_2 0}|^2, \\ n_s|_{t=0} &\equiv n_{s 0} = |a_{s 0}|^2, \quad n_i|_{t=0} \equiv n_{i 0} = |a_{i 0}|^2, \\ Q|_{t=0} &\equiv Q_0 = 2\sqrt{n_{p_1 0} n_{p_2 0} n_{s 0} n_{i 0}} \sin \theta_0, \\ R|_{t=0} &\equiv R_0 = 2\sqrt{n_{p_1 0} n_{p_2 0} n_{s 0} n_{i 0}} \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\theta_0 = \varphi_{s 0} + \varphi_{i 0} - \varphi_{p_1 0} - \varphi_{p_2 0}$ — начальная разность фаз.

Из (4) нетрудно получить следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} n_{p_1} - n_{p_2} &= n_{p_1 0} - n_{p_2 0}, \quad n_s - n_i = n_{s 0} - n_{i 0}, \\ n_{p_1} + n_s &= n_{p_1 0} + n_{s 0}, \quad n_{p_2} + n_i = n_{p_2 0} + n_{i 0}, \\ Q^2 + R^2 &= 4n_{p_1} n_{p_2} n_i n_s, \\ R &= R_0 + \frac{\Delta}{\mu} (n_{p_1 0} - n_{p_1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Дальнейшее рассмотрение удобнее провести для нормированных величин

$$y = \frac{n_{p1}}{n_{p10}}, \quad \bar{n}_{p20} = \frac{n_{p20}}{n_{p10}}, \quad \bar{n}_{s0} = \frac{n_{s0}}{n_{p10}}, \quad \bar{n}_{i0} = \frac{n_{i0}}{n_{p10}},$$

$$\alpha = \frac{\Delta}{2\mu n_{p10}}, \quad \tau = t\mu n_{p10}.$$

Тогда систему уравнений (4) можно привести к одному нелинейному дифференциальному уравнению для нормированной плотности поляритонов накачки первого импульса y :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + W(y) = 0, \tag{7}$$

где

$$W(y) = - \left[2y(y - 1 + \bar{n}_{p20})(1 + \bar{n}_{s0} - y) \times \right. \\ \left. \times (1 + \bar{n}_{i0} - y) - \left(\sqrt{\bar{n}_{p20}\bar{n}_{s0}\bar{n}_{i0}} \cos \theta_0 + \alpha(1 - y) \right)^2 \right]. \tag{8}$$

Уравнение (7) описывает колебания нелинейного осциллятора, где $W(y)$ играет роль потенциальной энергии осциллятора, а $(1/2)(dy/d\tau)^2$ — кинетической. Качественно поведение функции $y(\tau)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной

энергии W от y при различных значениях параметров. Вид решения $y(\tau)$ уравнения (7) определяется корнями алгебраического уравнения $W(y) = 0$, которые зависят от параметров \bar{n}_{p20} , \bar{n}_{s0} , \bar{n}_{i0} , α и θ_0 .

2.1. Эволюция при начальной разности фаз $\theta_0 = \pi/2$

Рассмотрим сначала случай, когда начальная разность фаз равна $\pi/2$. Уравнение $W(y) = 0$ имеет четыре действительных корня, которые мы располагаем в порядке убывания их значений и обозначим соответственно $y_1 > y_M > y_m > y_4$. Здесь корни y_M и y_m имеют смысл максимальной и минимальной плотности поляритонов накачки первого импульса, которые они принимают в процессе эволюции. Далее для определенности будем считать $\bar{n}_{s0} > \bar{n}_{i0}$. На рис. 2а показана эволюция корней в зависимости от параметра α . Видно, что с ростом этого параметра корни y_1 и y_m растут, а y_M и y_4 убывают. Тогда решение уравнения (8) можно представить в виде

$$y = \frac{y_M - \frac{y_1(y_M - y_m)}{y_1 - y_m} \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)} \tau \pm f(\varphi_0, k) \right)}{1 - \frac{y_M - y_m}{y_1 - y_m} \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)} \tau \pm f(\varphi_0, k) \right)}, \tag{9}$$

где $\operatorname{sn}(x)$ — эллиптическая функция Якоби, $f(\varphi_0, k) = F(\varphi_0, k) - K(k)$, $F(\varphi_0, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k и параметром φ_0 , $K(k)$ — полный эллиптический интеграл [47, 48]. Величины k и φ_0 выражаются как

$$k^2 = \frac{(y_1 - y_4)(y_M - y_m)}{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(y_M - y_4)(1 - y_m)}{(y_M - y_m)(1 - y_4)}}. \tag{10}$$

Из (9) легко получить амплитуду A и период T колебаний плотности поляритонов накачки первого импульса:

$$A = y_M - y_m, \quad T = \frac{2K(k)}{\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)}}. \tag{11}$$

Периодическая эволюция плотности поляритонов накачки представлена на рис. 3а. Плотность поляритонов периодически изменяется в пределах от y_m до y_M . Следовательно, отсутствует полное превращение поляритонов накачки в поляритоны сиг-

нальной и холостой мод, т. е. процесс колебаний происходит без истощения плотности поляритонов накачки. С ростом α при фиксированных \bar{n}_{p20} , \bar{n}_{s0} и \bar{n}_{i0} амплитуда и период колебаний монотонно убывают (рис. 3б, в), а при фиксированных α , \bar{n}_{s0} и \bar{n}_{i0} они изменяются при изменении \bar{n}_{p20} (рис. 3б, в). Из рис. 3б видно, что чем больше плотность поляритонов накачки второго импульса \bar{n}_{p20} , тем больше амплитуда колебаний поляритонов накачки первого импульса.

