

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНТЕРВАЛ $1S-2S$ В МЮОННЫХ ВОДОРОДЕ И ГЕЛИИ

А. Е. Дорохов <sup>a\*</sup>, А. П. Мартыненко <sup>b\*\*</sup>, Ф. А. Мартыненко <sup>b\*\*\*</sup>,  
О. С. Сухорукова <sup>b</sup>, Р. Н. Фаустов <sup>c\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,  
Объединенный институт ядерных исследований  
141980, Дубна, Московская обл., Россия

<sup>b</sup> Самарский национальный исследовательский университет  
443011, Самара, Россия

<sup>c</sup> Институт образовательной информатики ФИЦ Информатика и управление Российской академии наук  
119333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 мая 2019 г.,  
после переработки 29 июня 2019 г.  
Принята к публикации 3 июля 2019 г.

В рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике выполнен расчет интервала большой структуры спектра энергий ( $1S-2S$ ) в мюонных водороде и гелии. Учтены поправки порядка  $\alpha^4$ ,  $\alpha^5$ ,  $\alpha^6$ , которые определяются релятивистскими эффектами, эффектами поляризации вакуума, структуры ядра и отдачи, а также комбинированными поправками, включающими перечисленные. Эффекты структуры ядра выражены в терминах зарядового радиуса ядер в случае однофотонного взаимодействия и электромагнитных формфакторов ядер в случае двухфотонного взаимодействия. Полученные численные значения для интервала ( $1S-2S$ ) могут быть использованы для сравнения с будущими экспериментальными данными и для более точного определения зарядовых радиусов ядер.

DOI: 10.1134/S0044451019120022

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) связанных состояний — одна из самых успешных теорий в современной физике, которая была проверена с помощью прецизионных измерений в широком классе задач. Текущая экспериментальная программа коллаборации CREMA (Charge Radius Experiments with Muonic Atoms) по исследованию тонкой и сверхтонкой структуры спектров энергии простейших мюонных атомов успешно выполняется, начиная с 2010 г., когда были измерены частоты двух переходов ( $2S_{1/2}^{F=1}-2P_{3/2}^{F=2}$ ) и ( $2S_{1/2}^{F=0}-2P_{3/2}^{F=1}$ ) в мюонном водороде [1, 2]. В мюонном дейтерии методами лазерной спектроскопии были изме-

рены три частоты переходов между уровнями  $2P$  и  $2S$ : ( $2S_{1/2}^{F=3/2}-2P_{3/2}^{F=5/2}$ ), ( $2S_{1/2}^{F=1/2}-2P_{3/2}^{F=3/2}$ ), ( $2S_{1/2}^{F=1/2}-2P_{3/2}^{F=1/2}$ ) [3]. Лазерная спектроскопия обеспечивает уникальные возможности для проверки и дальнейшего развития теоретических моделей, связанных с изучением фундаментальной структуры материи. Выполненные исследования с мюонным водородом показали, что существует значительное расхождение в величинах зарядового радиуса протона и дейтрона, которые получаются из экспериментов с электронными и мюонными атомами [4–7]. Эта проблема, получившая название «загадки радиуса протона», остается нерешенной уже в течение длительного времени, хотя предпринимаются многочисленные попытки для ее решения. Следует заметить, что предварительные результаты по спектроскопии мюонного гелия показывают, что такого расхождения в результатах для этих ионов не наблюдается. Только в случае простейших двухчастичных атомов теоретические подходы достаточно хорошо разработаны, чтобы

\* E-mail: dorokhov@theory.jinr.ru

\*\* E-mail: a.p.martynenko@samsu.ru

\*\*\* E-mail: f.a.martynenko@gmail.com

\*\*\*\* E-mail: faustov@ccas.ru

рассчитать как электронную, так и ядерную структуру из первых принципов. Одной из возможных задач будущих экспериментов может быть измерение частоты перехода ( $1S-2S$ ) в мюонном водороде и ионах мюонного гелия. Теоретическая величина интервала ( $1S-2S$ ) содержит вклад на конечный размер ядра порядка  $(Z\alpha)^4$ , который численно велик по сравнению с другими поправками. Поэтому такие эксперименты дополнили бы уже существующие и, возможно, дали бы новую информацию о зарядовых радиусах легких ядер. Решение данной задачи требует соответствующего прецизионного теоретического расчета перехода ( $1S-2S$ ).

Известно, что для атома электронного водорода и дейтерия интервал большой структуры ( $1S-2S$ ) был измерен с очень высокой точностью в [8–10]. Так, для электронного водорода было получено значение [8]

$$\begin{aligned} f_{1S-2S} &= 2466061413187035(10) \text{ Гц}, \\ \delta &= 4.06 \cdot 10^{-15}. \end{aligned} \quad (1)$$

Частотный интервал между состояниями  $1S$  и  $2S$ , равный  $2455528940.6(9.1)(3.7)$  МГц был измерен также в мюонии в [10] в хорошем соответствии с предсказаниями КЭД для связанных состояний [11]. Новый эксперимент в мюонии MU-MASS (muonium laser spectroscopy) [12] направлен на увеличение точности измерения частоты перехода ( $1S-2S$ ) в тысячу раз (с точностью 10 кГц или 4 ppt). Аналогичный эксперимент для иона гелия вступил в завершающую стадию [13, 14].

Недавно в работе [15] была измерена частота перехода ( $1S-3S$ ) в атоме водорода с относительной точностью  $9 \cdot 10^{-13}$ :

$$f_{1S-3S} = 2922743278671.5(2.6) \text{ кГц}. \quad (2)$$

Этот результат вместе с частотой перехода ( $1S-2S$ ) в водороде дает значение постоянной Ридберга и зарядового радиуса протона, которые находятся в хорошем согласии с текущими значениями, рекомендуемыми CODATA [16], но отличаются от значений, полученных из спектроскопии мюонных атомов.

Поскольку экспериментальная точность измерения интервала ( $1S-2S$ ) для ряда простейших атомов очень высока и продолжает расти, имеется перспектива использовать этот интервал для поиска эффектов Новой физики, лежащей за пределами Стандартной модели. Спектроскопия чисто лептонных систем, а также легких мюонных атомов может помочь в оценке возможных проявлений спин-зависящих и спин-независящих сил темной материи. Несмотря на имеющиеся многочисленные работы

[11, 17–32] (см. другие ссылки в [4, 31]), посвященные исследованию различных поправок в спектре энергии мюонных атомов, величина энергетического интервала ( $1S-2S$ ) не изучалась с хорошей точностью. Оценка некоторых основных вкладов в интервал ( $1S-2S$ ) для мюонного водорода была сделана нами в работе [33]. Поэтому цель данной работы состояла в прецизионном расчете интервала большой структуры ( $1S-2S$ ) в атомах мюонного водорода и ионах мюонного гелия, включенных в эксперименты коллаборации CREMA.

## 2. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Наш подход к прецизионному расчету интервала большой структуры ( $1S-2S$ ) основан на квазипотенциальном методе в квантовой электродинамике [17, 18, 24]. Двухчастичное связанное состояние описывается уравнением Шредингера, а основной вклад в оператор взаимодействия частиц определяется гамильтонианом Брейта. Основной вклад в тонкую структуру спектра  $S$ -состояний водородоподобных атомов, состоящих из частиц с массами  $m_1$  (масса мюона),  $m_2$  (масса ядра), может быть представлен с точностью  $O((Z\alpha)^6)$  ( $\mu$  — приведенная масса) в виде [11]

$$\begin{aligned} E_n &= m_1 + m_2 - \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{3}{4n} + \frac{\mu^2}{4m_1 m_2 n} \right] - \frac{m_1(Z\alpha)^6}{16n^6} \times \\ &\times (2n^3 + 6n^2 - 12n + 5). \end{aligned} \quad (3)$$

Данная формула правильно учитывает поправку на отдачу  $(Z\alpha)^4 m_1^2/m_2^2$  для ядер спина 1/2. В случае ядер со спином 0 и 1 необходимо ввести дополнительную поправку на отдачу в порядке  $(Z\alpha)^4$  [11, 34, 35] (см. разд. 4). Эффекты отдачи порядка  $(Z\alpha)^6$  в формуле (3) не учтены и обсуждаются в разд. 5.

Важный класс поправок к уровням энергии составляют поправки на поляризацию вакуума. Хотя их величина уменьшается с увеличением количества петель в поляризационном операторе, учет вкладов до трех петель включительно является необходимым для достижения высокой точности расчета. Однопетлевая поляризация вакуума приводит к модификации кулоновского потенциала и в координатном представлении определяется следующим выражением (индекс «вр» обозначает здесь и ниже электронную поляризацию вакуума, а индекс «С» — вклад кулоновского взаимодействия):

$$V_{vp}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \rho(\xi) \left( -\frac{Z\alpha}{r} e^{-2m_e \xi r} \right), \quad (4)$$

$$\rho(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} (2\xi^2 + 1)}{\xi^4}.$$

В первом порядке теории возмущений потенциал (4) дает следующие сдвиги уровней энергии  $1S$  и  $2S$  ( $b_1 = m_e/W$ ,  $W = \mu Z\alpha$ ,  $Z$  – заряд ядра):

$$\Delta E_{vp}(1S) = -\frac{4\mu(Z\alpha)^2\alpha}{3\pi} \frac{\sqrt{b_1^2 - 1} (12\pi b_1^3 - 24b_1^2 + 9\pi b_1 - 22) - 6(4b_1^4 + b_1^2 - 2) \sec^{-1}(b_1)}{6\sqrt{b_1^2 - 1}}, \quad (5)$$

$$\Delta E_{vp}(2S) = -\frac{\mu(Z\alpha)^2\alpha}{6\pi} \left[ \frac{b_1(b_1(16b_1(b_1(3b_1(56b_1(\pi b_1 - 1) - 25\pi) + 68) + 6\pi) - 49) + 9\pi) - 7}{3(4b_1^2 - 1)^2} - \frac{i(3584b_1^8 - 2048b_1^6 + 300b_1^4 + 10b_1^2 - 1) \ln\left(-\frac{2ib_1}{\sqrt{4b_1^2 - 1} - i}\right)}{(4b_1^2 - 1)^{5/2}} \right]. \quad (6)$$

Соответствующие численные значения этих вкладов для интервала  $(2S-1S)$  представлены в табл. 1 (линия 2). Они выписаны для определенности с точностью до четырех десятичных знаков, так как ошибки, связанные с погрешностями определения фундаментальных физических констант, значительно меньше. Выражения (5), (6) можно использовать и для численной оценки вклада мюонной поляризации вакуума, заменяя массу электрона на массу мюона. Численное значение вклада при этом резко уменьшается, что связано с уменьшением общего порядка такого вклада за счет множителя  $\alpha^2$  (см. линию 3 в табл. 1, 2). Численное значение этой поправки несколько отличается от того, которое получается, если использовать аналитическое выражение в ведущем порядке  $\Delta E_{mvp}(2S-1S) = 7\alpha(Z\alpha)^4\mu^3/30\pi m_1^2$ . Оператор (4) дает также вклады в старших порядках теории возмущений, которые рассмотрены ниже. В однофотонном взаимодействии имеются также вклады двухпетлевой и трехпетлевой поляризации вакуума (см. рис. 1, рис. 2, рис. 3, рис. 4).

