

ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА ОТКРЫТОЙ СТРУНЫ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ УГЛА ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. Джахан [a*], *И. Бревик* [b]

[a] *Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragheh (RIAAM), University of Maragheh P. O. Box: 55134-441, Maragheh, Iran*

[b] *Department of Energy and Process Engineering, Norwegian University of Science and Technology 7491, Trondheim, Norway*

Поступила в редакцию 17 апреля 2019 г.,
после переработки 9 мая 2019 г.
Принята к публикации 26 мая 2019 г.

(Перевод с английского)

CASIMIR ENERGY OF AN OPEN STRING WITH ANGLE-DEPENDENT BOUNDARY CONDITION

A. Jahan, I. Brevik

Рассмотрена открытая струна с концами, лежащими на двух разных твердых стержнях. Такая система эквивалентна двум скалярным полям с набором связей на концах. Энергия нулевых колебаний и энергия Казимира вычислены тремя разными способами: (1) с использованием дзета-функции Гурвица, (2) с использованием метода интегрирования по контуру на комплексной плоскости частот и (3) путем построения функции Грина системы. В случае интегрирования по контуру также получено выражение для энергии Казимира для конечной температуры, а также удобная аналитическая аппроксимация для высоких температур. Оказалось, что энергия Казимира при нулевой температуре представляет собой сумму потенциальной энергии Люшера и слагаемого, зависящего от угла между стержнями. Предложенная модель сравнивается с аналогичной моделью для открытой струны с зарядами на концах, движущейся в электромагнитнном поле.

DOI: 10.1134/S0044451019110075

1. ВВЕДЕНИЕ

Энергия Казимира является физическим проявлением энергии вакуума [1]. Она представляет собой чисто квантовое явление, благодаря которому, например, две параллельные проводяшие пластины притягиваются друг к другу. Исследованию энергии вакуума открытой и замкнутой струн в простейших случаях посвящены многие работы. В работах [2–4] была впервые вычислена энергия Казимира открытой струны, которая теперь носит название потенциала Люшера. Для его получения статическая система кварк–антикварк с хромоэлектрическим полем между ними рассматривалась как колеблющаяся струна. Энергия Казимира кусочно-непрерывной струны была рассмотрена в работах [5–9]. Энергия вакуума для открытой струны, помещенной между двумя бусинами, была получена в работе [10]. Потенциал Люшера воспроизводится, когда массы бусин становятся большими. В работе [11] были вычислены квантовые поправки к потенциалу Люшера, причем это интерпретируется как возможный нелокальный эффект в бозонной струне. В работах [12, 13] для модели межкваркового потенциала использовалась модель Намбу – Гото открытой струны. Предполагалось, что на концах струны имеются точечные бусины, имеющие массу m. Было показа-

* E-mail: jahan@riaam.ac.ir

но, что в пределе $m \to 0, \infty$ воспроизводится потенциал Люшера.

Настоящая работа является продолжением предыдущей работы одного из авторов, в которой была получена энергия Казимира как предельный случай (при стремящейся к нулю температуре) свободной энергии открытой струны с учетом угловой зависимости [14]. Свободная энергия при конечной температуре была получена с использованием интеграла по траекториям. В настоящей работе для вычисления энергии Казимира для открытой струны с концами, лежащими на двух разных твердых стержнях, мы используем три разных метода. Предполагается, что между стержнями имеется относительный угол θ, поэтому граничные условия на концах струны зависят от θ. Впервые получена энергия Казимира при $T = 0$ с использованием дзета-функции Гурвица, причем показано, что этот метод может эффективно применяться в самых разных случаях. Кроме того, использовался метод интегрирования по контуру на комплексной плоскости, который не только позволяет получить численную оценку в случае общих температур, но и предлагает удобную аналитическую аппроксимации в случае высоких температур. На основании этого получена угловая зависимость функции Грина и вычислена энергия Казимира, которая, как оказалось, представляет собой сумму зависящего от угла слагаемого и потенциала Люшера. Помимо этого, найдены интересные сходства и различия между предложенной моделью и моделью открытой струны с зарядами на концах, движущейся во внешнем электромагнитном поле. Этот вопрос обсуждается в Заключении.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Рассмотрим струну, концы которой лежат на двух стержнях и могут свободно по ним скользить. Струна имеет натяжение T и массовую плотность μ. Стержни расположены так, что одному из них соответствует $z = 0$, а другому — $z = l$. Углы между осью X и стержнями при $z = 0$ и $z = l$ соответственно равны θ_1 и θ_2. Смещение струны от положения равновесия происходит параллельно плоскости X–Y, и его можно описать полем смещения $\boldsymbol{\phi}(z,t)$, которое имеет вид

