ЖЭТФ, 2019, том 156, вып. 4 (10), стр. 750–760

КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ БЕЗ ЦЕНТРА ИНВЕРСИИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В. П. Минеев[*]

Univ. Grenoble Alpes, CEA, IRIG, PHELIQS
F-38000, Grenoble, France

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г.,
после переработки 24 мая 2019 г.
Принята к публикации 24 мая 2019 г.

Развита теория низкотемпературных кинетических явлений в металлах без центра инверсии. Кинетические свойства металлов без центра инверсии описываются четырьмя кинетическими уравнениями для диагональных (внутризонных) и недиагональных (межзонных) элементов матричной функции распределения электронов по состояниям из двух зон проводимости, расщепленных спин-орбитальным взаимодействием. Выведены интегралы столкновений для рассеяния электронов на примесях и парных столкновений. Рассмотрены электрический и спиновый токи и поток тепла в бесстолкновительном режиме и в случае слабого рассеяния на примесях. Показано, что в трехмерных средах недиагональные члены функции распределения дают вклад в транспорт заряда, спина и тепла не только благодаря процессам межзонного рассеяния, но и в бесстолкновительном режиме, порождая необычные диссипативные токи. Показано, что остаточное сопротивление и остаточное тепловое сопротивление при нулевой температуре определяются не только рассеянием электронов на примесях, но и электрон-электронными столкновениями.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S0044451019100183

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже много лет спиновая электроника систем с сильным спин-орбитальным взаимодействием вызывает значительный интерес. В частности, изучались кинетические свойства двумерных полупроводниковых структур с нарушенной пространственной четностью, с характерным спин-орбитальным взаимодействием типа Рашба и Дрессельхауза [1–4]. Спин-орбитальное взаимодействие электронов с кристаллической решеткой без центра инверсии снимает спиновое вырождение электронных состояний. Каждая электронная зона расщепляется на две зоны с разной величиной квазиимпульса при равной энергии. Закон дисперсии и функция распределения электронов становятся матрицами $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{\sigma\sigma'}$, $\hat{n} = n_{\sigma\sigma'}$ по спиновым индексам. Временное поведение матричной функции распределения в $(\mathbf{k},\mathbf{r})$-пространстве в квазиклассическом приближении определяется выведенным Силиным [5] кинетическим уравнением

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{k}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}\right) - i[\hat{\varepsilon},\hat{n}] = \hat{I}_{st}, \quad (1)$$

где $[\hat{\varepsilon},\hat{n}]$ — коммутатор матриц $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{r})$ и $\hat{n} = \hat{n}(\mathbf{k},\mathbf{r})$. Здесь и далее $\hbar = 1$. Интеграл столкновений в правой части уравнения определяет релаксационные процессы.

Представляется естественным переписать кинетическое уравнение в зонном представлении, где гамильтониан имеет диагональный вид. Можно думать, что после этого преобразования мы придем к системе двух кинетических уравнений для функций распределения электронов в каждой из зон,

[*] E-mail: vladimir.mineev@cea.fr

взаимодействующих между собой через интегралы столкновений, включающие процессы межзонного рассеяния, и теория будет выглядеть как соответствующая кинетическая теория обычного двухзонного металла с центром инверсии. Однако, это не так. Кинетические процессы в металлах без центра инверсии описываются четырьмя кинетическими уравнениями для диагональных (внутризонных) и недиагональных (межзонных) элементов матричной функции распределения электронов по состояниям из двух зон проводимости, расщепленных спин-орбитальным взаимодействием. Недиагональные члены дают вклад в транспортные свойства даже в бесстолкновительном режиме. В работе показано, что в трехмерных веществах без центра инверсии электрическое поле не только ускоряет электроны, но также передает энергию электронному газу, создавая неравновесные состояния с недиагональной матричной функцией распределения. Это новое явление полностью специфично для трехмерных сред без центра инверсии.

Выражения для интеграла столкновений электронов с примесями в металлах и полупроводниках без центра инверсии можно найти в работах [6, 7]. Авторы не приводят вывода этих выражений, но пишут: «Вывод интеграла столкновений можно найти во многих работах», — отсылая к соответствующей литературе. В этих ссылках, однако, вывода интеграла столкновений не содержится. Вывод интегралов столкновений для столкновений электронов с примесями, а также электрон-электронных столкновений в металлах без центра инверсии дан в настоящей работе. Показано, что остаточное сопротивление и остаточное тепловое сопротивление при нулевой температуре определяются не только рассеянием электронов на примесях, но и парными электронными столкновениями.