В случае вкладов поляризационного оператора четвертого порядка (рис. 1) можно построить потенциал взаимодействия частиц и сдвиг уровней энергии в интегральной форме, используя замену в фотонном пропагаторе в импульсном представлении [36]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v) dv}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)}, \quad (7)$$

$$f(v) = v \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[ \text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \right] + \left[ \frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \left[ \frac{3}{2}v(3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v(3-v^2) \ln v \right] + \frac{3}{8}v(5-3v^2) \right\},$$

$\text{Li}_2(z)$  – дилогарифм Эйлера. Тогда в координатном представлении оператор взаимодействия частиц принимает удобный для последующего расчета сдвига энергии вид:

$$\Delta V_{1\gamma,2-loop\ vp}^C(r) = -\frac{2Z\alpha}{3r} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right). \quad (8)$$

Численный вклад (8) включен в табл. 1 вместе с другим вкладом двухпетлевой поляризации вакуума с двумя последовательными петлями, который обозначен далее индексом «вр-вр». В импульсном представлении соответствующий потенциал взаимодействия частиц имеет вид

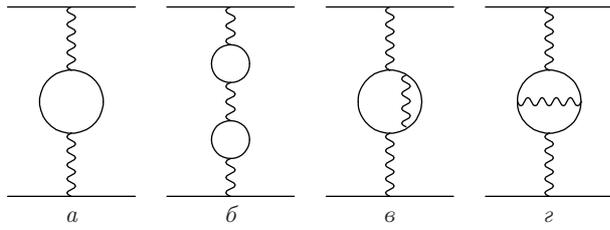


Рис. 1. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

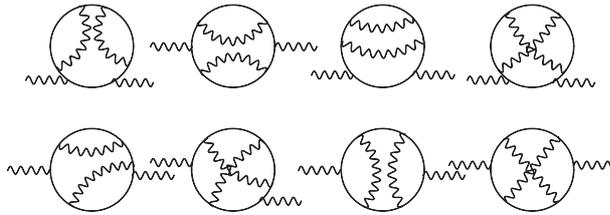


Рис. 2. Эффекты трехпетлевой поляризации вакуума с одним фермионным циклом в однофотонном взаимодействии

$$V_{vp-vp}^C(k^2) = -4\pi(Z\alpha) \frac{\alpha^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \frac{k^2}{(k^2 + 4m_e^2\xi^2)(k^2 + 4m_e^2\eta^2)} = -\frac{2\alpha^2(Z\alpha)}{9\pi} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left\{ \frac{1}{k^2 + 4m_e^2\xi^2} + \frac{1}{k^2 + 4m_e^2\eta^2} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta^2 - \xi^2} \left[ \frac{1}{k^2 + 4m_e^2\xi^2} - \frac{1}{k^2 + 4m_e^2\eta^2} \right] \right\}. \quad (9)$$

После преобразования Фурье (9) принимает вид суперпозиции юкавовских потенциалов, распределенной с некоторой плотностью:

$$V_{1\gamma, vp-vp}^C(r) = \frac{\alpha^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left( -\frac{Z\alpha}{r} \right) \times \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} (\xi^2 e^{-2m_e\xi r} - \eta^2 e^{-2m_e\eta r}). \quad (10)$$

При вычислении матричных элементов (8), (10) интегрирование по координатам выполняется аналитически, а последующее интегрирование по спектральным параметрам — численно. Вклад (8), (10) имеет порядок  $\alpha^2(Z\alpha)^2$  и численно велик (см. строки 6 в табл. 1, 2), поэтому необходимо рассмотреть поправки следующего по  $\alpha$  порядка.

Переходя ко вкладам поляризационного оператора шестого порядка (в данном случае шесть означает число вершин взаимодействия в вакуумной

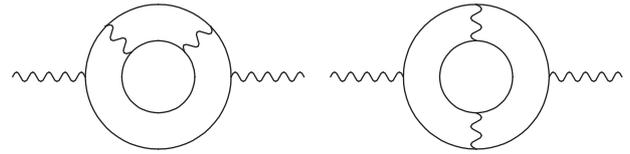


Рис. 3. Эффекты трехпетлевой поляризации вакуума с двумя фермионными циклами в однофотонном взаимодействии

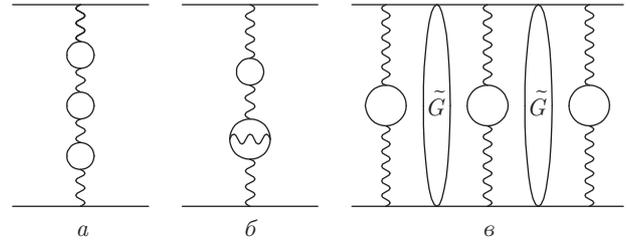


Рис. 4. Эффекты трехпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии и третьем порядке теории возмущений

петле), заметим, что они изучались в случае лэмбовского сдвига ( $2P-2S$ ) в работах [37, 38]. Удобно разделить этот вклад на две части с одним и двумя фермионными циклами. Полезно заметить, что в [39] была получена общая параметрическая формула для вкладов на рис. 2, 3, но использовать ее для получения численных оценок сложно в силу остающихся многократных интегралов по фейнмановским и спектральным параметрам, а также проведения процедуры перенормировки. Более удобная для практического использования формула была получена в [37, 40] для вклада восьми диаграмм:

$$\Pi_3^{(1)}(z) = \tilde{\Pi}_3^{(1)}(z) - 4\Pi_2(z) - (1-z)G(z) \times \left( \frac{9}{4}G(z) + \frac{31}{16} + \frac{229}{32z} + \frac{229}{32z} + \frac{173}{96} \right), \quad (11)$$

$$\tilde{\Pi}_3^{(1)}(z) = \tilde{\Pi}_3^{(1)}(z)(-\infty) + \frac{(1+\omega)^2}{1-\omega} \frac{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\omega + \tilde{a}_2\omega + \tilde{a}_3\omega}{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1\omega + \tilde{b}_2\omega + \tilde{b}_3\omega},$$

явный вид входящих сюда функций и их асимптотические значения можно найти в [37, 40]. Коэффициенты паде-аппроксимации  $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$  выписаны в [38]. Общая формула для вклада поляризационного оператора (11) (вклад восьми диаграмм на рис. 2) в сдвиг ( $1S-2S$ ) имеет вид

$$\Delta E_{vp-8}(2S-1S) = \frac{2}{\pi} \mu (Z\alpha)^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \times \int_0^\infty \frac{s^2(104 + 87s^2 + 51s^4 + 14s^6)}{(1+s^2)^4(4+s^2)^2} \Pi_3^{(1)}\left(\frac{s^2}{4b_1^2}\right), \quad (12)$$

а численные значения интервала  $(2S-1S)$  мюонного водорода и гелия равны

$$\Delta E_{vp-8}(2S-1S) = \begin{cases} 0.0156 \text{ мЭВ,} & (\mu p), \\ 0.0169 \text{ мЭВ,} & (\mu d), \\ 0.0173 \text{ мЭВ,} & (\mu t), \\ 0.0731 \text{ мЭВ,} & (\mu^3\text{He})^+, \\ 0.0736 \text{ мЭВ,} & (\mu^4\text{He})^+. \end{cases} \quad (13)$$

Диаграммы с двумя фермионными циклами на рис. 3 можно рассматривать как поправки к массовому и вершинному операторам. При этом для поляризационного оператора второго порядка можно использовать дисперсионное соотношение. Эффективный пропагатор виртуального фотона в этих диаграммах может быть представлен в виде

$$\frac{-i}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\lambda} - \xi \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right) \Pi_{\lambda\sigma}(k^2) \frac{-i}{k^2 + i0} \times \left( g_{\nu\sigma} - \xi \frac{k_\nu k_\sigma}{k^2} \right), \quad (14)$$

что с учетом поперечности поляризационного оператора  $\Pi_{\lambda\sigma}(k^2)$  означает, что результат является калибровочно-инвариантным. Учет таких вкладов имеет важное значение для достижения высокой точности расчета аномального магнитного момента лептона [41, 42]. Мнимая часть поляризационного оператора на рис. 3 первоначально представлялась в виде двумерного спектрального интеграла [43], а затем и в аналитическом виде в [44], причем окончательная формула имеет довольно громоздкий вид. В наших расчетах мы используем последнее представление поляризационного оператора из [44].

Остальные трехпетлевые вклады на рис. 3 с последовательными петлями можно вычислить так же, как двухпетлевые на рис. 1, выполнив построение потенциалов взаимодействия так, как это было сделано в (9), (10). Общие выражения для этих потенциалов в координатном представлении имеют вид

$$V_{vp-vp-vp}^C(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha^3}{(3\pi)^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \left[ e^{-2m_e\zeta r} \frac{\zeta^4}{(\xi^2-\zeta^2)(\eta^2-\zeta^2)} + e^{-2m_e\xi r} \times \frac{\xi^4}{(\zeta^2-\xi^2)(\eta^2-\xi^2)} + e^{-2m_e\eta r} \frac{\eta^4}{(\xi^2-\eta^2)(\zeta^2-\eta^2)} \right], \quad (15)$$

$$V_{vp-2-loop\ vP}^C = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)}{9\pi^3 r} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \frac{f(\eta) d\eta}{\eta} \left[ e^{-2m_e\eta r} \frac{\eta^2}{\eta^2-\xi^2} - e^{-2m_e\xi r} \frac{\xi^2}{\eta^2-\xi^2} \right]. \quad (16)$$

Соответствующие этим взаимодействиям поправки в спектре энергии атомов были представлены в интегральной форме по трем спектральным параметрам и рассчитаны численно. Суммарное численное значение трехпетлевого вклада поляризации вакуума из  $1\gamma$ -взаимодействия представлено в табл. 1, 2 строками 7.