$$\boldsymbol{\phi}(z,t) = \phi_1(z,t)\widehat{e}_1 + \phi_2(z,t)\widehat{e}_2. \tag{1}$$

Здесь $\widehat{e}_1$ и $\widehat{e}_2$ — единичные векторы вдоль осей X и Y, соответственно. Плотность лагранжиана для поля смещения имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu A \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(z,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(z,t)}{\partial z}\right)^2, \tag{2}$$

откуда мы получаем волновое уравнение

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{\phi}(z,t) = 0, \tag{3}$$

где скорость звука равна

$$v = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Концы струны удовлетворяют связям

$$\phi_2(0,t) - \operatorname{tg}\theta_1\phi_1(0,t) = 0, \tag{4}$$

$$\phi_2(l,t) - \operatorname{tg}\theta_2\phi_1(l,t) = 0. \tag{5}$$

Эти связи дают следующие граничные условия на концах струны:

$$\frac{\partial\phi_1(0,t)}{\partial z} + \operatorname{tg}\theta_1\frac{\partial\phi_2(0,t)}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\phi_1(l,t)}{\partial z} + \operatorname{tg}\theta_2\frac{\partial\phi_2(l,t)}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Тогда решения принимают вид [14]

$$\phi_1(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n e^{i\omega_n t} + \bar{a}_n e^{-i\omega_n t}\right) \times \cos(k_n z + \theta_1), \tag{8}$$

$$\phi_2(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n e^{i\omega_n t} + \bar{a}_n e^{-i\omega_n t}\right) \times \sin(k_n z + \theta_1), \tag{9}$$

где квантованные волновые числа k_n равны

$$k_n = \frac{\pi}{l}(n + r), \quad r = \frac{1}{\pi}(\theta_2 - \theta_1), \tag{10}$$

а соответствующие собственные частоты равны

$$\omega_n = \frac{\pi v}{l}(n + r). \tag{11}$$

Как видно из уравнений (3)–(5), данный подход можно интерпретировать как свободную теорию поля с набором связей на концах струны в точках $z = 0, l$. В следующем разделе мы положим $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \theta$, так что $r = \theta/\pi$. В разд. 4 мы снова положим $\theta = \theta_2 - \theta_1$, где $\theta_1 \neq 0$.

Таким образом, основное дисперсионное соотношение имеет вид

$$\sin\frac{\omega l}{v} - \operatorname{tg}\theta\cos\frac{\omega l}{v} = 0. \tag{12}$$

Интересно отметить, что формально это тот же тип дисперсионных соотношений, который встречается в физике твердого тела, в так называемой модели Кронига–Пенни, но в вырожденном случае, когда вклад квази-импульса (который определяется блоховской периодичностью) равен нулю [15].

3. ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА ПРИ НУЛЕВОЙ И КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРАХ

Чтобы вычислить энергию Казимира, связанную с собственными частотами (11), воспользуемся двумя разными способами. Оба эти способа являются элегантными и эффективными, и, кроме того, их достаточно легко применять. Сначала рассмотрим случай нулевой температуры, $T = 0$.

3.1. Использование дзета-функции Гурвица

Описание метода регуляризации можно найти в работах [16] или [17]. (Впервые этот метод был применен для аналогичной составной струнной системы авторами работы [18].) $\zeta_H(s,a)$-функция Гурвица исходно определяется как

$$\zeta_H(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}, \quad 0 < a < 1, \quad \mathrm{Re}\, s > 1. \tag{13}$$