Если нормированная расстройка резонанса α равна нулю [49], то в зависимости от соотношения между начальными плотностями поляритонов накачки, сигнальной и холостой мод могут возникнуть как периодический, так и аperiodический режимы эволюции (рис. 3е).

2.2. Эволюция при начальной разности фаз $\theta_0 = 0$

Рассмотрим теперь эволюцию системы при начальной разности фаз $\theta_0 = 0$. Уравнение $W(y) = 0$

по-прежнему имеет четыре действительных корня, $y_1 > y_M > y_m > y_4$. Если в начальный момент времени $n_{s0} \neq n_{i0}$ и $n_{p10} \neq n_{p20}$, то эволюция системы представляет собой периодическое превращение пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод и обратно. Качественное поведение корней совпадает с представленным рис. 2а. Решение уравнения (7) в этом случае соответствует формуле (9).

Однако, если в начальный момент времени плотности поляритонов сигнальной и холостой мод равны ($n_{s0} = n_{i0}$) и плотности поляритонов накачки первого и второго импульса равны ($n_{p10} = n_{p20}$), то будет наблюдаться как периодический, так и апериодический режим эволюции (рис. 4). Уравнение $W(y) = 0$ имеет четыре действительных корня y_1, y_2, y_3 и y_4 , которые принимают следующие значения:

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha + \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha)^2 + 4\sqrt{2}(\bar{n}_{s0} + \alpha)}}{2\sqrt{2}},$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) + \alpha + \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha)^2 - 4\sqrt{2}(\bar{n}_{s0} + \alpha)}}{2\sqrt{2}},$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) + \alpha - \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha)^2 - 4\sqrt{2}(\bar{n}_{s0} + \alpha)}}{2\sqrt{2}},$$

$$y_4 = \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha - \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha)^2 + 4\sqrt{2}(\bar{n}_{s0} + \alpha)}}{2\sqrt{2}}.$$

Исследование величин корней показывает, что при $\alpha = 1$ корни y_1 и y_2 оказываются одинаковыми (рис. 2б). Вырождение именно этих корней приводит к возникновению апериодической эволюции системы. Апериодическая эволюция системы сводится к превращению поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод и на этом заканчивается. Решение уравнения (7) можно записать в виде

$$y = \frac{y_3(y_2 - y_4) - y_4(y_2 - y_3) \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)} \tau \pm \operatorname{arth} \sqrt{\frac{(1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(1 - y_4)(y_2 - y_3)}} \right)}{y_2 - y_4 - (y_2 - y_3) \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)} \tau \pm \operatorname{arth} \sqrt{\frac{(1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(1 - y_4)(y_2 - y_3)}} \right)}.$$
 (12)

При $0 < \alpha < 1$ все четыре корня различны и располагаются в следующем порядке: $y_1 > y_2 > y_3 > y_4$. Эволюция системы описывается выражением

$$y = \frac{y_3(y_2 - y_4) - y_4(y_2 - y_3) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)} \tau \pm f(\varphi_0, k) \right)}{y_2 - y_4 - (y_2 - y_3) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)} \tau \pm f(\varphi_0, k) \right)},$$
 (13)

следовательно, плотность поляритонов накачки первого импульса изменяется периодически в пределах от y_3 до y_2 .

Величины k и φ_0 определяются следующими соотношениями:

$$k^2 = \frac{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(y_2 - y_4)(1 - y_3)}{(y_2 - y_3)(1 - y_4)}}.$$
 (14)

Из (13) легко получить амплитуду A и период T колебаний плотности поляритонов накачки первого импульса:

$$A = y_2 - y_3, \quad T = \frac{2K(k)}{\sqrt{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}}.$$
 (15)

При $\alpha > 1$ и $y_2 > y_1 > y_3 > y_4$ эволюция системы описывается выражением

$$y = \frac{y_3(y_1 - y_4) - y_4(y_1 - y_3) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_1 - y_3)(y_1 - y_4)} \tau \pm f(\varphi_0, k) \right)}{y_1 - y_4 - (y_1 - y_3) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_1 - y_3)(y_1 - y_4)} \tau \pm f(\varphi_0, k) \right)} \quad (16)$$

и плотность поляритонов накачки первого импульса изменяется периодически в пределах от y_3 до y_1 .