### 3. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ

Потенциал Брейта дает вклад в структуру уровней энергии  $S$ -состояний в лидирующем порядке  $(Z\alpha)^4$ . Эффект поляризации вакуума приводит к изменению не только кулоновского потенциала, но и других слагаемых в брейтовском потенциале, которые будут давать вклад в спектре энергии порядка  $\alpha(Z\alpha)^4$ . Такой порядок вклада говорит о том, что численные значения поправок могут быть значительными. Модификация потенциала Брейта за счет однопетлевой поляризации вакуума определяется в случае  $S$ -состояний следующими слагаемыми (индекс « $B$ » обозначает потенциал Брейта) [19, 45] ( $\delta_I = 1$  для полуцелого спина и  $\delta_I = 0$  для целого спина):

$$\Delta V_{vp}^B(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \sum_{i=1}^3 \Delta V_{i, vp}^B(r), \quad (17)$$

$$\Delta V_{1, vp}^B = \frac{Z\alpha}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \left[ 4\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{4m_e^2\xi^2}{r} e^{-2m_e\xi r} \right], \quad (18)$$

$$\Delta V_{2,vp}^B = -\frac{Z\alpha m_e^2 \xi^2}{m_1 m_2 r} e^{-2m_e \xi r} (1 - m_e \xi r), \quad (19)$$

$$\Delta V_{3,vp}^B = -\frac{Z\alpha}{2m_1 m_2} p_i \frac{e^{-2m_e \xi r}}{r} \times \left[ \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} (1 + 2m_e \xi r) \right] p_j. \quad (20)$$

Наибольший численный вклад (более 80 %) дает слагаемое  $\Delta V_{1,vp}^B$ , матричные элементы которого

вычисляются аналитически для 1S- и 2S-состояний:

$$\Delta E_{1,vp}^B(1S) = \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{18\pi} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \left[ (1 + 6b_1^2 - 3b_1^3 \pi) + \frac{1}{\sqrt{1-b_1^2}} (6 - 3b_1^2 + 6b_1^4) \times \ln \frac{1 + \sqrt{1-b_1^2}}{b_1} \right], \quad (21)$$

$$\Delta E_{1,vp}^B(2S) = \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{288\pi} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \left[ \frac{2(8b_1(48b_1^3 - 3\pi(1-4b_1^2)^2 - 22b_1) - 29)b_1^2 + 11}{(1-4b_1^2)^2} - \frac{12(256b_1^8 - 160b_1^6 + 66b_1^4 - 10b_1^2 + 1) \ln \frac{2b_1}{\sqrt{1-4b_1^2} + 1}}{(1-4b_1^2)^{5/2}} \right]. \quad (22)$$

Суммарный вклад релятивистских поправок с учетом однопетлевой поляризации вакуума представлен в строке 8 табл. 1, 2. С целью увеличения точности расчета мы учитываем также вклад релятивистских поправок с эффектами двухпетлевой поляризации вакуума порядка  $\alpha^2(Z\alpha)^4$ . Основной член в потенциале взаимодействия имеет вид

$$\Delta V_{1,2loop-vp}^B = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{12\pi^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \left[ 4\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{4m_e^2}{r(1-v^2)} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right], \quad (23)$$

а расчет матричных элементов проводится аналогично (21), (22).

Во втором порядке теории возмущений (ТВ) имеется ряд вкладов, в которых потенциалы  $\Delta V_{vp}^C$ ,  $\Delta V^B$  (потенциал Брейта),  $\Delta V_{vp}^B$  рассматриваются как операторы возмущения (индекс «sopt» обозначает вклад второго порядка ТВ):

$$\Delta E_{sopt}^{B, vp} = \langle \psi | \Delta V_{vp}^C \tilde{G} \Delta V_{vp}^C | \psi \rangle + 2 \langle \psi | \Delta V^B \tilde{G} \Delta V_{vp}^C | \psi \rangle + 2 \langle \psi | \Delta V_{vp}^B \tilde{G} \Delta V_{vp}^C | \psi \rangle + 2 \langle \psi | \Delta V^B \tilde{G} \Delta V_{vp, vp}^C | \psi \rangle, \quad (24)$$

$$\Delta V^B = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_2^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left( \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right). \quad (25)$$

Такие вклады, представленные для наглядности на диаграммах рис. 5, можно рассматривать как однопетлевые и двухпетлевые поправки поляризации вакуума с учетом релятивистских эффектов. Редуцированные кулоновские функции Грина 1S- и 2S-состояний имеют вид [46]

$$\tilde{G}_{1S}(r_1, r_2) = -\frac{\alpha\mu^2}{\pi} e^{-(x_1+x_2)} g_{1S}(x_1, x_2), \quad (26)$$

$$g_{1S}(x_1, x_2) = \frac{1}{2x_>} - \ln 2x_> - \ln 2x_< + Ei(2x_<) + \frac{7}{2} - 2\gamma - (x_1 + x_2) + \frac{1 - e^{2x_<}}{2x_<},$$

$$\tilde{G}_{2S}(r_1, r_2) = -\frac{\alpha\mu^2}{16\pi x_1 x_2} e^{-(x_1+x_2)} g_{2S}(x_1, x_2), \quad (27)$$

$$g_{2S}(x_1, x_2) = 8x_< - 4x_<^2 + 8x_> + 12x_<x_> - 26x_<^2 x_> + 2x_<^3 x_> - 4x_>^2 - 26x_<x_>^2 + 23x_<^2 x_>^2 - x_<^3 x_>^2 + 2x_<x_>^3 - x_>^2 x_>^3 + 4e^{x_<} (1 - x_<) (x_> - 2)x_> + 4(x_< - 2)x_<(x_> - 2)x_> [-2\gamma + Ei(x_<) - \ln x_< - \ln x_>],$$

где  $x_< = \min(x_1, x_2)$ ,  $x_> = \max(x_1, x_2)$ ,  $x_i = W r_i$ ,  $\gamma$  – константа Эйлера.

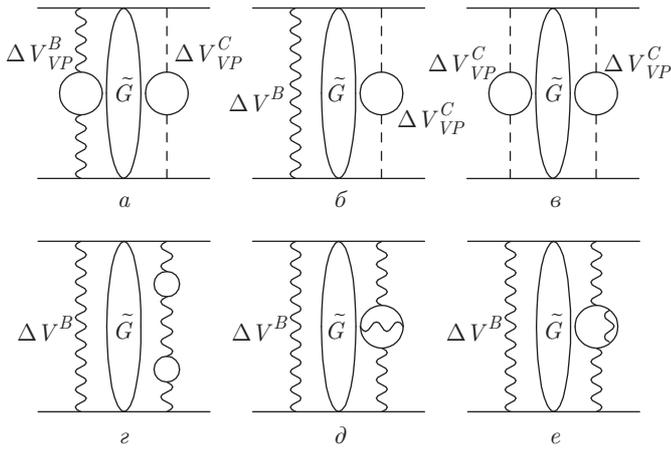


Рис. 5. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума во втором порядке ТВ.  $\tilde{G}$  — редуцированная кулоновская функция Грина

Среди амплитуд на рис. 5 наибольший вклад порядка  $\alpha^2(Z\alpha)^2$  дает амплитуда (е), содержащая два потенциала с поправкой на поляризацию вакуума к кулоновскому потенциалу. Интегрирование по координатам проводится аналитически, а по спектральным параметрам — численно. Поскольку после интегрирования по координатам результат имеет громоздкий вид, мы приводим здесь исходное интегральное выражение для этой поправки и ее численные значения в сдвиге (2S–1S):

$$\Delta E_{sopt}^{vp, vp}(1S) = -\frac{16\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \int_0^\infty x_1 \exp\left\{-x_1\left(1 - \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} dx_1 \times \int_0^\infty x_2 \exp\left\{-x_2\left(1 - \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} g_{2S}(x_1, x_2) dx_2, \quad (28)$$

$$\Delta E_{sopt}^{vp, vp}(2S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{72\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_1}{2}\right) \exp\left\{-x_1\left(1 - \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} dx_1 \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_2}{2}\right) \exp\left\{-x_2\left(1 - \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} \times g_{2S}(x_1, x_2) dx_2, \quad (29)$$

$$\Delta E_{sopt}^{vp, vp}(2S-1S) = \begin{cases} 1.8811 \text{ мэВ,} & (\mu p), \\ 2.1924 \text{ мэВ,} & (\mu d), \\ 2.3101 \text{ мэВ,} & (\mu t), \\ 29.6344 \text{ мэВ,} & (\mu^3\text{He})^+, \\ 30.2930 \text{ мэВ,} & (\mu^4\text{He})^+. \end{cases} \quad (30)$$

При вычислении других поправок во втором порядке ТВ с брейтовским потенциалом используются преобразования исходных матричных элементов для приведения их к удобному для интегрирования виду. Так, например, при вычислении вклада на диаграмме рис. 5б возникает следующий матричный элемент ( $nS$ -состояние):

$$M_{nS} = \langle \psi_{nS} | \frac{\mathbf{p}^4}{(2\mu)^2} \sum'_m \frac{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|}{E_n - E_m} \Delta V_{vp}^C | \psi_{nS} \rangle = \langle \psi_{nS} | \left(E_n + \frac{Z\alpha}{r}\right) \left(\hat{H}_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right) \times \sum'_m \frac{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|}{E_n - E_m} \Delta V_{vp}^C | \psi_{nS} \rangle = \langle \psi_{nS} | \left(E_n + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 \tilde{G} \Delta V_{vp}^C | \psi_{nS} \rangle - \langle \psi_{nS} | \frac{Z\alpha}{r} \Delta V_{vp}^C | \psi_{nS} \rangle + \langle \psi_{nS} | \frac{Z\alpha}{r} | \psi_{nS} \rangle \langle \psi_{nS} | \Delta V_{vp}^C | \psi_{nS} \rangle. \quad (31)$$

После интегрирования по координатам получается интегральное выражение вида

$$M_{1S} = \frac{\mu^2\alpha(Z\alpha)^4}{6\pi} \int_1^\infty \frac{\rho(s) ds}{(b_1s + 1)^3} \times [4b_1s^2 + 11b_1s + 4(b_1s + 1) \ln(b_1s + 1) + 5], \quad (32)$$

$$M_{2S} = \frac{\mu^2\alpha(Z\alpha)^4}{96\pi} \int_1^\infty \frac{\rho(s) ds}{(2b_1s + 1)^5} [256b_1^4s^4 + 208b_1^3s^3 + 40b_1^2s^2 + 16(16b_1^3s^3 + 8b_1^2s^2 + 2b_1s + 1) \ln(2b_1s + 1) + 70b_1s - 1]. \quad (33)$$

Другое слагаемое в потенциале Брейта, пропорциональное  $\delta(\mathbf{r})$ , дает при вычислении матричных элементов  $\tilde{G}_{nS}(\mathbf{r}, 0)$ . Для 1S- и 2S-состояний функция Грина с одним нулевым аргументом имеет вид

$$\tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) = \frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x}}{x} g_{1S}(x), \quad g_{1S}(x) = 4x(\ln 2x + \gamma) + 4x^2 - 10x - 2, \quad x = \mu Z\alpha r, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{2S}(\mathbf{r}, 0) &= -\frac{Z\alpha\mu^2 e^{-x/2}}{4\pi} \frac{g_{2S}(x)}{2x}, \\ g_{2S}(x) &= 4x(x-2)(\ln x + \gamma) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4. \end{aligned} \quad (35)$$

Структура получающегося выражения после координатного интегрирования вполне аналогична (32), (33):

$$\begin{aligned} \Delta E_2^{B, vp}(1S) &= \frac{\mu^3\alpha(Z\alpha)^4}{6\pi} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \int_1^\infty \frac{\rho(s) ds}{(1+b_1s)^3} \times \\ &\times \left[ 2b_1^2s^2 + 7b_1s + 2(b_1s+1) \ln(b_1s+1) + 3 \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_2^{B, vp}(2S) &= \frac{\mu^2\alpha(Z\alpha)^4}{48\pi} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \\ &\times \int_1^\infty \frac{\rho(s) ds}{(1+2b_1s)^5} \left[ 4(2b_1s+1)(8b_1^2s^2+1) \ln(2b_1s+1) + \right. \\ &\left. + 2b_1s(8b_1s(2b_1s(2b_1s+3)+1)+11)+3 \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Наконец, третье слагаемое из (25) дает во втором порядке поправку на отдачу, которую мы, как и (32), (33), (36), (37), представим в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \Delta E_3^{B, vp}(1S) &= -\frac{\mu^3\alpha(Z\alpha)^4}{3\pi m_1 m_2} \int_1^\infty \frac{\rho(s) ds}{(1+b_1s)^3} \times \\ &\times \left[ 5b_1s + 4(b_1s+1) \ln(b_1s+1) + 3 \right], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_3^{B, vp}(2S) &= -\frac{\mu^3\alpha(Z\alpha)^4}{48\pi m_1 m_2} \int_1^\infty \frac{\rho(s) ds}{(1+2b_1s)^5} \times \\ &\times \left[ 2b_1s(88b_1^2s^2+12b_1s+29) + \right. \\ &\left. + 16(2b_1s+1)(8b_1^2s^2+1) \ln(2b_1s+1) + 9 \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Численные значения вкладов на рис. 5 показаны в нескольких строках 10, 11, 12 в табл. 1, 2. Поскольку вклад взаимодействия на рис. 5б имеет порядок  $\alpha^2(Z\alpha)^2$ , добавление одной петли поляризации вакуума (ПВ) оставляет такую поправку потенциально важной. Вклад трехпетлевой ПВ во втором порядке ТВ показан на рис. 6 (все потенциалы возмущения представляют собой поправки ПВ к кулоновскому потенциалу). Опустим детали расчета этого вклада (см. [18]), так как они аналогичны расчету амплитуды на рис. 5в, его численное значение представлено в табл. 1, 2 (строки 13).