В таком виде функция Гурвица определена только при $\mathrm{Re}\, s > 1$; это мероморфная функция с простым полюсом в точке $s = 1$. При $\mathrm{Re}\, s < 1$ ее можно аналитически продолжить на комплексную плоскость. На самом деле на практике требуется только следующее свойство функции, аналитически продолженной в точку $s = -1$:

$$\zeta_H(-1,a) = -\frac{1}{2}\left(a^2 - a + \frac{1}{6}\right). \tag{14}$$

Мы предполагаем, что $0 \le \theta \le \pi$, так что $0 \le r \le 1$. В выражение (11) для собственных частот мы включили только положительные значения ω_n; это означает, что мы считаем от $n = 0$ вверх. (Это связано с тем, что мы описываем волны как стоячие. Если вместо этого распространяющиеся моды рассматривать как основные, то волнам, движущимся налево, будут соответствовать отрицательные значения n.) Тогда для полной энергии нулевых колебаний E_0 получаем выражение в нерегуляризованном виде:

$$E_0 = \frac{\pi v}{2l}\sum_{n=0}^{\infty}(n + r), \tag{15}$$

которое затем можно преобразовать, используя уравнение (14):

$$E_0 = \frac{\pi v}{2l}\zeta_H(-1,r) = -\frac{\pi v}{4l}\left(r^2 - r + \frac{1}{6}\right). \tag{16}$$

Чтобы получить энергию Казимира E_C, нужно вычесть контрчлен $E_{counter}$, соответствующий энергии нулевых колебаний в случае нулевого отклонения $\theta = 0$:

$$E_{counter} = \frac{\pi v}{2l}\zeta_H(-1,0) = -\frac{\pi v}{24l}. \tag{17}$$

При $T = 0$ окончательный ответ имеет вид

$$E_C = E_0 - E_{counter} = \frac{\pi v}{4l}r(1 - r). \tag{18}$$

При $\theta = 0$ имеем $E_C = 0$, как и должно быть в соответствии с построением, при $\theta = \pi$ мы получаем тот же ответ. Максимальное значение получается при $\theta = \pi/2$:

$$E_C\big|_{\max} = \frac{\pi v}{16l}. \tag{19}$$

Характерным свойством E_C является то, что эта энергия неотрицательна. Это противоречит поведению энергии Казимира, полученному для большинства систем, поскольку эта энергия обычно отрицательна, что соответствует тому, что обычно сила Казимира является силой притяжения между двумя параллельными плоскостями. В чем же с физической точки зрения причина того, что в нашем случае энергия E_C положительна? Мы считаем, что причина заключается в том, что при переходе от начального состояния $\theta = 0$ к конечной конфигурации $\theta > 0$ над системой должна быть произведена работа со стороны внешних сил. Это означает увеличение механической энергии системы, включая и увеличение энергии нулевых колебаний.

Чтобы в дальнейшем использовать этот результат для более широкого круга задач, сравним его с результатами, полученными с помощью теории Казимира для кусочно-однородной струны. Исходно теория для такой системы была развита в работе [7] для случая $T = 0$. В этой модели рассматривается замкнутая струна с полной длиной $l = l_I + l_{II}$, состоящая из двух частей длиной l_I и l_{II}, для которых в точке их соединения выполняются два граничных условия: (i) непрерывность поперечных смещений и (ii) непрерывность поперечных упругих сил. Эта модель релятивистская в том смысле, что для обеих частей скорость звука предполагается равной скорости света. Если определить отношение натяжений как

$$x = T_I/T_{II},$$

а отношение длин как

$$s = l_{II}/l_I,$$

то дисперсионное уравнение примет вид

$$\frac{4x}{(1-x)^2}\sin\frac{\omega\pi}{2} + \sin\left(\frac{\omega\pi}{1+s}\right)\sin\left(\frac{\omega s\pi}{1+s}\right) = 0. \quad (20)$$

Это уравнение можно решить различными способами. Для простоты ограничимся случаем малого отношения натяжений, $x \to 0$. Тогда спектр собственных значений для двух частей струны разбивается на две последовательности:

$$\omega_n(s) = (1+s)\pi n/l, \quad (21)$$

$$\omega_n(s^{-1}) = (1+s^{-1})\pi n/l. \quad (22)$$

Из этих выражений хорошо видно характерное отличие предлагаемой модели: собственные частоты в выражениях (21) и (22) пропорциональны n. В модели составных струн нет характеристик, которые делали бы уравнение на собственные значения неоднородным, как уравнение (11).