В выражении (16)

$$k^2 = \frac{(y_2 - y_4)(y_1 - y_3)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(y_1 - y_4)(1 - y_3)}{(y_1 - y_3)(1 - y_4)}}.$$

Амплитуда и период колебаний в этом случае будут соответственно равны

$$A = y_1 - y_3, \quad T = \frac{2K(k)}{\sqrt{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}}. \quad (17)$$

Из рис. 4в видно, что период T колебаний плотности поляритонов накачки первого импульса сначала растет с ростом α , расходится при значении $\alpha = 1$ (что соответствует аперiodическому режиму), при котором оба наибольших корня оказываются одинаковыми, а затем монотонно убывает. При фиксированных значениях α , \bar{n}_{p_20} и увеличении начальной плотности поляритонов сигнальной моды \bar{n}_{s0} амплитуда и период колебаний увеличиваются.

В условиях точного резонанса ($\alpha = 0$), когда начальная плотность одного из поляритонов накачки, например второго импульса, меньше либо равна начальной плотности поляритонов холостой моды $n_{p_20} \leq n_{i0}$, при определенном соотношении между начальными параметрами системы решение уравнения (7) имеет вид $y(\tau) = 1$, т. е. совпадает с начальным условием, что обусловлено пересечением двух средних корней уравнения $W(y) = 0$ (рис. 5). Это означает, что при отличных от нуля плотностях всех поляритонов в системе невозможна нетривиальная эволюция, так как начальные плотности поляритонов не изменяются во времени. То есть в системе наблюдается режим покоя. В отсутствие вырождения двух средних корней уравнения $W(y) = 0$ возникают два случая эволюции. В зависимости от соотношения между параметрами n_{p_20} , n_{i0} , n_{s0} в первом случае корни упорядочиваются так, что $y_1 > 1 > y_m > y_4$, а во втором — $y_1 > y_m > 1 > y_4$ (рис. 5а). В первом случае плотность поляритонов накачки первого импульса изменяется в пределах $y_m \leq y \leq 1$, тогда как во втором — в пределах

$1 \leq y \leq y_m$. Следовательно, в зависимости от параметров возможны колебания плотности поляритонов накачки в первом случае под фоном с амплитудой $A = 1 - y_m$, а во втором — над фоном с амплитудой $A = y_m - 1$, где плотность фона равна начальной плотности поляритонов накачки $y_0 = 1$.

Решение уравнения (7) в случае, когда $y_1 > 1 > y_m > y_4$, имеет вид

$$y = \frac{1 - \frac{y_1(1 - y_m)}{y_1 - y_m} \operatorname{sn}^2 \sqrt{(y_1 - y_m)(1 - y_4)} \tau}{1 - \frac{1 - y_m}{y_1 - y_m} \operatorname{sn}^2 \sqrt{(y_1 - y_m)(1 - y_4)} \tau}, \quad (18)$$

где

$$k^2 = \frac{(y_1 - y_4)(1 - y_m)}{(y_1 - y_m)(1 - y_4)}. \quad (19)$$

Во втором случае, когда $y_1 > y_m > 1 > y_4$, соответственно получаем

$$y = \frac{1 - \frac{y_4(y_m - 1)}{y_m - y_4} \operatorname{sn}^2 \sqrt{(y_1 - 1)(y_m - y_4)} \tau}{1 - \frac{y_m - 1}{y_m - y_4} \operatorname{sn}^2 \sqrt{(y_1 - 1)(y_m - y_4)} \tau}, \quad (20)$$

где

$$k^2 = \frac{(y_1 - y_4)(y_m - 1)}{(y_1 - 1)(y_m - y_4)}. \quad (21)$$

Из (18) и (20) следует, что плотность поляритонов накачки эволюционирует периодически (рис. 5б). При этом, как уже отмечалось, колебания плотности происходят как под фоном, так и над фоном. Амплитуда колебаний, которая определяется как разность двух средних корней уравнения $W(y) = 0$, при фиксированных n_{i0} и n_{p_20} сначала убывает с ростом начальной плотности поляритонов сигнальной моды n_{s0} , затем обращается в нуль, а потом монотонно растет (рис. 5в).

2.3. Эволюция при начальной разности фаз

$$\theta_0 = \pi$$

Если начальная разность фаз $\theta_0 = \pi$, то корни уравнения $W(y) = 0$ по-прежнему располагаются в порядке $y_1 > y_m > y_m > y_4$, а y_m и y_m по-прежнему играют роль максимальной и минимальной плотности поляритонов накачки. Если в начальный момент

времени $n_{s0} \neq n_{i0}$ и $n_{p10} \neq n_{p20}$, то эволюция системы представляет собой периодическое превращение пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод. Качественное поведение корней совпадает с представленным на рис. 2а. Периодическая эволюция системы будет описываться формулой (9).

Однако при $n_{s0} = n_{i0}$ и $n_{p10} = n_{p20}$ с ростом параметра α возникает пересечение двух наименьших корней уравнения $W(y) = 0$ (рис. 2б). Вырождение этих корней приводит к возникновению аперриодической эволюции системы. Следовательно, при $\theta_0 = \pi$ возможны как периодический, так и аперриоди-