Статья состоит из трех разделов, Введения и Заключения. В разд. 2 приведены основные сведения о спектре и равновесных функциях распределения в металлах без центра инверсии. В разд. 3 выведены кинетические уравнения и получены общие выражения для нахождения электрического и спинового токов и потока тепла. Рассмотрены транспортные явления в бесстолкновительном режиме и в случае слабого рассеяния на примесях. Показано, что в трехмерных средах недиагональные члены функции распределения дают вклад в транспорт заряда, спина и тепла не только благодаря процессам межзонного рассеяния, но и в бесстолкновительном режиме, порождая необычные диссипативные токи.

Роль парных столкновений в происхождении остаточного сопротивления и теплового сопротивления при нулевой температуре обсуждается в разд. 4. В Заключении перечислены основные результаты работы. Вывод интегралов столкновений для рассеяния электронов на примесях и друг на друге дан в двух Приложениях. Полученные результаты относятся как к трехмерным, так и к двумерным системам без центра инверсии. Выявлены принципиальные отличия между кинетическими свойствами в двух и трех измерениях.

2. ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ В МЕТАЛЛАХ БЕЗ ЦЕНТРА ИНВЕРСИИ

Энергетический спектр электронов в металле без центра инверсии имеет вид

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})\hat{\delta} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{2}$$

где $\varepsilon(\mathbf{k})$ — скалярная часть спектра, $\hat{\delta}$ — единичная 2×2-матрица в спиновом пространстве, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — матрицы Паули. Второе слагаемое в уравнении (2) описывает спин-орбитальное взаимодействие. Его вид зависит от конкретной кристаллической симметрии вещества. Псевдовектор $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$ обладает следующими свойствами $\boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$ и $g\boldsymbol{\gamma}(g^{-1}\mathbf{k}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$, где g — любое преобразование симметрии точечной группы $\mathcal{G}$ кристалла. Более детальное описание свойств металлов без центра инверсии в нормальном и сверхпроводящем состоянии изложено в работе [8]. В кристаллах $CePt_3Si$, $CeRhSi_3$ и $CeIrSi_3$ с тетрагональной симметрией $\mathcal{G} = \mathbf{C}_{4v}$ вектор

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = \gamma(k_y\hat{x} - k_x\hat{y}) + \gamma_{\|}k_xk_yk_z(k_x^2 - k_y^2)\hat{z}. \tag{3}$$

В двумерном случае, полагая $\gamma_{\|} = 0$, мы приходим к спин-орбитальному взаимодействию Рашба [9], которое часто используется для описания нарушенной зеркальной симметрии в пленках. В изотропном случае, соответствующем кубической симметрии, $\varepsilon(\mathbf{k}) = k^2/2m$ и

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = \gamma\mathbf{k}. \tag{4}$$

Здесь γ — постоянная с размерностью скорости.

Собственные значения и собственные векторы матрицы (2) выглядят следующим образом:

$$\varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) \pm |\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})|, \tag{5}$$

$$\Psi^+_\sigma(\mathbf{k}) = C_\mathbf{k}\begin{pmatrix} \hat\gamma_{\mathbf{k}z}+1 \\ \hat\gamma_{\mathbf{k}x}+i\hat\gamma_{\mathbf{k}y}\end{pmatrix},$$
$$\Psi^-_\sigma(\mathbf{k}) = C_\mathbf{k}\begin{pmatrix} -\hat\gamma_{\mathbf{k}x}+i\hat\gamma_{\mathbf{k}y} \\ \hat\gamma_{\mathbf{k}z}+1\end{pmatrix}, \tag{6}$$
$$C_\mathbf{k} = (2(\hat\gamma_{\mathbf{k}z}+1))^{-1/2}.$$

Здесь, $\hat\gamma_{\mathbf{k}x}, \hat\gamma_{\mathbf{k}y}, \hat\gamma_{\mathbf{k}z}$ — компоненты единичного вектора $\boldsymbol\gamma(\mathbf{k})/|\boldsymbol\gamma(\mathbf{k})|$. Собственные векторы удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\Psi^{\alpha\star}_\sigma(\mathbf{k})\Psi^\beta_\sigma(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \Psi^\alpha_{\sigma_1}(\mathbf{k})\Psi^{\alpha\star}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) = \delta_{\sigma_1\sigma_2}. \tag{7}$$

В этих выражениях и всюду далее подразумевается суммирование по повторяющимся спиновым индексам $\sigma =\uparrow,\downarrow$ или зонным индексам $\alpha = +,-$.