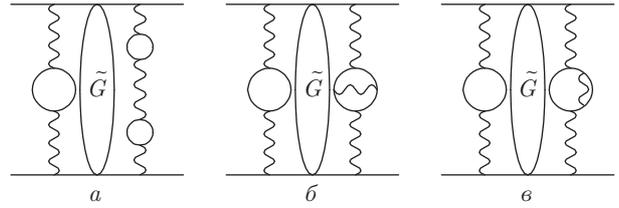


Рис. 6. Поправки трехпетлевой поляризации вакуума во втором порядке ТВ.  $\tilde{G}$  — редуцированная кулоновская функция Грина

Вклад трехпетлевой поляризации вакуума в третьем порядке ТВ показан на рис. 4в. В аналитическом виде он определяется суммой двух слагаемых [47]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{nS} &= \langle \psi_{nS} | \Delta V^C \tilde{G} \Delta V^C \tilde{G} \Delta V^C | \psi_{nS} \rangle - \\ &- \langle \psi_{nS} | \Delta V^C | \psi_{nS} \rangle \langle \psi_{nS} | \Delta V^C \tilde{G} \tilde{G} \Delta V^C | \psi_{nS} \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

Наиболее удобными для представления поправок данного типа являются следующие общие интегральные выражения (индекс «topt» обозначает третий порядок ТВ):

$$\begin{aligned} \Delta E_{topt,1}(1S) &= -\frac{16\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-y(1+b_1\zeta)} f_{1S}(a_1, y) f_{1S}(a_3, y), \\ a_1 &= 1 + b_1\xi, \quad a_3 = 1 + b_1\eta, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{topt,2}(1S) &= \Delta E_{vp}(1S) \frac{8\alpha^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty f_{1S}(a_1, y) f_{1S}(a_3, y) dy, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{topt,1}(2S) &= -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{864\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-y(1+2b_1\zeta)} \times \\ &\times f_{2S}(c_1, y) f_{2S}(c_3, y), \\ c_1 &= 1 + 2b_1\xi, \quad c_3 = 1 + 2b_1\eta, \end{aligned} \quad (43)$$

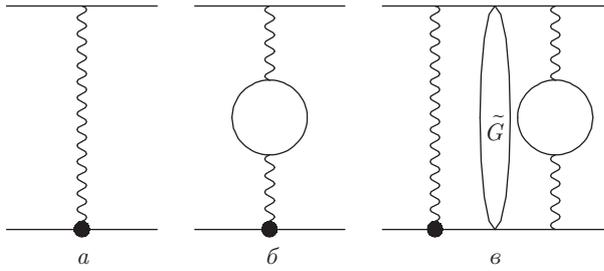


Рис. 7. Поправки на структуру ядра и поляризацию вакуума в первом порядке ТВ (ППТВ) и втором порядке ТВ (ВПТВ). Жирная точка на диаграмме обозначает вершинный оператор ядра

$$\Delta E_{\text{topt},2}(2S) = \Delta E_{\text{vp}}(2S) \frac{\alpha^2}{288\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty f_{2S}(c_1, y) f_{2S}(c_3, y) dy, \quad (44)$$

$$f_{1S} = \frac{e^{-a_1 y}}{2(a_1 - 1)a_1^2 y} \left[ -(a_1 - 1)a_1 y e^{a_1 y} \left( a_1(y + 2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times Ei(-a_1 y) - (a_1 y + 7)Ei(y - a_1 y) + \right. \right. \\ \left. \left. + (a_1 y + 7) \ln(a_1 - 1) - a_1 y \ln a_1 + 2 \ln \frac{y}{a_1} \right) + \right. \\ \left. + a_1(a_1 e^{y y} - a_1 y + e^{a_1 y}(a_1(2 - 2\gamma y) + \right. \\ \left. + 2\gamma y + y - 2) - 2a_1 + e^y - 2e^y y + y + 1) - e^y + 1 \right],$$

$$f_{2S} = \frac{e^{-c_1 y}}{c_1^5} \left[ e^{c_1 y} (2c_1^3(y(4\gamma(y - 2) + (y - 13)y + \right. \\ \left. + 6) + 4) - 4c_1^2(y(4\gamma(y - 2) + (y - 15)y + 10) + 4) + \right. \\ \left. + 4(2(c_1 - 2)c_1 + 3)c_1(y - 2)y(-Ei(y - c_1 y) + \right. \\ \left. + \ln(c_1 - 1) - \ln c_1 + \ln y) + c_1(y(12\gamma(y - 2) + \right. \\ \left. + y(3y - 53) + 46) + 12) + 12(y - 2)y) + \right. \\ \left. + 4c_1 e^y (c_1(c_1(y - 2) - y + 4) + 3(y - 1)) \right],$$

где  $\Delta E_{\text{vp}}(1S)$ ,  $\Delta E_{\text{vp}}(2S)$  определяются (5), (6). Несмотря на остающиеся многочисленные интегралы, численное интегрирование в (41)–(44) выполняется с хорошей точностью.

#### 4. ПОПРАВКИ НА СТРУКТУРУ ЯДРА И ПОЛЯРИЗАЦИЮ ВАКУУМА

Уменьшение величины боровского радиуса орбит в мюонных атомах по сравнению с электронными приводит к тому, что волновая функция мюона сильно перекрывается с областью ядра. Разлагая

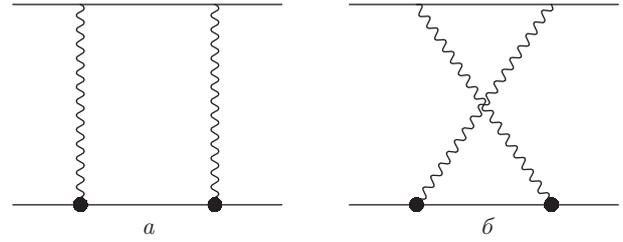


Рис. 8. Поправки на структуру ядра порядка  $(Z\alpha)^5$ . Жирная точка на диаграмме обозначает вершинный оператор ядра

зарядовый формфактор ядра при малых передачах импульса, получим, что в лидирующем порядке эффект структуры ядра определяется в спектре энергии следующей поправкой, пропорциональной квадрату зарядового радиуса  $r_N^2$  [11] (см. рис. 7a) (индекс «str» обозначает здесь и ниже поправку на структуру ядра):

$$\Delta E_{\text{str}}(2S-1S) = -\frac{7\mu^3(Z\alpha)^4}{12} \langle r_N^2 \rangle = \begin{cases} -36.382165 r_p^2 \text{ мЭВ}, & (\mu p), \\ -42.512306 r_d^2 \text{ мЭВ}, & (\mu d), \\ -44.854681 r_t^2 \text{ мЭВ}, & (\mu t), \\ -717.660184 r_{\text{He-3}}^2 \text{ мЭВ}, & (\mu^3\text{He})^+, \\ -737.256053 r_{\text{He-4}}^2 \text{ мЭВ}, & (\mu^4\text{He})^+, \end{cases} \quad (45)$$

где мы выделили коэффициент при  $r_N^2$ , а само значение зарядового радиуса берется в фм. Для последующей численной оценки вкладов (45) использовались следующие значения зарядовых радиусов ядер:  $r_p = 0.84087$  фм,  $r_d = 2.12562$  фм,  $r_t = 1.7591$  фм,  $r_{\text{He-3}} = 1.9661$  фм,  $r_{\text{He-4}} = 1.6755$  фм [1,3,48]. Следующей по значимости является поправка на структуру ядра порядка  $(Z\alpha)^5$  из двухфотонных обменных амплитуд (см. рис. 8), которая выражается в терминах электромагнитных формфакторов ядра. Пренебрегая относительными импульсами частиц в начальном и конечном состояниях, можно представить этот вклад в сдвиг  $S$ -уровней в интегральном виде в случае ядер со спином 1/2, для которых вершинный оператор выражается в терминах дираковского  $F_1$  и паулиевского  $F_2$  формфакторов:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str}^{2\gamma}(nS) &= -\frac{\mu^3(Z\alpha)^5}{\pi n^3} \delta_{l0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V_{2\gamma}(k), \\ V_{2\gamma}(k) &= \frac{2(F_1^2 - 1)}{m_1 m_2} + \\ &+ \frac{8m_1[F_2(0) + 4m_2^2 F_1'(0)]}{m_2(m_1 + m_2)k} + \\ &+ \frac{k^2}{2m_1^3 m_2^3} [2(F_1^2 - 1)(m_1^2 + m_2^2) + \\ &+ 4F_1 F_2 m_1^2 + 3F_2^2 m_1^2] + \frac{\sqrt{k^2 + 4m_1^2}}{2m_1^3 m_2(m_1^2 - m_2^2)k} \times \\ &\times \left\{ k^2 [2(F_1^2 - 1)m_2^2 + 4F_1 F_2 m_1^2 + 3F_2^2 m_1^2] - \right. \\ &\quad \left. - 8m_1^4 F_1 F_2 + \frac{16m_1^4 m_2^2 (F_1^2 - 1)}{k^2} \right\} - \\ &- \frac{\sqrt{k^2 + 4m_2^2} m_1}{2m_2^3 (m_1^2 - m_2^2)k} \left\{ k^2 [2(F_1^2 - 1) + 4F_1 F_2 + \right. \\ &\quad \left. + 3F_2^2] - 8m_2^2 F_1 F_2 + \frac{16m_2^4 (F_1^2 - 1)}{k^2} \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Аналогичные выражения можно получить и для ядер спина 0 и 1 [18, 49]. При численном интегрировании в (46) мы используем параметризацию [50] в случае мюонного водорода, параметризацию [51] для мюонного дейтерия и гауссову параметризацию для формфакторов тритона, гелиона и альфа-частицы [18].

Численный результат для поправки на структуру ядра из двухфотонных обменных амплитуд (46) показан в строках 18 в табл. 1, 2. Погрешность расчета этого вклада оценивается в 1%, поэтому результат приведен с точностью до двух десятичных знаков. Величина этой поправки в ионах мюонного гелия значительно возрастает по сравнению с поправкой в мюонном водороде. Это связано как с ростом заряда ядра  $Z$ , так и с увеличением размера ядра.