ческий режимы эволюции. Вырождение корней возникает в точке $\alpha = \bar{n}_{s0}$. В случае, когда все четыре корня различны и располагаются в порядке $y_1 > y_2 > y_3 > y_4$ и $0 < \alpha < \bar{n}_{s0}$, эволюция системы также описывается формулой (13) и, следовательно, плотность поляритонов накачки изменяется периодически в пределах от y_3 до y_2 (рис. 6а). Если $\alpha > \bar{n}_{s0}$, то $y_1 > y_2 > y_4 > y_3$ и эволюция системы описывается соотношением (16), плотность поляритонов накачки изменяется периодически в пределах от y_4 до y_2 . Корни уравнения $W(y) = 0$ в этом случае будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) + \alpha + \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) + \alpha)^2 + 4\sqrt{2}(\bar{n}_{s0} - \alpha)}}{2\sqrt{2}}, \\ y_2 &= \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha + \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha)^2 + 4\sqrt{2}(\alpha - \bar{n}_{s0})}}{2\sqrt{2}}, \\ y_3 &= \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha - \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) - \alpha)^2 + 4\sqrt{2}(\alpha - \bar{n}_{s0})}}{2\sqrt{2}}, \\ y_4 &= \frac{\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) + \alpha - \sqrt{(\sqrt{2}(1 + \bar{n}_{s0}) + \alpha)^2 + 4\sqrt{2}(\bar{n}_{s0} - \alpha)}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{22}$$

При совпадении двух наименьших корней решение уравнения (7) имеет вид

$$y = y_3 + \frac{y_2 - y_3}{1 + \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} \operatorname{sh}^2 \left(\sqrt{(y_3 - y_2)(y_1 - y_3)} \tau \pm \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(y_2 - 1)(y_1 - y_3)}{(1 - y_3)(y_1 - y_2)}} \right)}. \tag{23}$$

Из рис. 6а видно, что с ростом α периодический режим эволюции переходит в аперриодический, затем снова в периодический.

Что касается амплитуды A и периода T колебаний плотности поляритонов накачки, то из рис. 6б,в видно, что с ростом параметра α амплитуда колебаний сначала растет, достигая своего максимального значения, а затем монотонно убывает, тогда как период колебаний сначала также растет с ростом α , затем расходится при значении α , при котором оба наименьших корня, y_4 и y_3 , оказываются одинаковыми, а затем монотонно убывает.

2.4. Эволюция при произвольном значении начальной разности фаз θ_0

Таким образом, видно, что в случаях $\theta_0 = 0, \pi/2, \pi$ динамика системы различна. Поэтому ниже рассмотрим случай произвольной начальной разности

фаз θ_0 и выясним возможность фазового управления процессом без изменения начальных плотностей поляритонов. Корни уравнения $W(y) = 0$ и в этом случае расположим в порядке их убывания $y_1 > y_M > y_m > y_4$. Они существенно зависят от параметров $\bar{n}_{p20}, \bar{n}_{s0}, \bar{n}_{i0}, \alpha, \theta_0$. В общем случае, при произвольных $\bar{n}_{p20}, \bar{n}_{s0}, \bar{n}_{i0}, \alpha, \theta_0$ решение уравнения (7) выражается по-прежнему формулой (9), а амплитуда и период колебаний — формулами (11).

Рассмотрим случай $n_{s0} = n_{i0}$ и $n_{p10} = n_{p20}$. На рис. 8 показана временная эволюция плотности поляритонов накачки в зависимости от начальной разности фаз θ_0 для трех значений параметра α . Видно, что существуют как периодические, так и аперриодические режимы эволюции системы экситон-поляритонов в микрорезонаторе. При $\alpha = 0.1$ имеют место два пересечения двух наименьших корней (рис. 7а), в соответствии с чем возникают два перехода от периодического режима к аперриодическому при раз-

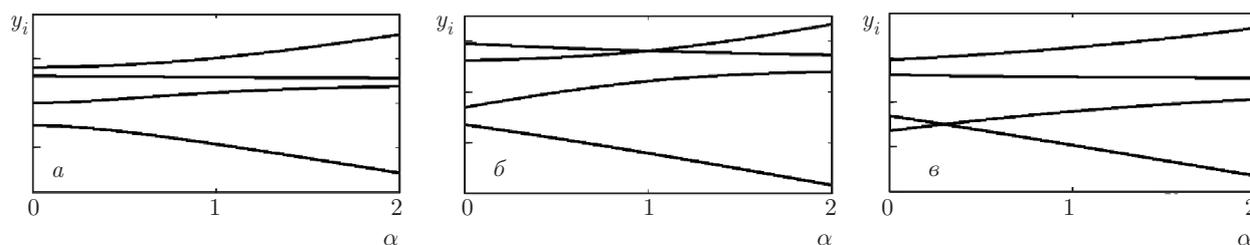


Рис. 2. Зависимости корней уравнения $W(y) = 0$ от нормированной расстройки резонанса α при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса и поляритонов холостой моды и начальной разности фаз: а) $\bar{n}_{p20} = 0.5, \bar{n}_{s0} = 0.3, \bar{n}_{i0} = 0.1, \theta_0 = \pi/2$; б) $\bar{n}_{p20} = 1, \bar{n}_{s0} = 0.3, \bar{n}_{i0} = 0.3, \theta_0 = 0$; в) $\bar{n}_{p20} = 1, \bar{n}_{s0} = 0.3, \bar{n}_{i0} = 0.3, \theta_0 = \pi$