Имеются две ферми-поверхности, определяемые уравнениями
$$\varepsilon_\pm(\mathbf{k}) = \mu, \tag{8}$$
с различными импульсами Ферми $\mathbf{k}_{F\pm}$. В изотропном случае они равны

$$k_{F\pm} = \mp m\gamma + \sqrt{2m\mu + (m\gamma)^2}, \tag{9}$$

а скорость Ферми одинакова на обеих ферми-поверхностях

$$\mathbf{v}_{F\pm} = \left.\frac{\partial(\varepsilon\pm\gamma k)}{\partial\mathbf{k}}\right|_{k=k_{F\pm}} = \hat{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{2\mu}{m}+\gamma^2}. \tag{10}$$

Здесь $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор в направлении импульса $\mathbf{k}$. Равенство скоростей Ферми при разных ферми-импульсах — специфическое свойство моделей с изотропным спектром (4) в трехмерном случае и взаимодействием Рашба в двумерном случае.

Матричная функция равновесного распределения электронов по импульсам имеет вид

$$\hat n^0 = \frac{n_+ + n_-}{2}\hat\delta + \frac{n_+ - n_-}{2|\boldsymbol\gamma|}\boldsymbol\gamma\cdot\boldsymbol\sigma, \tag{11}$$

где
$$n_\pm = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon_\pm-\mu}{T}\right)+1} \tag{12}$$

— функции Ферми. В изотропном случае вблизи соответствующих ферми-поверхностей законы дисперсии выглядят особенно просто:

$$\xi_\pm = \varepsilon_\pm - \mu \approx v_F(k-k_{F\pm}) = \epsilon - \mu_\pm, \tag{13}$$

здесь

$$\epsilon = v_F k, \quad \mu_\pm = v_F k_{F\pm}, \quad \mu_+ - \mu_- = -2mv_F\gamma. \tag{14}$$

3. ТРАНСПОРТНЫЕ СВОЙСТВА. РАССЕЯНИЕ НА ПРИМЕСЯХ

3.1. Кинетическое уравнение

При наличии внешнего электрического поля $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$ линеаризованное кинетическое уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial\hat g}{\partial t} + e\mathbf{E}\frac{\partial\hat n^0}{\partial\mathbf{k}} - i[\hat\varepsilon,\hat g] = \hat I_{st}, \tag{15}$$

где $\hat g = \hat n - \hat n^0$ — отклонение функции распределения от равновесной функции распределения $\hat n^0$.

Эрмитовские матрицы функций неравновесного распределения в зонном и спиновом представлениях связаны между собой преобразованием

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \Psi^{\alpha\star}_{\sigma_1}(\mathbf{k})n_{\sigma_1\sigma_2}\Psi^\beta_{\sigma_2}(\mathbf{k}). \tag{16}$$

В зонном представлении равновесная функция распределения (11) суть диагональная матрица

$$f^0_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \Psi^{\alpha\star}_{\sigma_1}(\mathbf{k})n^0_{\sigma_1\sigma_2}\Psi^\beta_{\sigma_2}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} n_+ & 0 \\ 0 & n_-\end{pmatrix}_{\alpha\beta}. \tag{17}$$

Однако ее производная недиагональна и определяется уравнением

$$\Psi^{\alpha\star}_{\sigma_1}(\mathbf{k})\frac{\partial n^0_{\sigma_1\sigma_2}}{\partial\mathbf{k}}\Psi^\beta_{\sigma_2}(\mathbf{k}) = \\ = \frac{\partial f^0_{\alpha\beta}}{\partial\mathbf{k}} + \left[\Psi^{\alpha\star}_\sigma(\mathbf{k})\frac{\partial\Psi^\gamma_\sigma(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}, f^0_{\gamma\beta}\right], \tag{18}$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Таким образом, матричное кинетическое уравнение для зависящей от частоты амплитуды Фурье неравновесной части функции распределения $g_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t}$ принимает вид

$$-i\omega\begin{pmatrix} g_+ & g_\pm \\ g_\mp & g_-\end{pmatrix} + \\ + e\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_+\mathbf{E})\dfrac{\partial n_+}{\partial\xi_+} & (\mathbf{v}_\pm\mathbf{E})(n_- - n_+) \\ (\mathbf{v}_\mp\mathbf{E})(n_+ - n_-) & (\mathbf{v}_-\mathbf{E})\dfrac{\partial n_-}{\partial\xi_-}\end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & ig_\pm(\varepsilon_- - \varepsilon_+) \\ ig_\mp(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) & 0\end{pmatrix} = I_{\alpha\beta}. \tag{19}$$