Вклады пятого порядка по  $\alpha$  дают также амплитуды взаимодействия частиц, содержащие эффекты как структуры ядра, так и поляризации вакуума (см. рис. 7). Оператор взаимодействия частиц в координатном представлении, соответствующий диаграмме рис. 7б имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta V_{str}^{vp}(r) &= \frac{2}{3} \pi Z \alpha \langle r_N^2 \rangle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{\pi r} e^{-2m_e \xi r} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

С помощью выражения (47) можно выполнить аналитическое интегрирование по всем переменным

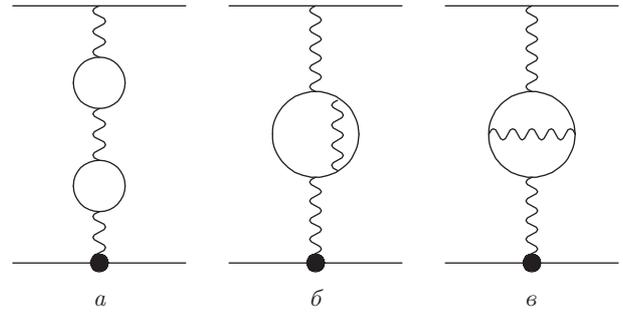


Рис. 9. Эффекты структуры ядра и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии. Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор ядра

при расчете матричных элементов. Для 1S- и 2S-состояний сдвиги уровней энергии равны

$$\begin{aligned} \Delta E_{str}^{vp}(1S) &= \frac{2\alpha(Z\alpha)^4 r_N^2 \mu^3}{27\pi \sqrt{1 - b_1^2}} \left[ (6b_1^4 - 3b_1^2 + 6) \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{\sqrt{1 - b_1^2} + 1}{b_1} + \sqrt{1 - b_1^2} (-3\pi b_1^3 + 6b_1^2 + 1) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str}^{vp}(2S) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 r_N^2 \mu^3}{216\pi (4b_1^2 - 1)^{5/2}} \left\{ \sqrt{4b_1^2 - 1} \times \right. \\ &\quad \times [2(8b_1 (48b_1^3 - 3\pi (1 - 4b_1^2)^2 - 22b_1) - 29)b_1^2 + 11] + \\ &\quad \left. + 12i (256b_1^8 - 160b_1^6 + 66b_1^4 - 10b_1^2 + 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \left( \frac{-2ib_1 (4b_1^2 - 1)^{1/2}}{4b_1^2 - i\sqrt{4b_1^2 - 1} - 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Вклад в спектр энергии такого же порядка  $\alpha(Z\alpha)^4$  определяется теми же эффектами во втором порядке теории возмущений (см. рис. 7в) следующими интегральными выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,sopt}^{vp}(1S) &= \frac{2\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 \langle r_N^2 \rangle}{9\pi} \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{(b_1 \xi + 1)^3} \times \\ &\times [2b_1^2 \xi^2 - 7b_1 \xi - 2(b_1 \xi + 1) \ln(b_1 \xi + 1) - 3], \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,sopt}^{vp}(2S) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 \langle r_N^2 \rangle}{36\pi} \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{(2b_1 \xi + 1)^5} \times \\ &\times [64b_1^4 \xi^4 + 96b_1^3 \xi^3 + 16b_1^2 \xi^2 + 4(16b_1^3 \xi^3 + \\ &+ 8b_1^2 \xi^2 + 2b_1 \xi + 1) \ln(2b_1 \xi + 1) + 22b_1 \xi + 3]. \end{aligned} \quad (51)$$

В табл. 1, 2 в строках 16 приведены суммарные вклады (48) и (50), (49) и (51). Поскольку (48)–(51)

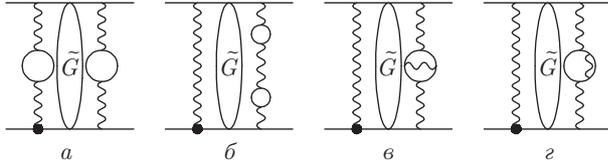


Рис. 10. Эффекты структуры ядра и двухпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений. Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор ядра.  $\tilde{G}$  — редуцированная кулоновская функция Грина

содержат в виде множителя  $r_N^2$  и численно велики, они могут быть объединены с (45) для увеличения точности извлечения зарядового радиуса ядер при наличии экспериментальных данных. Поправки двухпетлевой поляризации вакуума с учетом структуры ядра вычислены в такой же последовательности. В однофотонном взаимодействии они показаны на рис. 9. Соответствующие этим амплитудам операторы взаимодействия частиц построены в интегральной форме:

$$\Delta V_{str}^{vp-vp}(r) = \frac{2}{3} Z\alpha \langle r_N^2 \rangle \left( \frac{\alpha}{3\pi} \right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left[ \pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{r(\xi^2 - \eta^2)} \times (\xi^4 e^{-2m_e \xi r} - \eta^4 e^{-2m_e \eta r}) \right], \quad (52)$$

$$\Delta V_{str}^{2-loop vp}(r) = \frac{4}{9} Z\alpha \langle r_N^2 \rangle \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \left[ \pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{r(1-v^2)} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right]. \quad (53)$$

Во втором порядке ТВ вклады двухпетлевой поляризации вакуума с эффектом структуры ядра порядка  $\alpha^2(Z\alpha)^4$  показаны на рис. 10. При вычислении вклада на рис. 10а его удобно разбить на две части при интегрировании по координатам частиц в соответствии с двумя слагаемыми потенциала (47). Каждое из них при интегрировании по спектральным параметрам расходится, но их сумма является конечной и определяется следующими выражениями:

$$\Delta E_{str,sopt}^{vp,vp}(1S) = \frac{2\alpha^2(Z\alpha)^4 \mu^3 r_N^2}{27\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{f_{1S}(p_1, p_2)}{(1+p_1)^3(1+p_2)^3(1+p_1+p_2)}, \quad (54)$$

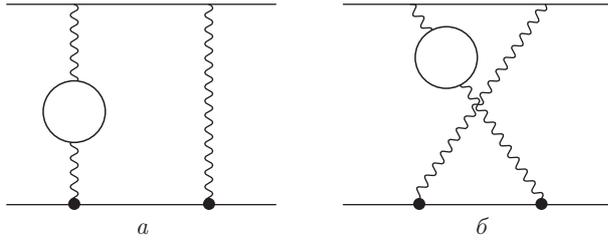
$$\Delta E_{str,sopt}^{vp,vp}(2S) = \frac{\alpha^2(Z\alpha)^4 \mu^3 r_N^2}{216\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{f_{2S}(p_1, p_2)}{(1+p_1)^5(1+p_2)^5(1+p_1+p_2)^3}, \quad (55)$$

$$f_{1S}(p_1, p_2) = 2p_1^3(p_2+1)^3 + p_1^2(p_2(8p_2^2+30p_2+29)+9) - 2(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+1) \times (p_2^2(\ln(p_2+1) - \ln(p_1+p_2+1)) + (-2p_2-1) \times \ln(p_1+1) + p_1(p_2(p_2(18p_2+47)+37)+10) + (p_2(8p_2+9)+3)(p_2+1), \quad p_1 = \frac{m_e}{W}\xi, \quad p_2 = \frac{m_e}{W}\eta,$$

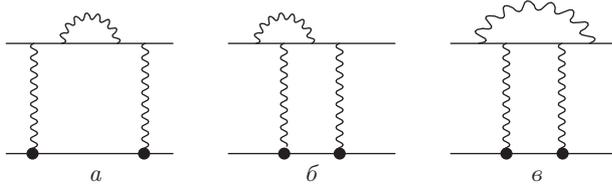
$$f_{2S}(p_1, p_2) = 8p_1^7(p_2+1)^5 + 2p_1^6(p_2(p_2(p_2 \times (4p_2(2p_2(p_2+9)+59)+349)+297)+132)+24) + 2p_1^5(p_2(p_2(p_2(p_2(4p_2(p_2(p_2+20)+111)+967)+1143)+824)+320)+52) + p_1^4(p_2(p_2(p_2(2p_2(2p_2(p_2 \times (14p_2+163)+540)+1777)+3581)+2299)+822)+126) + p_1^3(p_2(p_2(p_2(p_2(4p_2(5p_2(8p_2+47)+599)+3567)+3483)+2210)+786)+120) + 4(p_1+1)(2p_1^2+1) \times (p_2+1)(p_1+p_2+1)^3((2p_2^2+1)p_2^2 \times (\ln(p_1+p_2+1) - \ln(p_2+1)) + (p_2(p_2(8p_2+11)+8)+2) \times \ln(p_1+1)) + p_1^2(p_2+1)(p_2(p_2(p_2(4p_2(26p_2+151)+1365)+1701)+1322)+542)+92) + p_1(p_2+1)^2 \times (p_2(p_2(p_2(5p_2(24p_2+83)+579)+502)+222)+40) + (p_2+1)^3(p_2(p_2(p_2(32p_2+55)+59)+30)+6).$$

Другие поправки на рис. 10б,в,г вычисляются аналогично и их сумма представлена в табл. 1, 2 (строки 17). Явный вид функций  $f_{1S}$ ,  $f_{2S}$  приведен здесь для того, чтобы показать общую структуру выражений перед интегрированием по спектральным параметрам. Для поправок высокого порядка по  $\alpha$  такие подынтегральные функции становятся весьма громоздкими.

Мы также учитываем в нашем расчете комбинацию поправку шестого порядка по  $\alpha$  на структуру ядра и поляризацию вакуума, которая возникает в двухфотонных обменных амплитудах в



**Рис. 11.** Эффекты структуры ядра и поляризации вакуума в двухфотонных обменных диаграммах. Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор ядра



**Рис. 12.** Двухфотонные обменные амплитуды с радиационными поправками в мюонную линию, дающие вклад порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$ . Жирной точкой на диаграмме показан вершинный оператор ядра

результате модификации пропагатора фотона (см. рис. 11). Соответствующий оператор взаимодействия частиц отличается от  $V_{2\gamma}(k)$  из (46) дополнительным функциональным множителем. Интегральное выражение для поправки данного типа имеет вид [17, 29, 45]

$$\Delta E_{str, vp}^{2\gamma}(nS) = -\frac{2\mu^3\alpha(Z\alpha)^5}{3\pi^2n^3} \times \int_0^\infty \frac{V_{2\gamma}(k)F_{vp}(k) dk}{k^2}, \quad (56)$$

$$F_{vp}(k) = -5k^3 + 6(k^2 - 2m_e^2)\sqrt{k^2 + 4m_e^2} \times \text{th}^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 4m_e^2}}\right) + 12km_e^2,$$

а ее численное значение для интервала (1S–2S) приведено в табл. 1, 2 (строки 19). Другие радиационные поправки в мюонную линию (собственно-энергетическая поправка (СЭ), вершинная поправка и поправка с охватывающим фотоном) со структурой ядра того же порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$  определяются амплитудами на рис. 12. Их вычисление выполнено для S-состояний в легких мюонных атомах в [52], а результаты для сдвига (2S–1S) включены в табл. 1, 2 (см. строки 20).