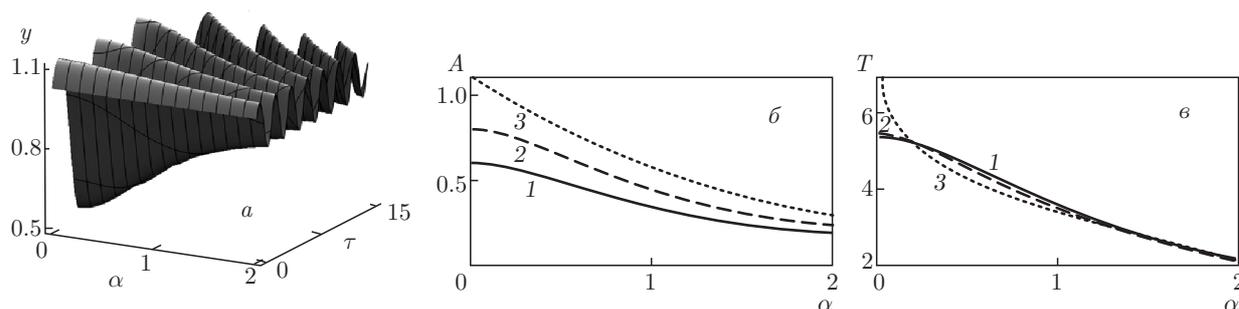


Рис. 3. а) Временная эволюция плотности поляритонов накачки первого импульса y в зависимости от нормированной расстройки резонанса α при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса $\bar{n}_{p20} = 0.5$, поляритонов сигнальной моды $\bar{n}_{s0} = 0.3$ и поляритонов холостой моды $\bar{n}_{i0} = 0.1$ и $\theta_0 = \pi/2$. Амплитуда (б) и период колебаний (в) плотности поляритонов накачки первого импульса в зависимости от α при $\bar{n}_{s0} = 0.3, \bar{n}_{i0} = 0.1, \bar{n}_{p20} = 0.5$ (1), 0.7 (2), 1 (3)

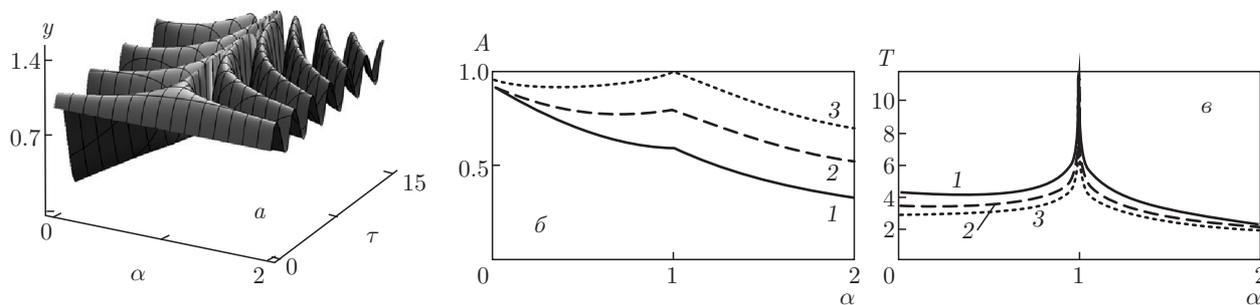


Рис. 4. а) Временная эволюция плотности поляритонов накачки первого импульса y в зависимости от нормированной расстройки резонанса при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса, поляритонов сигнальной и холостой мод $\bar{n}_{p20} = 1, \bar{n}_{s0} = \bar{n}_{i0} = 0.3$ и $\theta_0 = 0$. Амплитуда (б) и период колебаний (в) плотности поляритонов накачки первого импульса в зависимости от α при $\bar{n}_{p20} = 1, \bar{n}_{s0} = \bar{n}_{i0} = 0.3$ (1), 0.5 (2), 0.7 (3)

личных θ_0 (рис. 9б). При $\alpha = 1$ существует только один такой переход при $\theta_0 = 0$ (рис. 7б). При фиксированных $\bar{n}_{p20}, \bar{n}_{i0}$ и \bar{n}_{s0} дальнейшее увеличение параметра α не приводит к возникновению апериодических режимов, так как отсутствуют пересечения двух наименьших корней уравнения $W(y) = 0$

(рис. 7в). На рис. 9 представлены зависимости амплитуды A и периода T колебаний плотности поляритонов накачки от начальной разности фаз θ_0 для ряда значений параметра α . Видно, что обе функции изменяются в широких интервалах, причем эти изменения могут быть и немонотонными.