Интересно также провести сравнение с так называемой квантовой пружиной [19]. В такой системе рассматриваются колебания безмассового скалярного поля при наличии спиральных граничных условий, при этом сила Казимира, параллельная оси спирали, аналогична упругой силе пружины. В этом случае собственные значения становятся неоднородными при целых n, причем неоднородность возникает из-за шага спирали.

3.2. Метод интегрирования по контуру

При вычислении энергии нулевых колебаний сумму по n можно выразить как интеграл по контуру, используя тот факт, что любая мероморфная функция $g(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \omega\frac{d}{d\omega}\ln g(\omega)\,d\omega = \sum\omega_0 - \sum\omega_\infty, \quad (23)$$

где ω_0 соответствует нулям, а ω_∞ — полюсам $g(\omega)$ внутри контура интегрирования. Выберем этот контур в виде полуокружности большого радиуса R на правой полуплоскости ω, которая замыкается прямой линией, проходящей из точки $\omega = iR$ в точку $\omega = -iR$. Подробное описание этой процедуры, обычно называемой принципом аргумента, приведено, например, в работе [20]. Применение этого принципа к теории Казимира было предложено в работе [21].

Сначала рассмотрим следующий анзац для $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \left|\sin\frac{\omega l}{v} - \operatorname{tg}\theta\cos\frac{\omega l}{v}\right|^2. \quad (24)$$

У этой функции есть нули на действительной оси и нет полюсов. Расходимости, появляющейся при суммировании по всем частотам, можно избежать, вводя регуляризующий множитель $e^{-\alpha\omega}$, где α — малый положительный параметр. Кроме того, при вычислении энергии нулевых колебаний при ненулевых значениях θ проводится деление на $\sin^2(\omega l/v)$, так что при $\theta = 0$ аргумент логарифма становится равным единице. Наконец, по причинам, которые мы объясним ниже, проводится деление на постоянную величину $(1+\operatorname{tg}^2\theta)$. Таким образом, получаем

$$g(\omega) \to \left|\frac{\sin(\omega l/v) - \operatorname{tg}\theta\cos(\omega l/v)}{\sin(\omega l/v)}\right|^2\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}. \quad (25)$$

На мнимой оси, где $\omega = i\xi$, имеем

$$g(i\xi) = \frac{1+\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{cth}^2(\xi l/v)}{1+\operatorname{tg}^2\theta}, \quad (26)$$

видно, что $g(i\xi) \to 1$ при $\xi \to \pm\infty$. Эти экстремальные точки, вместе с другими точками на большой полуокружности, не дают вклада. Таким образом, при $T = 0$ для энергии Казимира можно записать

$$E_C = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \xi\frac{d}{d\xi}\ln g(i\xi)\,d\xi. \quad (27)$$

Выполним интегрирование по частям, заметив, что граничные члены при $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ не дают вклада. Окончательно, после введения регуляризующего множителя, энергия Казимира принимает вид

$$E_C = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\alpha\xi}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{cth}^2(\xi l/v)}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\right)d\xi. \quad (28)$$

Преимущество метода интегрирования по контуру состоит в том, что это выражение легко обобщить на случай конечных температур. Общая подстановка имеет вид

$$\hbar\int_0^\infty d\xi \to 2\pi k_B T{\sum_{n=0}^{\infty}}' \quad (29)$$

(это выражение записано в размерных единицах), где штрих означает, что слагаемое с $n = 0$ берется с половинным весом. Дискретные мацубаровские частоты имеют вид

$$\xi_n = \frac{2\pi}{\hbar}nk_BT,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Соответственно, при конечных T свободная энергия Казимира принимает вид

$$F_C(T) = k_B T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\alpha\xi_n} \times \\ \times \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2\theta \operatorname{cth}^2(\zeta_n l/v)}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\right), \quad (30)$$

где суммирование проведено начиная с $n = 1$, чтобы избежать расходимости при $n = 0$. Опять, по построению, при $\theta = 0$ энергия Казимира $F_C(T)$ становится равной нулю. Между состояниями с высокими и низкими температурами имеются различия. Есть две естественные частоты: первая — тепловая частота $\omega_T = k_B T/\hbar$, а вторая — геометрическая частота $\omega_{geom} = 2\pi c/l$, связанная с размером системы. Состояние с высокой температурой характеризуется большим значением отношения частот ω_T/ω_{geom}, а именно,

$$\frac{\omega_T}{\omega_{geom}} = \frac{k_B T l}{2\pi\hbar c} = \frac{\xi_1 l}{(2\pi)^2\hbar c} \gg 1. \quad (31)$$

Для состояния с низкой температурой этот параметр мал.