Здесь

$$\mathbf{v}_\pm = \Psi^{+\star}_\sigma(\mathbf{k})\frac{\partial\Psi^-_\sigma(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} = \\ = \frac{\hat\gamma_{\mathbf{k}x}-i\hat\gamma_{\mathbf{k}y}}{2(\hat\gamma_{\mathbf{k}z}+1)}\frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}z}}{\partial\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\hat\gamma_{\mathbf{k}x}-i\hat\gamma_{\mathbf{k}y})}{\partial\mathbf{k}}, \tag{20}$$
$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial\mathbf{k}}, \quad \mathbf{v}_\mp = -\mathbf{v}^\star_\pm.$$

Интеграл столкновений для рассеяния электронов на примесях выведен в Приложении А. Ненулевой вклад в интеграл столкновений дает лишь неравновесная часть функции распределения. Таким образом,

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 2\pi n_{imp} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times \\ \times \{O_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \left[g_{\nu\mu}(\mathbf{k}')O_{\mu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) - \right. \\ - \left. O_{\nu\mu}(\mathbf{k}',\mathbf{k})g_{\mu\beta}(\mathbf{k})\right] \delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_\beta) + \\ + \left[O_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}')g_{\nu\mu}(\mathbf{k}') - g_{\alpha\nu}(\mathbf{k})O_{\nu\mu}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\right] \times \\ \times O_{\mu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\delta(\varepsilon'_\mu - \varepsilon_\alpha)\}, \quad (21)$$

$$O_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \Psi^{\alpha\star}_\sigma(\mathbf{k})\Psi^\beta_\sigma(\mathbf{k}'). \quad (22)$$

Здесь и во всех последующих формулах, в двумерном случае $\int d^3k'/(2\pi)^3$ должно быть заменено на $\int d^2k'/(2\pi)^2$.

Решение уравнений (19) имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_+ & g_\pm \\ g_\mp & g_- \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} (\mathbf{w}_+\mathbf{E}) & (\mathbf{w}_\pm\mathbf{E}) \\ (\mathbf{w}_\mp\mathbf{E}) & (\mathbf{w}_-\mathbf{E}) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

После подстановки этой матрицы в уравнение (19) и в интеграл столкновений (21) мы получим четыре скалярных уравнения, соответствующие матричным элементам матрицы (19) для зависящих от величины и направления импульса $\mathbf{k}$ скалярных функций $(\mathbf{w}_+\mathbf{E}), (\mathbf{w}_\pm\mathbf{E}), (\mathbf{w}_\mp\mathbf{E}), (\mathbf{w}_-\mathbf{E})$. В общем случае эти функции могут быть найдены посредством численного решения уравнений. Решения для бесстолкновительного режима и случая слабого рассеяния на примесях рассмотрены ниже.

3.2. Электрический ток

Выражение для плотности электрического тока во внешнем поле имеет вид

$$\mathbf{j} = e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial\varepsilon_{\sigma\sigma_1}(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} g_{\sigma_1\sigma}(\mathbf{k},\omega). \quad (24)$$

Переходя к зонному представлению, получаем

$$\mathbf{j} = e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Psi^{\alpha\star}_\sigma(\mathbf{k}) \frac{\partial\varepsilon_{\sigma\sigma_1}(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} \Psi^\gamma_{\sigma_1}(\mathbf{k})\Psi^{\gamma\star}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) \times \\ \times g_{\sigma_2\sigma_3}(\mathbf{k},\omega)\Psi^\alpha_{\sigma_3}(\mathbf{k}) = \\ = e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} + \left[\Psi^{\alpha\star}_\sigma(\mathbf{k})\frac{\partial\Psi^\beta_\sigma}{\partial\mathbf{k}}, \varepsilon_{\beta\gamma}\right]\right\} \times \\ \times g_{\gamma\alpha}(\mathbf{k},\omega), \quad (25)$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Окончательно приходим к выражению

$$\mathbf{j} = e^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{\mathbf{v}_+(\mathbf{w}_+\mathbf{E}) + \mathbf{v}_-(\mathbf{w}_-\mathbf{E}) + \\ + \left[\mathbf{v}_\pm(\mathbf{w}_\mp\mathbf{E}) - \mathbf{v}_\mp(\mathbf{w}_\pm\mathbf{E})\right](\varepsilon_- - \varepsilon_+)\}. \quad (26)$$

Поскольку функции $\mathbf{w}_+, \mathbf{w}_-, \mathbf{w}_\pm, \mathbf{w}_\mp$ зависят от величины и направления импульса $\mathbf{k}$, направление тока, вообще говоря, не совпадает с направлением электрического поля.