### 5. ПОПРАВКИ НА ОТДАЧУ, СОБСТВЕННУЮ ЭНЕРГИЮ МЮОНА И ПОЛЯРИЗАЦИЮ ВАКУУМА

До сих пор мы рассматривали поправки различного порядка в интервале (1S–2S), которые являются специфичными для каждого мюонного атома. Такие вклады были получены либо в аналитическом виде, либо в виде интегральных выражений и рассчитаны численно. В них нельзя использовать разложение по характерному параметру  $m_e/\mu Z\alpha$ , так как он недостаточно мал для этого. Но есть также другой набор вкладов, которые известны в аналитическом виде и были получены при исследовании тонкой структуры спектра атома водорода [11]. Их можно использовать для численной оценки вкладов в случае мюонных атомов. Остановимся кратко на таких основных поправках [11, 19].

Имеется группа поправок на отдачу (используется индекс «гес») различного порядка по  $Z\alpha$ , полученных в случае точечного ядра. Вклад на отдачу порядка  $(Z\alpha)^4 m_1^2/m_2^2$  возникает при вычислении матричных элементов потенциала Брейта. Для ядер спина 1/2 такие поправки учтены в исходной формуле (3). Для ядер целого спина необходимо ввести следующую поправку:

$$\Delta E_{rec}^{(Z\alpha)^4}(2S - 1S) = \frac{7\mu^3(Z\alpha)^4}{16m_2^2}(1 - \delta_I). \quad (57)$$

Поправка на отдачу порядка по  $(Z\alpha)^5 m_1/m_2$  для S-состояний определяется двухфотонными амплитудами, в которых ядро рассматривается как точечная частица [11, 53]:

$$\Delta E_{rec}^{(Z\alpha)^5} = \frac{\mu^3(Z\alpha)^5}{m_1 m_2 \pi n^3} \left[ \frac{2}{3} \ln \frac{1}{Z\alpha} - \frac{8}{3} \ln k_0(n, 0) - \frac{1}{9} - \frac{7}{3} a_n - \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \left( m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} - m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} \right) \right], \quad (58)$$

где  $\ln k_0(n, 0)$  – логарифм Бете, который имеет следующие значения для 1S-, 2S-состояний [11]:

$$\begin{aligned} \ln k_0(1S) &= 2.984128555765498, \\ \ln k_0(2S) &= 2.811769893120563, \end{aligned} \quad (59)$$

$$a_n = -2 \left[ \ln \frac{2}{n} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 1 - \frac{1}{2n} \right]. \quad (60)$$

Поправка на отдачу порядка  $(Z\alpha)^6 m_1/m_2$  исследовалась во многих работах [54–57], а в работе [58] вычислены поправки на отдачу более высокого порядка. Поскольку в нашей работе мы ограничились вкладами на отдачу шестого порядка по  $Z\alpha$ , для

получения численной оценки используем следующее выражение (см. [11]):

$$\Delta E_{rec}^{(Z\alpha)^6} (2S-1S) = \frac{7(Z\alpha)^6 m_1^2}{8m_2} \left( \frac{7}{2} - 4 \ln 2 \right). \quad (61)$$

Для энергетических вкладов, полученных из амплитуд с радиационными поправками в мюонную линию (se), из дираковского и паулиевского формфакторов (ff) мюона существует компактное аналитическое представление [11]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{se,ff}(nS) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{\pi n^3 m_1^2} \times \\ &\times \left( \frac{4}{3} \ln \frac{m_1}{\mu(Z\alpha)^2} - \frac{4}{3} \ln k_0(n, 0) + \frac{10}{9} + \right. \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \left( -\frac{9}{4} \zeta(3) + \frac{3}{2} \pi^2 \ln 2 - \frac{10}{27} \pi^2 - \frac{2179}{648} \right) + \\ &\left. + 4\pi Z\alpha \left( \frac{427}{384} - \frac{\ln 2}{2} \right) \right). \quad (62) \end{aligned}$$

Обсуждение вкладов высших порядков по  $\alpha$  можно найти в [59] (см. также ссылки на другие статьи в этой работе).

Радиационные поправки с отдачей порядков  $\alpha(Z\alpha)^5$  и  $(Z^2\alpha)(Z\alpha)^4$  из табл. 9 [11] имеют следующий вид для  $nS$ -состояний:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rad-rec}(nS) &= \left( 6\zeta(3) - 2\pi^2 \ln 2 + \frac{3}{4}\pi^2 - 14 \right) \times \\ &\times \frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{m_1 m_2 n^3} + \frac{\alpha(Z\alpha)^5 m_1^2}{m_2 n^3 \pi^2} \left( \frac{2\pi^2}{9} - \frac{70}{27} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{3} \ln \frac{\Lambda(Z\alpha)^{-2}}{\mu} + \frac{11}{72} - \frac{1}{24} - \frac{7\pi}{32} \frac{\Lambda^2}{4m_2^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \left( \frac{\Lambda^2}{4m_2^2} \right)^2 - \frac{1}{3} \ln k_0(n, 0) \right) \frac{4(Z^2\alpha)(Z\alpha)^4 \mu^3}{\pi m_2^2 n^3}. \quad (63) \end{aligned}$$

Формулы (62) и (63) дают вклады в сдвиг  $(2S-1S)$  (параметр  $\Lambda = \sqrt{12/r_N^2}$ ), которые показаны в табл. 1, 2 строками 24, 25.

Поправка на структуру ядра в спектре энергии порядка  $(Z\alpha)^6$ , которая исследовалась в работе [60] для мюонного водородоподобного атома с различными параметризациями для формфакторов ядра, была представлена в виде

$$\Delta E_{str}^{(Z\alpha)^6}(nS) = \frac{2\mu(Z\alpha)^6}{3n^3} [\mu^2 F_{rel} + \mu^4 F_{nr}], \quad (64)$$

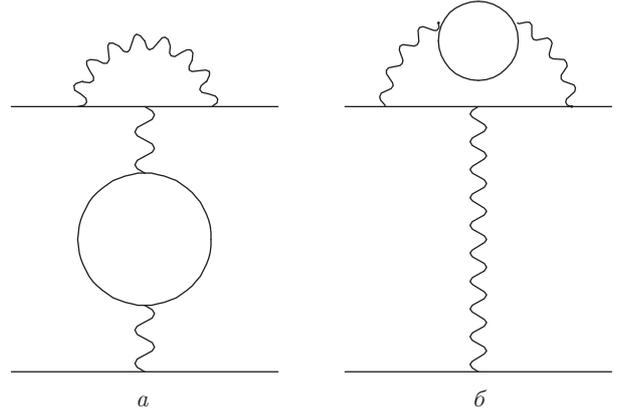


Рис. 13. Радиационные поправки с эффектами поляризации вакуума

$$\begin{aligned} F_{rel} &= -\langle r^2 \rangle \left[ \psi(n) + 2\gamma + \frac{9}{4n^2} - \frac{1}{n} - \frac{13}{4} + \right. \\ &+ \left. \left\langle \ln \frac{2Wr}{n} \right\rangle \right] - \frac{1}{3} \langle r^3 \rangle \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + I_2^{rel} + I_3^{rel}, \quad (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{nr} &= \frac{2\langle r^2 \rangle}{3} \left[ \langle r^2 \rangle \left( \psi(n) + 2\gamma - \frac{1}{n} - \frac{4}{3} \right) + \right. \\ &+ \left. \left\langle r^2 \ln \frac{2Wr}{n} \right\rangle \right] + \frac{\langle r^4 \rangle}{10n^2} + \langle r^3 \rangle \langle r \rangle + \langle r^5 \rangle \times \\ &\times \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + I_2^{nr} + I_3^{nr}, \quad (66) \end{aligned}$$

где величины  $I_{2,3}^{rel}, I_{2,3}^{nr}$ , а также моменты плотности распределения заряда выписаны явно в [60] для различных параметризаций. На основе полученных в [60] выражений можно дать оценку вкладов в сдвиг  $(2S-1S)$  для мюонных атомов (строки 27 табл. 1, 2).

Еще один вклад шестого порядка по  $\alpha$  в сдвиг  $(2S-1S)$  (см. рис. 13б) выражается в терминах наклона дираковского формфактора  $F_1'(0)$  и паулиевского формфактора  $F_2(0)$  [11], которые вычислены аналитически в [61]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rad+vp} &= -\frac{7\alpha^2(Z\alpha)^4 \mu^3}{8\pi^2 m_1^2} \left[ \frac{3m_e^2}{m_1^2} - \right. \\ &- \frac{4m_e^2 \ln(m_1/m_e)}{m_1^2} + \frac{\pi^2 m_e}{4m_1} + \frac{4}{9} \ln^2 \frac{m_1}{m_e} - \\ &\left. - \frac{20}{27} \ln \frac{m_1}{m_e} + \frac{2\pi^2}{27} + \frac{85}{162} \right]. \quad (67) \end{aligned}$$

Для оценки вклада собственной энергии мюона (mse) с учетом поляризации вакуума в работе [19] было получено в логарифмическом приближении следующее выражение:

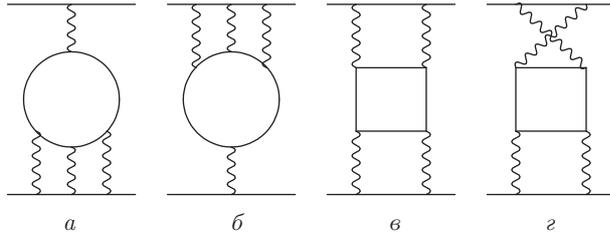


Рис. 14. Амплитуды рассеяния света на свете

$$\Delta E_{mse}^{vp}(n) = \frac{\alpha}{3\pi m_1^2} \ln \frac{m_1}{\mu(Z\alpha)^2} \left[ \langle \psi_n | \Delta \cdot \Delta V_{vp}^C | \psi_n \rangle + 2 \langle \psi_n | \Delta V_{vp}^C \tilde{G} \Delta \left( -\frac{Z\alpha}{r} \right) | \psi_n \rangle \right]. \quad (68)$$

Полагая, как при вычислении релятивистских поправок,  $\mathbf{p}^2 = 2\mu(H + Z\alpha/r)$  и вычисляя многочисленные матричные элементы в (68), получим поправку в интервале большой структуры ( $2S-1S$ ) (строки 29 табл. 1, 2).

Учитывая точность расчета, мы включили в полный результат для сдвига ( $2S-1S$ ) вклад адронной поляризации вакуума ( $hvp$ ), который исследовался в работах [62–64] в случае мюонного водорода. Численные значения вкладов адронной ПВ для мюонных атомов можно найти, используя полученный результат для мюонного водорода, по формуле  $\Delta E_{hvp} = \Delta E_{hvp}(\mu p) \mu^3 Z^4 / \mu_{\mu p}^3$ .