3.2.1. Высокие температуры

При низких температурах выражение (30) имеет сложный вид вследствие того, что функция cth в области частот $n \in [1, \infty]$ сильно изменяется. Для вычислений можно использовать формулу Эйлера–Маклорена или формулу Абеля–Плана, однако мы ограничимся случаем высоких температур. Для этого случая вычисления проводить несложно и, кроме того, можно получить характеристические свойства нашей механической системы. С учетом того, что

$$\operatorname{cth} z \approx 1 + 2e^{-2z} \quad \text{при} \quad z \gg 1,$$

заметим, что аргумент логарифма в формуле (30) можно заменить выражением

$$1 + 4\sin^2\theta e^{-2z},$$

где

$$z = \xi_n l/v.$$

Основной вклад дает низшая мода при $n = 1$. Таким образом, для высоких температур получаем следующее выражение для свободной энергии ($\hbar = 1$):

$$F_C(T) = 4k_B T \sin^2\theta e^{-4k_B T l/v} \quad (32)$$

(в случае высоких температур множитель обрезания не играет роли).

Полезно сравнить полученный результат с выражением для свободной энергии Казимира для высоких температур для пары проводящих пластин, разделенных щелью шириной a [1]:

$$F_C(\text{plates}) = -\frac{k_B T}{8\pi a^2}\zeta(3) - \frac{k_B T}{4\pi a^2} e^{-4\pi k_B T a}. \quad (33)$$

Можно сделать следующие выводы.

1. Первый и главный член в выражении (33), пропорциональный T, в выражении (32) отсутствует. Этот член соответствует $n = 0$ при наличии внешнего электромагнитного поля и соответствует классической теории. В предложенной нами модели случай $n = 0$ не играет существенной роли.

2. Первый член в выражении (32) и второе слагаемое в выражении (33) аналогичны, поскольку содержат T, умноженную на убывающую экспоненту, в показатель которой входит T. В этих экспонентах l/v соответствует πa.

3. При фиксированном T свободная энергия в выражении (32) достигает максимального значения при $\theta = \pi/2$. Аналогичное поведение было получено выше для случая $T = 0$.

4. Наконец, выражение (32) и второе слагаемое в выражении (33) имеют противоположные знаки. Мы уже обсуждали это выше. Это можно также проиллюстрировать с помощью следующего рассуждения: предположим, что наша струнная система медленно перемещается из точки β в точку $\beta + d\beta$ при постоянной температуре. Для этого процесса требуется положительная внешнняя работа, при этом свободная энергия Казимира увеличивается. При наличии электромагнитного поля, если пластины перемещаются из точки a в точку $a + da$, также требуется положительная внешняя работа. В этом смысле оба случая аналогичны друг другу. Различие заключается в том, что струнная система приближается к состоянию с максимальной энергией при $\theta = \pi/2$, в то время как система пластин приближается к состоянию с $a = \infty$, когда свободная энергия равна нулю. В этом причина различия знаков свободных энергий Казимира.

3.2.2. Другие термодинамические потенциалы

Интересно также вычислить другие термодинамические потенциалы, по-прежнему полагая, что температура является высокой. В этом случае, используя общую формулу

$$S = -\partial F/\partial T,$$

нетрудно вычислить энтропию Казимира системы S_C. Получаем

$$S_C = -4k_B \sin^2\theta \left(1 - \frac{4k_BTl}{v}\right) e^{-4k_BTl/v}. \quad (34)$$

Это выражение может иметь тот или иной знак в зависимости от величины отношения $4k_BTl/v$. Для других случаев хорошо известно, см., например, работы [22,23], что энтропии Казимира могут быть отрицательными. Противоречия второму закону термодинамики нет, поскольку мы имеем дело лишь с частью полной системы, а второй закон термодинамики применим только к полной системе. Для не слишком высоких температур энтропия $S_C < 0$. Если $4k_BTl/v > 1$, то энтропия S_C становится положительной, однако ее величина экспоненциально убывает. При $T \to \infty$ энтропия $S_C \to 0$.