1. Баллистический режим. В пренебрежении процессами рассеяния, т. е. при $\omega\tau > 1$, где τ — типичное время рассеяния, определяемое различными слагаемыми, входящими в интеграл столкновений, уравнение (19) имеет решение

$$g_+ = e(\mathbf{w}_+\mathbf{E}) = \frac{e}{i\omega}(\mathbf{v}_+\mathbf{E})\frac{\partial n_+}{\partial\xi_+}, \quad (27)$$

$$g_- = e(\mathbf{w}_-\mathbf{E}) = \frac{e}{i\omega}(\mathbf{v}_-\mathbf{E})\frac{\partial n_-}{\partial\xi_-}, \quad (28)$$

$$g_\pm = e(\mathbf{w}_\pm\mathbf{E}) = \frac{e(\mathbf{v}_\pm\mathbf{E})(n_- - n_+)}{i\omega - i(\varepsilon_- - \varepsilon_+)}, \quad (29)$$

$$g_\mp = e(\mathbf{w}_\mp\mathbf{E}) = \frac{e(\mathbf{v}_\mp\mathbf{E})(n_+ - n_-)}{i\omega - i(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)}. \quad (30)$$

Подставляя эти выражения в (26) получим

$$\mathbf{j} = e^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\mathbf{v}_+(\mathbf{v}_+\mathbf{E})}{i\omega}\frac{\partial n_+}{\partial\xi_+} + \frac{\mathbf{v}_-(\mathbf{v}_-\mathbf{E})}{i\omega}\frac{\partial n_-}{\partial\xi_-} + \right. \\ + 2\frac{(n_+ - n_-)(\varepsilon_- - \varepsilon_+)}{\omega^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2}\left[i\omega\,\mathrm{Re}(\mathbf{v}_\pm(\mathbf{v}^\star_\pm\mathbf{E})) + \right. \\ \left.\left. + (\varepsilon_- - \varepsilon_+)\right]\mathrm{Im}(\mathbf{v}_\pm(\mathbf{v}^\star_\pm\mathbf{E}))\right\}. \quad (31)$$

Последний член в этой формуле представляет диссипативный ток. Он зависит от

$$\mathrm{Im}(\mathbf{v}_\pm(\mathbf{v}^\star_\pm\mathbf{E})) = \frac{1}{4(\hat\gamma_{\mathbf{k}z}+1)} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}z}}{\partial\mathbf{k}}\left[-\hat\gamma_{\mathbf{k}x}\left(\frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}y}}{\partial\mathbf{k}}\mathbf{E}\right) + \hat\gamma_{\mathbf{k}y}\left(\frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}x}}{\partial\mathbf{k}}\mathbf{E}\right)\right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}z}}{\partial\mathbf{k}}\mathbf{E}\right)\left[-\hat\gamma_{\mathbf{k}y}\frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}x}}{\partial\mathbf{k}} + \hat\gamma_{\mathbf{k}x}\frac{\partial\hat\gamma_{\mathbf{k}y}}{\partial\mathbf{k}}\right]\right\}. \quad (32)$$

В двумерном случае z-компонента вектора $\gamma_\mathbf{k}$ отсутствует, и $\mathrm{Im}(\mathbf{v}_\pm(\mathbf{v}^\star_\pm\mathbf{E})) = 0$. Следовательно, в двумерных средах высокочастотное электрическое поле в отсутствие релаксации из-за рассеяния электронов на примесях не вызывает диссипативных токов, как и в любых металлах с центром инверсии.

В отличие от этого, в трехмерных средах последний член в уравнении (31), вообще говоря, не равен нулю. Например, можно проверить прямым вычислением, что этот член дает ненулевой диссипативный вклад в ток, направленный перпендикулярно приложенному электрическому полю в металлах с симметрией C_{4v} с вектором $\gamma_{\mathbf{k}}$, задаваемым уравнением (3). Таким образом, мы приходим к выводу, что в трехмерных средах электрическое поле не только ускоряет электроны, но также передает энергию электронному газу, создавая неравновесные состояния с недиагональной матричной функцией распределения. Это необычное явление — специфичное для трехмерных материалов без центра инверсии.