На рис. 14 представлены четыре амплитуды рассеяния света на свете. Амплитуда рис. 14а обозначает вклад, известный как поправка Вихмана–Кролла (см. аппроксимационный потенциал в [11]). Он показан в табл. 1, 2 в строках 4. В работах [65,66] было показано, что вклад амплитуды на рис. 14 отличается от вклада Вихмана–Кролла фактором  $1/Z^2$ . Потенциал взаимодействий на рис. 14в,з был получен в [65] с помощью аппроксимации Паде в удобной форме для расчетов поправок в спектре энергии (коэффициенты  $s_i, t_i$  выписаны в [65]) (индекс «ll» соответствует сокращению light-by-light):

$$\Delta V^{ll}(r) = -\frac{\alpha^2(Z\alpha)^2}{r} \times \frac{s_0 + s_1x + s_2x^2}{t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + t_4x^4 + t_5x^5}, \quad x = m_e r. \quad (69)$$

Численные значения соответствующей поправки (см. в табл. 1, 2 строки 5, в которых выписан суммарный вклад амплитуд на рис. 14б,в,з) важны для уточнения полных результатов.

Имеется еще один эффект рассеяния света на свете, который приводит к возникновению эффективного одномезонного взаимодействия между мю-

оном и протоном. Исследования такого механизма в [67] показали, что в мюонном водороде обмен скалярным мезоном дает значительный сдвиг  $S$ -уровней энергии  $\Delta E(2S-1S) = -0.0960$  мэВ. Поэтому он тоже был включен в итоговую таблицу только для мюонного водорода.

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продолжены наши исследования [17, 18, 24, 58] низколежащих уровней энергии мюонного водорода и гелия, которые интенсивно изучаются в настоящее время экспериментально. В качестве энергетического интервала для прецизионного расчета был выбран переход ( $2S-1S$ ), точность измерения которого в случае электронных систем является беспрецедентно высокой. Нами выполнен расчет энергетического сдвига ( $2S-1S$ ) с учетом поправок пятого и шестого порядков по альфа и с учетом эффектов отдачи и структуры ядра. Были проанализированы различные потенциально важные взаимодействия в мюонных атомах и вычислен их вклад в структуру  $S$ -состояний в рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике.

В последние годы разными группами был выполнен расчет новых поправок в тонкой и сверхтонкой структуре спектра мюонных атомов, в том числе и для  $S$ -уровней энергии. Поскольку число таких работ значительно, ссылки на многие другие работы можно найти в обзорных работах [3, 4, 30]. Хотя в этих работах и не вычислялся непосредственно интервал большой структуры ( $2S-1S$ ), некоторое сравнение с полученными ранее результатами можно провести. Большая часть вычисленных нами поправок на поляризацию вакуума (поправки Улинга, Челлена–Сабри, Вихмана–Кролла) хорошо согласуется с предыдущими расчетами [2, 4, 20, 27, 28], но в данной работе эти поправки представлены не в суммарном виде, а более детально. Наши расчеты трехпетлевых эффектов ПВ в однофотонном взаимодействии основаны на интерполяционной формуле Киношиты–Нио (восемь диаграмм на рис. 2), по которой получается известный результат для лэмбовского сдвига из [37]. Для интервала ( $2S-1S$ ) этот вклад получен впервые, как и вклад трехпетлевого поляризационного оператора с двумя фермионными циклами на рис. 3, полученный на основе аналитической формулы для поляризационного оператора из [43, 44]. Нами детально проработан расчет комбини-

Таблица 1. Поправки в интервале большой структуры ( $2S-1S$ ) мюонного водорода

№	Вклад в сдвиг ( $2S-1S$ )	$(\mu p)$ , мэВ	$(\mu d)$ , мэВ	$(\mu t)$ , мэВ
1	Поправка тонкой структуры (3)	1896396.0189	1997426.3960	2033457.2306
2	Поправка ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^2$	1679.2457	1883.9532	1959.6265
3	Вклад мюонной ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.1170	0.1366	0.1441
4	Поправка Вихмана – Кролла	-0.0102	-0.0112	-0.0116
5	Поправка рассеяния света на свете	0.0039	0.0042	0.0043
6	Вклад двухпетлевой ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	12.8421	14.3594	14.9190
7	Вклад трехпетлевой ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.0246	0.0290	0.0306
8	Релятивистские поправки с учетом однопетлевой ПВ в ППТВ	-0.1637	-0.2141	-0.2356
9	Релятивистские поправки с учетом двухпетлевой ПВ в ППТВ	-0.0009	-0.0010	-0.0011
10	Релятивистские поправки с учетом однопетлевой ПВ в ВПТВ	0.2900	0.3560	0.3802
11	Релятивистские поправки с учетом двухпетлевой ПВ в ВПТВ	-0.0012	-0.0007	-0.0016
12	Поправка двухпетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	1.8810	2.1924	2.3101
13	Поправка трехпетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.0277	0.0322	0.0339
14	Поправка трехпетлевой ПВ в третьем порядке ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.0029	0.0037	0.0039
15	Поправка на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^4$	$-25.72 \pm 0.04$	$-192.08 \pm 0.14$	$-138.80 \pm 5.79$
16	Поправка на структуру ядра с учетом однопетлевой ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	-0.1587	-1.2367	-0.9003
17	Поправка на структуру ядра с учетом двухпетлевой ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$	-0.0015	-0.0128	-0.0094
18	Поправки на структуру ядра из $2\gamma$ -амплитуд порядка $(Z\alpha)^5$	0.15	2.57	1.75
19	Поправки на структуру ядра и ПВ в $2\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	0.0030	0.0455	0.0290
20	Радиационные поправки в мюонную линию со структурой ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	0.0032	0.0152	0.0137
21	Поправка на поляризуемость ядра	$0.10 \pm 0.02$	$8.70 \pm 0.08$	$3.33 \pm 0.10$
22	Поправка на отдачу $(Z\alpha)^4$	–	0.3529	–

Таблица 1. Продолжение

№	Вклад в сдвиг (2S–1S)	( $\mu p$ ), мэВ	( $\mu d$ ), мэВ	( $\mu t$ ), мэВ
23	Поправка на отдачу ( $Z\alpha$ ) <sup>5</sup>	–0.2986	–0.1769	–0.1252
24	Поправка на отдачу ( $Z\alpha$ ) <sup>6</sup>	0.0011	0.0006	0.0004
25	Вклад собственной энергии мюона и мюонных формфакторов	–4.6132	–5.3548	–5.6368
26	Радиационные поправки с отдачей порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ и поправки формфакторов ядра $Z^2\alpha(Z\alpha)^4$	–0.0657	–	–0.0081
27	Поправки на структуру ядра порядка ( $Z\alpha$ ) <sup>6</sup>	–0.0079	–0.0352	–0.0296
28	Вклад мюонных формфакторов $F_1'(0), F_2(0)$	–0.0102	–0.0119	–0.0126
29	Поправка на ПВ с мюонной СЭ	–0.0281	–0.0285	–0.0306
30	Вклад адронной ПВ	0.0756	0.0881	0.0930
31	Вклад одномезонного обмена	–0.0960	–	–
32	Суммарный вклад	1898059.6108	1999140.0712	2035294.0968

рованных поправок на поляризацию вакуума с релятивистскими эффектами, выписаны соответствующие потенциалы и матричные элементы в первом и втором порядках теории возмущений. Общие выражения для расчета эффектов трехпетлевой ПВ в третьем порядке теории возмущений согласуются с данными работ [27, 28], а сами численные результаты являются новыми, так же как и многочисленные поправки на структуру ядра и поляризацию вакуума в первом и втором порядках теории возмущений. Отметим, что для расчета эффектов рассеяния света на свете мы используем формулу для потенциала, полученную в работе [65]. Расчет поправок в разд. 5 основан на известных аналитических выражениях (см. [11]) и результаты представлены подробно в табл. 1, 2.

Вычисленные вклады представлены в работе в виде аналитических формул, интегральных выражений, которые могут быть проинтегрированы численно, а также в численном виде в табл. 1, 2. Большая часть результатов в табл. 1, 2 приведена с точностью до четырех десятичных знаков, так как погрешности в их определении за счет ошибок фундаментальных физических констант существенно меньше. Но есть вклады на структуру ядра и поляризуемость, которые определяются сильным взаимодействием и получены пока со значительной ошибкой. В последние годы был значительно улучшен расчет поправки на поляризуемость для легких ядер в [30, 68, 69], но теоретическая ошибка состав-

ляет до сих пор несколько процентов. Мы используем в наших оценках полного вклада результаты работы [30] (табл. 5, 6). При этом поправка Земаха вычислена нами независимо из двухфотонных обменных амплитуд (см. рис. 8), которые включают также эффекты отдачи. Самая большая ошибка в численных значениях таблиц связана с самой большой по величине поправкой на структуру ядра порядка ( $Z\alpha$ )<sup>4</sup>. Если сравнивать эту ошибку для отдельных мюонных атомов, то для мюонных водорода и дейтерия она оказывается существенно меньше, чем для мюонного трития или ионов мюонного гелия. Это связано с тем, что в результате экспериментов CREMA в последние годы численные значения зарядовых радиусов протона и дейтрона были получены с точностью, на порядок превосходящей точность предыдущих значений. Для ядер тритона, гелиона и альфа-частицы такого пока нет. Если не фиксировать численные значения поправок (45), то полные результаты из табл. 1–3 можно представить в виде

$$\Delta E^{tot}(2S-1S) = \begin{cases} 1898085.3308 - 36.382165 r_p^2 \text{ мэВ}, & (\mu p), \\ 19993321.5120 - 42.512306 r_d^2 \text{ мэВ}, & (\mu d), \\ 2035432.8968 - 44.854681 r_t^2 \text{ мэВ}, & (\mu t), \\ 8152683.2021 - 717.660184 r_{\text{He-3}}^2 \text{ мэВ}, & (\mu^3\text{He})^+, \\ 8224287.1535 - 737.256053 r_{\text{He-4}}^2 \text{ мэВ}, & (\mu^4\text{He})^+. \end{cases} \quad (70)$$

Таблица 2. Поправки в интервале большой структуры ( $2S-1S$ ) мюонного гелия

№	Вклад в сдвиг ( $2S-1S$ )	$(\mu \text{ } ^3\text{He})^+$ , мэВ	$(\mu \text{ } ^4\text{He})^+$ , мэВ
1	Поправка тонкой структуры (3)	8136106.6000	8207451.4111
2	Поправка ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^2$	16423.3926	16711.3167
3	Вклад мюонной ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	2.2862	2.3482
4	Поправка Вихмана – Кролла	-0.3026	-0.3069
5	Поправка рассеяния света на свете	0.1186	0.1201
6	Вклад двухпетлевой ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	120.3612	122.4258
7	Вклад трехпетлевой ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.3665	0.3741
8	Релятивистские поправки с учетом однопетлевой ПВ в ППТВ	-5.3654	-5.6216
9	Релятивистские поправки с учетом двухпетлевой ПВ в ППТВ	-0.0225	-0.0231
10	Релятивистские поправки с учетом однопетлевой ПВ в ВПТВ	9.3067	9.6191
11	Релятивистские поправки с учетом двухпетлевой ПВ в ВПТВ	0.1059	0.0659
12	Поправка двухпетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	29.6344	30.2930
13	Поправка трехпетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.4262	0.4356
14	Поправка трехпетлевой ПВ в третьем порядке ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.0895	0.0921
15	Поправка на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^4$	$-2774.15 \pm 8.47$	$-2069.70 \pm 6.92$
16	Поправка на структуру ядра с учетом однопетлевой ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	-27.8566	-20.8906
17	Поправка на структуру ядра с учетом двухпетлевой ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$	-0.3746	-0.2859
18	Поправки на структуру ядра из $2\gamma$ -амплитуд порядка $(Z\alpha)^5$	71.96	46.27
19	Поправки на структуру ядра и ПВ в $2\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	1.5498	0.8890
20	Радиационные поправки в мюонную линию со структурой ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	0.5345	0.4127
21	Поправка на поляризуемость ядра	$29.46 \pm 1.20$	$16.00 \pm 0.80$
22	Поправка на отдачу $(Z\alpha)^4$	-	1.5497