Внутреннюю энергию Казимира U_C можно найти, воспользовавшись соотношением

$$F = U - TS.$$

Получаем

$$U_C = 4k_BT \left(\frac{4k_BTl}{v}\right) \sin^2\theta e^{-4k_BTl/v}. \quad (35)$$

Это выражение всегда положительно.

4. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ ПОДХОД: ФУНКЦИЯ ГРИНА

Теперь рассмотрим проблему с помощью теоретико-полевого подхода, где главное — найти функцию Грина. В данном разделе мы будем учитывать всю частотную область, включая и отрицательные частоты, так что $n \in [-\infty, \infty]$. Собственные моды, определяемые как

$$u_n^1(z) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos(k_n z + \theta_1), \quad (36)$$

$$u_n^2(z) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin(k_n z + \theta_1), \quad (37)$$

удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_0^l dz \sum_{\alpha=1}^{2} u_{n'}^\alpha(z) u_n^\alpha(z) = \frac{1}{l} \int_0^l dz \cos z(k_n - k_{n'}) = \\ = \delta_{n'n} \quad (38)$$

и замкнутости

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^\alpha(z) u_n^\beta(z') = K^{\alpha\beta}(z,z')\delta(z-z') \equiv \\ \equiv \delta^{\alpha\beta}\delta(z-z'). \quad (39)$$

Матрица $K^{\alpha\beta}(z,z')$ имеет явный вид

$$K^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi r}{l}(z-z') & -\sin\frac{\pi r}{l}(z-z') \\ \sin\frac{\pi r}{l}(z-z') & \cos\frac{\pi r}{l}(z-z') \end{bmatrix}, \quad (40)$$

который можно получить, используя представления в виде рядов Фурье:

$$\frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\frac{\pi n z}{l} \cos\frac{\pi n z'}{l} = \delta(z-z'), \quad (41)$$

$$\frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\frac{\pi n z}{l} \sin\frac{\pi n z'}{l} = \delta(z-z'). \quad (42)$$

Второе из равенств (39) есть ни что иное как

$$K^{\alpha\beta}(z,z')|_{z=z'} = \delta^{\alpha\beta}.$$

Из выражения (40) следует, что

$$K^{\alpha\beta}(z,z')|_{r=0} = \delta^{\alpha\beta},$$

откуда следует, что функция Грина является диагональной, если стержни параллельны. Функцию Грина $G^{\alpha\beta}$ можно разложить по собственным модам (36) и (37):

$$G^{\alpha\beta}(t-t';z,z') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} g^{\alpha\beta}(\omega;z,z'), \quad (43)$$

где

$$g^{\alpha\beta}(\omega;z,z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_n^\alpha(z) u_n^\beta(z')}{\lambda_n(\omega)}, \quad (44)$$

при этом собственные значения равны

$$\lambda_n(\omega) = k_n^2 - \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (45)$$

Используя выражения (39), (43) и (44), получаем

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G^{\alpha\beta}(t-t';z,z') = \\ = \delta^{\alpha\beta}\delta(t-t')\delta(z-z'). \quad (46)$$

5. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ВЫВОД ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА ПРИ $T = 0$

Энергия нулевых колебаний в терминах функции Грина имеет вид [1]

$$E_0 = \frac{i}{2\mathcal{T}} \mathrm{Tr} \ln G^{\alpha\beta}(t-t';z,z'), \quad (47)$$

где $\mathcal{T}$ — (бесконечный) временной интервал. Для функции Грина (43), используя выражения (44) и (38), получаем энергию нулевых колебаний в виде

$$E_0 = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln\left(k_n^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right). \qquad (48)$$

Выполнив евклидово вращение $\omega \to i\xi$ и непосредственно используя регуляризацию посредством дзета-функции Римана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = 1 + 2\zeta(0) = 0, \qquad (49)$$