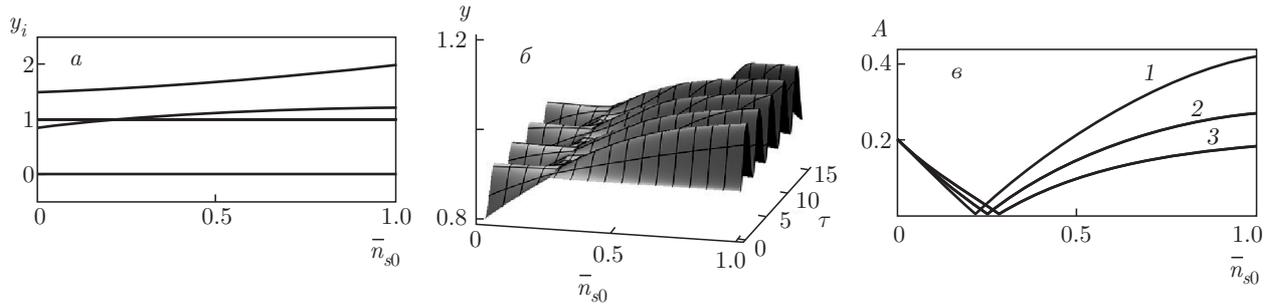


Рис. 5. а) Зависимости корней уравнения $W(y) = 0$ от нормированной начальной плотности поляритонов сигнальной моды \bar{n}_{s0} при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса и поляритонов холостой моды $\bar{n}_{p20} = 0.2$, $\bar{n}_{i0} = 0.5$ и $\theta_0 = 0$. б) Временная эволюция плотности поляритонов накачки первого импульса y в зависимости от начальной плотности поляритонов сигнальной моды \bar{n}_{s0} при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса $\bar{n}_{p20} = 0.2$ и поляритонов холостой моды $\bar{n}_{i0} = 0.5$. в) Амплитуда A колебаний плотности поляритонов накачки первого импульса y в зависимости от \bar{n}_{s0} при $\bar{n}_{p20} = 0.2$ и $\bar{n}_{i0} = 0.7$ (1), 0.5 (2), 0.4 (3)

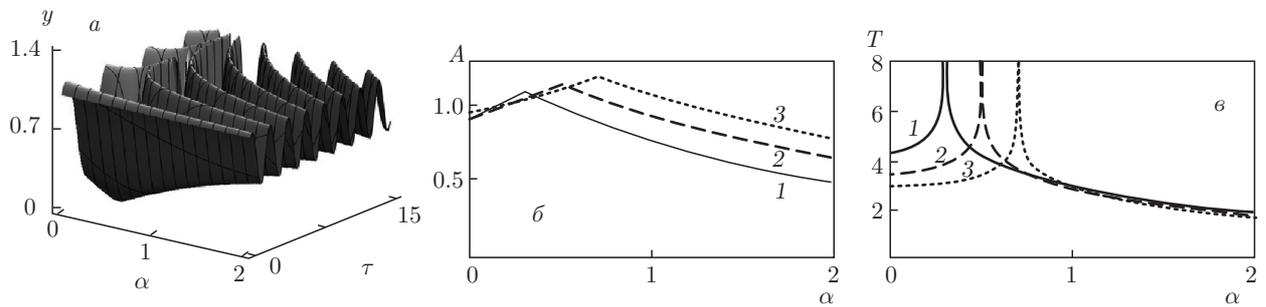


Рис. 6. То же, что и на рис. 4, но для $\theta_0 = \pi$

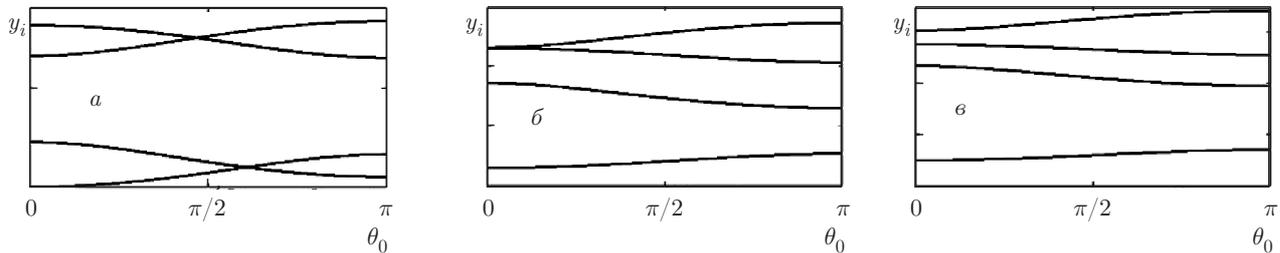


Рис. 7. Зависимости корней уравнения $W(y) = 0$ от начальной разности фаз θ_0 при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса, поляритонов сигнальной и холостой мод $\bar{n}_{p20} = 1$, $\bar{n}_{s0} = \bar{n}_{i0} = 0.3$ и различных значениях нормированной расстройки резонанса α : 0.1 (а), 1 (б), 1.5 (в)

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при накачке нижней поляритонной ветви в двух близких точках закона дисперсии возможен периодический и аperiodический процессы превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод, а также покой системы. Режим покоя будет наблюдаться только в условиях точного резонанса при $\theta_0 = 0$, когда одна из начальных плотностей поляритонов накачки меньше либо равна начальной плотности поля-

ритонов холостой моды. Периоды и амплитуды колебаний плотностей поляритонов существенно зависят от начальных плотностей поляритонов накачки, сигнальной и холостой мод, начальной разности фаз и расстройки резонанса. Существенная зависимость периода и амплитуды колебаний поляритонов от начальной разности фаз свидетельствует о возможности фазового управления динамикой системы.