Таблица 2. Продолжение

№	Вклад в сдвиг (2S–1S)	( $\mu$ $^3_2\text{He}$ ) <sup>+</sup> , мэВ	( $\mu$ $^4_2\text{He}$ ) <sup>+</sup> , мэВ
23	Поправка на отдачу ( $Z\alpha$ ) <sup>5</sup>	–3.6710	–2.8499
24	Поправка на отдачу ( $Z\alpha$ ) <sup>6</sup>	0.0245	0.0184
25	Вклад собственной энергии мюона и мюонных формфакторов	–73.9788	–75.8915
26	Радиационные поправки с отдачей порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ и поправки формфакторов ядра $Z^2\alpha(Z\alpha)^4$	–0.4409	–
27	Поправки на структуру ядра порядка ( $Z\alpha$ ) <sup>6</sup>	–2.0282	–1.6686
28	Вклад мюонных формфакторов $F'_1(0), F_2(0)$	–0.2016	–0.2071
29	Поправка на ПВ с мюонной СЭ	–0.2597	–0.2708
30	Вклад адронной ПВ	1.4874	1.5280
31	Вклад одномезонного обмена	–	–
32	Суммарный вклад	8149909.0521	8222217.4535

Таблица 3. Изотопические сдвиги в мюонных водороде и гелии для интервала (2S–1S)

$\Delta E_{is}(\text{D-H})$	$101246.8204 - 42.512306 r_d^2 + 36.382165 r_p^2$
$\Delta E_{is}(\text{T-H})$	$137347.5660 - 44.854681 r_t^2 + 36.382165 r_p^2$
$\Delta E_{is}(\text{T-D})$	$36100.7456 - 44.854681 r_t^2 + 42.512306 r_d^2$
$\Delta E_{is}(\frac{4}{2}\text{He}-\frac{3}{2}\text{He})$	$71603.9514 - 737.256053 r_{\text{He-4}}^2 + 717.660184 r_{\text{He-3}}^2$

Таким образом, прецизионное измерение частоты перехода (2S–1S) может дать новые более точные значения зарядовых радиусов легких ядер из (70). Так, например, измерение сдвига (2S–1S) в мюонном водороде с относительной ошибкой 1–2 ppb позволит уменьшить погрешность в определении зарядового радиуса протона до 0.0001 фм.

Еще более точные значения зарядовых радиусов ядер можно получить, если рассмотреть изотопический сдвиг для интервала (2S–1S). Так, в случае мюонного гелия получим для изотопического сдвига следующее выражение (см. табл. 3):

$$\begin{aligned} \Delta E_{is}(\text{He}) &= [E(2S) - E(1S)]_{\text{He-4}} - \\ &- [E(2S) - E(1S)]_{\text{He-3}} = 71603.9514 - \\ &- \frac{7\mu_{\text{He-4}}^3(Z\alpha)^4}{12} r_{\text{He-4}}^2 + \frac{7\mu_{\text{He-3}}^3(Z\alpha)^4}{12} r_{\text{He-3}}^2. \end{aligned} \quad (71)$$

Заметим, что разность квадратов зарядовых радиусов ядер  $^3_2\text{He}$  и  $^4_2\text{He}$  1.074(3) фм<sup>2</sup>, полученная в [70], отличается на 4σ от результата 1.019(11) фм<sup>2</sup> в [71]. Численные значения  $r_{\text{He-3}}$  и  $r_{\text{He-4}}$ , используемые нами, таковы, что разность  $r_{\text{He-4}}^2 - r_{\text{He-3}}^2 = 1.058$  фм<sup>2</sup>. Для изотопического сдвига  $\Delta E_{is}(\text{He})$  теоретическая точность расчета повышается, так как происходит сокращение квантовоэлектродинамических поправок высокого порядка. Таким образом, высокоточное измерение изотопического сдвига позволяет получить из (71) соотношение, содержащее квадраты зарядовых радиусов протона, дейтрона, тритона или ядер гелия. Такие соотношения можно использовать для определения одного из зарядовых радиусов, если второй известен с высокой точностью, или для дополнительной проверки квантовой электродинамики. Определение зарядовых радиусов ядер разными способами имеет важное значение в том числе и для проверки используемых методов.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-12-00128) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-32-00023) (ФАМ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Antognini et al., *Science* **339**, 417 (2013).
2. A. Antognini, F. Kottmann, F. Biraben et al., *Ann. Phys.* **331**, 127 (2013).
3. R. Pohl et al., *Science* **353**, 669 (2016).
4. M. Diepold, B. Franke, J. J. Krauth et al., *Ann. Phys.* **396**, 220 (2018).
5. R. Pohl, *J. Phys. Soc. Japan* **85**, 091003 (2016).
6. A. E. Dorokhov et al., *Europhys. J. Web Conf.* **191**, 04001 (2018).
7. S. G. Karshenboim et al., *J. Phys. Chem. Ref. Data* **44**, 031202 (2015).
8. C. J. Parthey et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 203001 (2011).
9. C. J. Parthey et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 233001 (2010).
10. I. Fan et al., *Phys. Rev. A* **89**, 032513 (2014).
11. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.* **342**, 62 (2001); M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Theory of Light Hydrogenic Bound States*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York (2007).
12. P. Crivelli, *Hyperfine Interact.* **239**, 49 (2018).
13. M. Herrmann et al., *Phys. Rev. A* **79**, 052505 (2009).
14. R. K. Altmann et al., *Phys. Rev. Lett.* **117**, 173201 (2016).
15. S. Tomas et al., *Ann. Phys.* **531**(5), 1800363 (2019).
16. P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035009 (2016).
17. А. П. Мартыненко, *ЖЭТФ* **128**, 1169 (2005).
18. А. А. Крутов, А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **147**, 85 (2015).
19. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **54**, 1994 (1996).
20. E. Borie, *Ann. Phys.* **327**, 733 (2012).
21. J. L. Friar and G. L. Payne, *Phys. Rev. C* **72**, 014002 (2005).
22. C. E. Carlson, M. Gorchtein, and M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev. A* **89**, 022504 (2014).
23. C. Peset and A. Pineda, *JHEP* **1704**, 060 (2017).
24. R. N. Faustov et al., *Phys. Rev. A* **90**, 012520 (2014).
25. R. N. Faustov et al., *Phys. Lett. B* **733**, 354 (2014).
26. A. A. Krutov and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **84**, 052514 (2011).
27. E. Yu. Korzinin et al., *Phys. Rev. A* **97**, 012514 (2018).
28. S. G. Karshenboim et al., *Phys. Rev. A* **81**, 060501 (2010).
29. A. E. Dorokhov et al., *Phys. Rev. A* **98**, 042501 (2018).
30. C. Ji, S. Bacca, N. Barnea et al., *J. Phys. G* **45**, 093002 (2018).
31. B. Franke et al., *Eur. Phys. J. D* **71**, 341 (2017).
32. O. Tomalak, *Eur. Phys. J. C* **77**, 858 (2017).
33. R. N. Faustov et al., *Europhys. J. Web Conf.* **204**, 05005 (2019).
34. K. Pachucki and S. G. Karshenboim, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **28**, L22 (1995).
35. U. D. Jentschura, *Phys. Rev. A* **84**, 012505 (2011).
36. G. Källen and A. Sabry, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selesk.* **29**, No. 17, 1 (1955), in *Portrait of Gunnar Källen*, ed. by C. Jarlskog, Springer, Switzerland (2014), p. 555.
37. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3240 (1999).
38. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. D* **60**, 053008 (1999).
39. T. Kinoshita and W. B. Lindquist, *Phys. Rev. D* **27**, 853 (1983).
40. P. A. Baikov and D. J. Broadhurst, in *New Computing Techniques in Physics Research IV*, ed. by B. Denby and D. Perrei-Gallix, World Sci. Publ. Co., Singapore (1995), p. 167.
41. R. N. Faustov, A. L. Kataev, S. A. Larin, and V. V. Starshenko, *Phys. Lett. B* **254**, 241 (1991).
42. D. J. Broadhurst, A. L. Kataev, and O. V. Tarasov, *Phys. Lett. B* **298**, 445 (1993).

43. A. H. Hoang, J. H. Kühn, and T. Teubner, Nucl. Phys. B **452**, 173 (1995).
44. K. G. Chetyrkin et al., Phys. Lett. B **384**, 233 (1996).
45. A. P. Martynenko, Phys. Rev. A **76**, 012505 (2007).
46. H. F. Nameka, J. Chem. Phys. **47**, 2728 (1967).
47. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (2008).
48. I. Angeli and K. P. Marinova, Atom. Data Nucl. Data Tabl. **99**, 69 (2013).
49. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, Phys. Rev. A **67**, 052506 (2003).
50. J. J. Kelly, Phys. Rev. C **70**, 068202 (2004).
51. D. Abbott, A. Ahmidouch, H. Anklin et al., Eur. Phys. J. A **7**, 421 (2000).
52. R. N. Faustov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, and V. V. Sorokin, Phys. Lett. B **775**, 79 (2017).
53. J. R. Sapirstein and D. R. Yennie, in *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita, World Sci. Publ., Singapore (1990), p. 560.
54. M. I. Eides and H. Grotch, Phys. Rev. A **55**, 3351 (1997).
55. K. Pachucki and H. Grotch, Phys. Rev. A **51**, 1854 (1995).
56. В. М. Шабаев, ТМФ **63**, 394 (1985).
57. А. С. Елховский, ЖЭТФ **110**, 431 (1996).
58. V. A. Yerokhin and V. M. Shabaev, Phys. Rev. Lett. **115**, 233002 (2015).
59. V. A. Yerokhin and V. M. Shabaev, J. Phys. Chem. Ref. Data **44**, 033103 (2015).
60. J. L. Friar, Ann. Phys. **122**, 151 (1979).
61. R. Barbieri, M. Caffo, and E. Remiddi, Nuovo Cim. Lett. **7**, 60 (1973).
62. E. Borie, Z. Phys. A **302**, 187 (1981).
63. J. L. Friar, J. Martorell, and D. W. L. Sprung, Phys. Rev. A **59**, 4061 (1999).
64. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ЯФ **64**, 1358 (2001).
65. Е. Ю. Корзинин et al., Phys. Rev. A **98**, 062519 (2018).
66. С. Г. Каршенбойм, Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов, В. А. Шелюто, Письма в ЖЭТФ **92**, 9 (2010).
67. А. Е. Dorokhov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, and A. E. Radzhabov, Europhys. J. Web Conf. **204**, 05008 (2019).
68. K. Pachucki, Phys. Rev. Lett. **106**, 193007 (2011).
69. J. L. Friar, Phys. Rev. C **88**, 034003 (2013).
70. P. Cancio Pastor et al., Phys. Rev. Lett. **108**, 143001 (2012).
71. R. van Rooij et al., Science **333**, 196 (2011).