перепишем выражение (48) в виде (см. Приложение)

$$E_0 = \frac{v}{2l}\int_0^\infty d\kappa \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(n+\frac{\theta}{\pi}\right)^2 + \kappa^2\right] = \frac{v}{2l}\times$$
$$\times\int_0^\infty d\kappa\Big[\ln(1-e^{-2\pi\kappa-2i\theta})+\ln(1-e^{-2\pi\kappa+2i\theta})\Big], \quad (50)$$

где

$$\kappa = \frac{\omega l}{\pi v}.$$

Во второй строке выражения (50) мы пренебрегли второстепенными квадратично расходящимися членами. Теперь, чтобы вычислить последние интегралы в выражении (50), разложим в ряд логарифм для заданного комплексного числа Z:

$$\ln(1-Z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Z^m}{m} \qquad (51)$$

при условии, что $|Z| < 1$. Тогда можно записать

$$\int_0^\infty d\kappa \ln\left(1 - e^{\pm 2i\theta}e^{-2\pi\kappa}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{\pm 2im\theta}}{m^2}. \qquad (52)$$

Подставим соотношение (52) в выражение (50) и используем тождество [24]

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mx}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \qquad (53)$$

после чего получим выражение для энергии нулевых колебаний:

$$E_0 = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\theta}{m^2} = -\frac{\pi v}{2l}\left(r^2 - r + \frac{1}{6}\right) \qquad (54)$$

(напомним, что $r = \theta/\pi$). Вычтем контрчлен $E_{counter}$, соответствующий точке $r = 0$, после чего получим выражение для энергии Казимира:

$$E_C = E_0 - E_{counter} = \frac{\pi v}{2l} r(1-r). \qquad (55)$$

Приведенные результаты согласуются с результатами, полученными ранее в разд. 3 (причина, по которой выражения (54) и (55) аналогичны, соответственно, выражениям (16) и (18), состоит в том, что в настоящем разделе мы учитываем весь интервал $n \in [-\infty, \infty]$).

С точки зрения теоретико-полевого подхода, уравнение (54) воспроизводит потенциал Люшера, если стержни параллельны ($\theta = 0$) или антипараллельны ($\theta = \pi$). В обоих случаях струна удовлетворяет граничным условиям Неймана–Неймана и Дирихле–Дирихле. При $\theta = \pi/2$ концы струны удовлетворяют граничным условиям Неймана–Дирихле, а энергия нулевых колебаний (54) достигает максимального значения (см. [14]):

$$E_0|_{\max} = \frac{1}{24}\frac{\pi v}{l}.$$

6. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Есть несколько вариантов теории Казимира для струнной системы. Как было отмечено выше в разд. 3, имеется связь между предложенной в настоящей работе теорией и теорией кусочно-непрерывной струны. Еще один вариант, который требует дальнейшего исследования, — это теория Казимира для струны, имеющей электрические заряды на концах и взаимодействующей с внешним электромагнитным полем. Эта теория рассматривалась в работе [25]. Представляют интерес сходства и различия между теорией, учитывающей наличие электромагнитного поля, и теорией, предложенной в настоящей работе. Во-первых, оказалось, что основные волновые уравнения для обеих теорий в основном те же самые; см. уравнение (3), приведенное выше. Во-вторых, оказалось, что для них различаются граничные условия. В теории струн, учитывающей наличие электромагнитного поля, координатами являются величины $x^\mu(\tau,\sigma)$, см. [25], где τ — временная координата, а σ — координата вдоль струны, а граничные условия состоят в том, что концы при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$ остаются в покое. Это означает, что на концах струны упругая сила Tx'_μ и электромагнитная сила $qF_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\nu$ находятся в равновесии:

$$Tx'_\mu + q_i F_{\mu\nu}(x)\,\dot{x}^\nu = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (56)$$

где q_1 и q_2 — заряды на концах струны. До некоторой степени, это граничное условие аналогично условию, используемому в нашей модели, при этом мы также требуем, чтобы положения концов струны были фиксированы для любых t, как следует из уравнений (4) и (5), приведенных выше. Однако имеется важное различие: при наличии электромагнитного поля граничные условия являются динамическими, поэтому на концах струны упругая и электромагнитная сила находятся в равновесии. В нашем случае условия являются, наоборот, чисто геометрическими по своей природе, что не имеет прямого отношения к силам, действующим на концах.