Необходимо отметить, что при накачке поляритонной ветви в одной точке закона дисперсии в нерезонансном случае при начальной разности фаз рав-

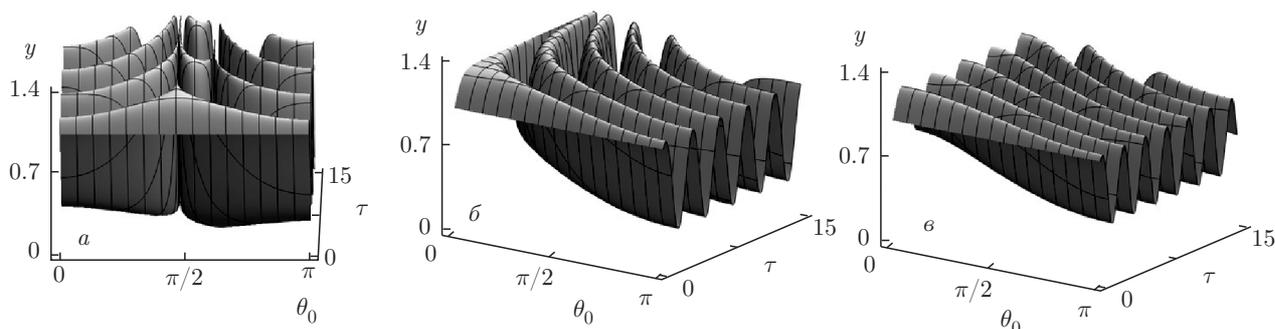


Рис. 8. Временная эволюция плотности поляритонов накачки первого импульса y в зависимости от начальной разности фаз θ_0 при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса, поляритонов сигнальной и холостой мод $\bar{n}_{p20} = 1, \bar{n}_{s0} = \bar{n}_{i0} = 0.3$ и нормированной расстройке резонанса α , равной 0.1 (а), 1 (б), 1.5 (в)

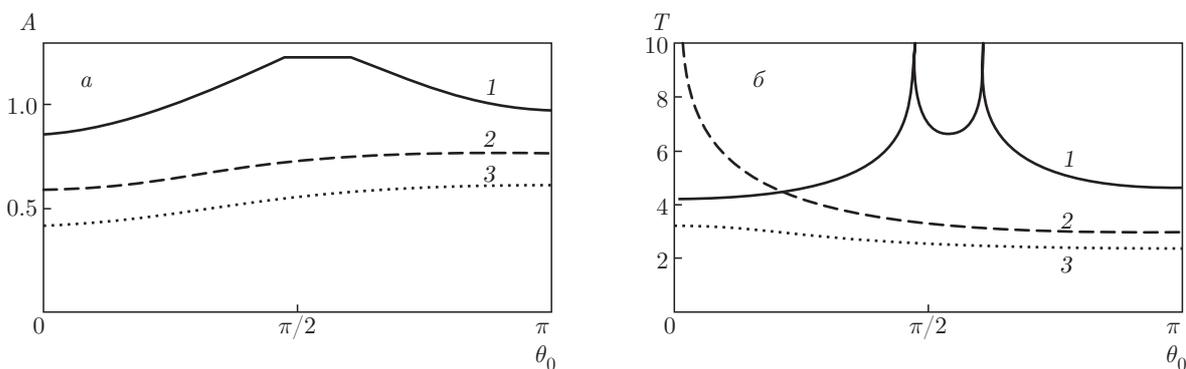


Рис. 9. Амплитуда (а) и период колебаний (б) плотности поляритонов накачки первого импульса в зависимости от начальной разности фаз θ_0 при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса, поляритонов сигнальной и холостой мод $\bar{n}_{p20} = 1, \bar{n}_{s0} = \bar{n}_{i0} = 0.3$ и нормированной расстройке резонанса α , равной 0.1 (1), 1 (2), 1.5 (3)

ной $\theta_0 = 0$ также наблюдался периодический режим эволюции превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод, а также покой системы при отличных от нуля начальных параметрах системы, чего не наблюдается при накачке в двух близких по энергии точках закона дисперсии. В условиях точного резонанса при $\theta_0 = \pi/2$ наблюдался только аперриодический режим эволюции превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод [39–41]. Таким образом, введение двух независимых накачек приводит к увеличению степеней свободы системы. Возникают новые бифуркационные переходы от периодического режима эволюции к аперриодическому.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Kavokin and G. Malpuech, *Thin Films and Nanostructures. Cavity Polaritons*, ed. by V. M. Agranovich and D. Taylor, Amsterdam (2003).
2. H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
3. A. Kavokin, *Appl. Phys. A* **89**, 241 (2007).
4. M. M. Glazov and K. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **73**, 245317 (2006).
5. I. A. Shelykh, R. Johne, D. D. Solnyshkov, A. V. Kavokin, N. A. Gippius, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **76**, 155308 (2007).
6. D. M. Whittaker, *Phys. Rev. B* **63**, 193305 (2001).
7. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **62**, R 4825 (2000).
8. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
9. J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **62**, R 16247 (2000).

10. C. Ciuti, Phys. Rev. B **69**, 245304 (2004).
11. P. Schwendimann, C. Ciuti, and A. Quattropani, Phys. Rev. B **68**, 165324 (2003).
12. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. Porras, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **65**, 073309 (2002).
13. I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, and G. Malpuech, Phys. Stat. Sol. B **242**, 2271 (2005).
14. R. M. Stevenson, V. N. Astratov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, and J. S. Roberts, Phys. Rev. Lett. **85**, 3680 (2000).
15. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, G. Malpuech, M. Emam-Ismael, A. V. Chernenko, A. V. Kavokin, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **67**, 165302 (2003).
16. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, and V. D. Kulakovskii, Phys. Rev. B **62**, R 13298 (2000).
17. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, Phys. Rev. B **63**, 041303 (R) (2001); Semicond. Sci. Technol. **18**, S 279 (2003).
18. P. G. Savvidis, C. Ciuti, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, M. S. Skolnik, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **64**, 075311 (2001).
19. V. Savona, P. Schwendimann, and A. Quattropani, Phys. Rev. B **71**, 125315 (2005).
20. A. Kavokin, P. G. Lagoudakis, G. Malpuech, and J. J. Baumberg, Phys. Rev. B **67**, 195321 (2003).
21. M. Saba, C. Ciuti, J. Bloch, V. Thierry-Mieg, R. Adre, L. S. Dang, S. Kundermann, A. Mura, C. Bongiovanni, J. E. Staehli, and B. Deveaud, Nature **414**, 731 (2001).
22. R. Huang, F. Tassone, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. B **61**, R 7854 (2000).
23. A. Baas, J.-Ph. Karr, M. Romanelli, A. Bramati, and E. Giacobino, Phys. Rev. B **70**, 161307 (R) (2004).
24. A. Baas, J.-Ph. Karr, H. Eleuch, and E. Giacobino, Phys. Rev. A **69**, 023819 (2004).
25. D. N. Krizhanovskii, S. S. Gavrilov, A. P. D. Love, D. Sanvitto, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **77**, 115336 (2008).
26. P. G. Lagoudakis, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, P. R. Eastham, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **65**, 161310 (R) (2002).
27. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, D. A. Kurysh, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **65**, 081308 (R) (2002).
28. L. Dominici, M. Petrov, M. Matuszewski, D. Ballarini, M. De Giorgi, E. Colas, E. Cancellieri, B. S. Fernandez, A. Bramati, G. Gigli, A. Kavokin, F. Laussy, and D. Sanvitto, Nat. Commun. **6**, 8993 (2015).
29. P. Cristofolini, G. Christmann, S. I. Tsintzos, G. Deligeorgis, G. Konstantinidis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, Science **336**, 704 (2012).
30. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, И. В. Белоусов, ЖЭТФ **153**, 179 (2018).
31. I. Rosenberg, Y. Mazuz-Harpaz, R. Rapaport, K. West, and L. Pfeiffer, Phys. Rev. B **93**, 195151 (2016).
32. S. I. Tsintzos, A. Tzimis, G. Stavrinidis, A. Trifonov, Z. Hatzopoulos, J. J. Baumberg, H. Ohadi, and P. G. Savvidis, Phys. Rev. Lett. **121**, 037401 (2018).
33. N. A. Gippius, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, S. S. Gavrilov, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, S. G. Tikhodeev, and G. Malpuech, Phys. Rev. Lett. **98**, 236401 (2007).
34. T. K. Paraiso, M. Wouters, Y. Leger, F. Morier-Genoud, and B. Deveaud-Plédran, Nat. Mater. **9**, 655 (2010).
35. R. Cerna, Y. Leger, T. K. Paraiso, M. Wouters, F. Morier-Genoud, M. T. Portalla-Oberli, and B. Deveaud, Nat. Commun. **4**, 2008 (2013).
36. T. C. H. Liew, A. V. Kavokin, and I. A. Shelykh, Phys. Rev. Lett. **101**, 016402 (2008).
37. T. Espinosa-Ortega and T. C. H. Liew, Phys. Rev. B **87**, 195305 (2013).
38. A. Amo, T. C. H. Liew, C. Adrados, R. Houdre, E. Giacobino, A. V. Kavokin, and A. Bramati, Nat. Photon. **4**, 361 (2010).
39. О. Ф. Васильева, П. И. Хаджи, Опт. и спектр. **115**, 922 (2013).
40. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, Опт. и спектр. **111**, 831 (2011); ФТТ **53**, 1216 (2011).
41. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, J. Nanophot. **6**, 061805 (2012); J. Nanoelectr. Optoelectr. **9**, 295 (2014).
42. C. J. Mc Konstrie, S. Radic, and M. G. Raymer, Opt. Express **12**, 5037 (2004).

43. Y. Okawachi, M. Yu. K. Luke, D. O. Carvalho, S. Ramelow, A. Farsi, M. Lipson, and A. L. Gaeta, *Opt. Lett.* **40**, 5267 (2015).
44. А. И. Бурштейн, А. Ю. Пусеп, *ЖЭТФ* **69**, 1927 (1975).
45. П. И. Хаджи, *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1985).
46. Л. П. Питаевский, *УФН* **168**, 641 (1998).
47. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1963).
48. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1971).
49. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, П. И. Хаджи, *Опт. и спектр.* **125**, 425 (2018).