Тем не менее, несколько удивительным оказался тот факт, что полученные для обоих случаев результаты хорошо согласуются между собой. Например, полученное выражение для энергии нулевых колебаний (54) в точности совпадает с выражением (5.31) из работы [25] для струны, движущейся во внешнем магнитном поле. Несмотря на то что физические модели различаются, это согласие указывает на устойчивость метода регуляризации при различных физических условиях, в особенности при использовании дзета-функции Гурвица.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы вычислить бесконечную сумму в первой строке выражения (50), запишем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(n_r^2+\kappa^2) = \ln \prod_{n=-\infty}^{\infty} (n_r^2+\kappa^2) = = \ln\left[\prod_{n=-\infty}^{\infty}(n_r+i\kappa)\prod_{n=-\infty}^{\infty}(n_r-i\kappa)\right], \quad \text{(A.1)}$$

где $n_r = n + r$. Тогда, поскольку

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}(nx+y) = \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right), \quad \text{(A.2)}$$

получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(n_r^2+\kappa^2) = = \ln \operatorname{sh}\pi(\kappa+ir) + \ln \operatorname{sh}\pi(\kappa-ir). \quad \text{(A.3)}$$

Благодарности. И. Б. благодарит В. Нестеренко за полезную информацию.

Финансирование. Работа И. Б. выполнена при финансовой поддержке Research Council of Norway, Project 250346. Работа А. Дж. выполнена при финансовой поддержке Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragha (RIAAM), Project 1/6025-65.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. A. Milton, *The Casimir Enegy: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore (2001).
2. M. Lüscher, K. Symanzik, and P. Weisz, Nucl. Phys. B **173**, 365 (1980).
3. M. Lüscher, Nucl. Phys. B **180**, 317 (1981).
4. O. Alvarez, Phys. Rev. D **24**, 440 (1981).
5. L. Hadasz, G. Lambiase, and V. V. Nesterenko, Phys. Rev. D **62**, 025011 (2000).
6. I. Brevik, A. A. Bytsenko, and B. M. Pimentel in: *Theoretical Physics*, 2002, ed. by T. F. George and H. F. Arnoldus, Nova Science Publishers (2003).
7. I. Brevik and H. B. Nielsen, Phys. Rev. D **41**, 1185 (1990).
8. I. Brevik and E. Elizalde, Phys. Rev. D **49**, 5319 (1994).
9. I. Brevik and H. B. Nielsen, Phys. Rev. D **51**, 1869 (1995).
10. E. D'Hoker and P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. **71**, 1136 (1993).
11. E. Elizalde and S. Odintsov, Class. Quant. Grav. **12**, 2881 (1995).
12. G. Lambiase and V. V. Nesterenko, Phys. Rev. D **54**, 6387 (1996).
13. H. Kleinert, G. Lambiase, and V. V. Nesterenko, Phys. Lett. B **384**, 213 (1996).
14. A. Jahan and S. Sukhasena, Int. J. Mod. Phys. A **33**, 1850097 (2018).
15. R. de L. Kronig and W. G. Penney, Proc. Roy. Soc. London A: Math., Phys., Eng. Sciences **130**, 499 (1931).
16. E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Scientific, Singapore (1994).
17. E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Springer, Berlin (1995).

18. X. Li, X. Shi, and J. Zhang, Phys. Rev. D **44**, 560 (1991).

19. C.-J. Feng and X.-Z. Li, Phys. Lett. B **691**, 167 (2010).

20. Yu. S. Barash and V. L. Ginzburg, in *Electromagnetic Fluctuations and Molecular Forces in Condensed Matter*, ed. by L. V. Keldysh et al., Elsevier, Amsterdam (1989), Ch. 6.

21. N. G. van Kampen, B. R. A. Nijboer, and K. Schram, Phys. Lett. A **26**, 307 (1968).

22. K. A. Milton, P. Kalauni, P. Parashar, and Y. Li, Phys. Rev. D **99**, 045013 (2019).

23. J. S. Høye, I. Brevik, and K. A. Milton, Phys. Rev. A **94**, 032113 (2016).

24. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals Series, and Products*, 7th edn. Academic Press (2007).

25. V. V. Nesterenko, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 2627 (1989).