Интегралы в двух последних членах уравнения (31) берутся по области обратного пространства между k_{F+} и k_{F-}, где $\varepsilon_+ - \varepsilon_- \approx 2\gamma k_F$. При сравнительно низких частотах $\omega \ll 2\gamma k_F$, но все еще в бесстолкновительной области $\omega > \tau^{-1}$ уравнение (31) принимает вид

$$\mathbf{j} = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\mathbf{v}_+(\mathbf{v}_+\mathbf{E})}{i\omega} \frac{\partial n_+}{\partial \xi_+} + \frac{\mathbf{v}_-(\mathbf{v}_-\mathbf{E})}{i\omega} \frac{\partial n_-}{\partial \xi_-} - \right. \\ \left. - 2(n_+ - n_-)\,\mathrm{Im}(\mathbf{v}_\pm(\mathbf{v}^\star_\pm \mathbf{E})) \right\}. \quad (33)$$

2. Слабое рассеяние на примесях. Режим слабого рассеяния на примесях реализуется при $\tau^{-1} \ll \ll 2\gamma k_F$. В этом случае можно пренебречь столкновительными членами в кинетических уравнениях для недиагональных элементов функции распределения. Таким образом, решения для недиагональных матричных элементов по-прежнему задаются формулами (29) и (30). После подстановки этих решений в интеграл столкновений в уравнениях для диагональных элементов функции распределения мы придем к уравнениям

$$- i\omega g_+ + e(\mathbf{v}_+\mathbf{E}))\frac{\partial n_+}{\partial \xi_+} = 4\pi n_i \int \frac{d^3k}{2\pi^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times \\ \times \left\{ O_{++}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{++}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_+(\mathbf{k}') - g_+(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_+ - \varepsilon_+) + \right. \\ + O_{+-}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{-+}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_-(\mathbf{k}') - \\ \left. - g_+(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_- - \varepsilon_+) \right\}, \quad (34)$$

$$- i\omega g_- + e(\mathbf{v}_-\mathbf{E}))\frac{\partial n_-}{\partial \xi_-} = 4\pi n_i \int \frac{d^3k}{2\pi^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times \\ \times \left\{ O_{-+}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{+-}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_+(\mathbf{k}') - g_-(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_+ - \varepsilon_-) + \right. \\ + O_{--}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{--}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_-(\mathbf{k}') - \\ \left. - g_-(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_- - \varepsilon_-) \right\}, \quad (35)$$

полученным в пренебрежении столкновительными членами, с недиагональными элементами функции распределения, которые оказываются в $\gamma k_F \tau \gg 1$ раз меньше чем столкновительные члены, зависящие от диагональных элементов функции распределения. Видно, что даже в пределе слабого рассеяния на примесях релаксация диагональной части функции распределения к равновесию определяется четырьмя разными столкновительными членами.

Было предпринято несколько попыток [2–4] решить эти уравнения для двумерной модели Рашба в борновском приближении. В этом случае произведения

$$O_{++}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{++}(\mathbf{k}'\mathbf{k}) = O_{--}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{--}(\mathbf{k}'\mathbf{k}) = \\ = \cos^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2},$$

$$O_{+-}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{-+}(\mathbf{k}'\mathbf{k}) = O_{-+}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{+-}(\mathbf{k}'\mathbf{k}) = \\ = -\sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}$$

зависят от разности азимутальных углов начального и конечного импульсов. В борновском приближении интеграл столкновений выражается через фурье-компоненту потенциала примеси, зависящую от переданного импульса $V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, т. е. тоже зависит от $\varphi - \varphi'$. Это позволяет искать решение уравнений (34), (35) в следующем виде:

$$g_+ = -ea_+ \frac{\partial n_+}{\partial \xi_+}(\mathbf{v}_+\mathbf{E}), \\ g_- = -ea_- \frac{\partial n_-}{\partial \xi_-}(\mathbf{v}_-\mathbf{E}), \quad (36)$$

как это было сделано в работе [4], где были найдены коэффициенты $a_\pm$. В этом случае выражение для тока имеет вид

$$\mathbf{j} = e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \times \\ \times \left\{ a_+\mathbf{v}_+(\mathbf{v}_+\mathbf{E})\frac{\partial n_+}{\partial \xi_+} + a_-\mathbf{v}_-(\mathbf{v}_-\mathbf{E})\frac{\partial n_-}{\partial \xi_-} \right\}. \quad (37)$$

Этот подход легко обобщается на случай конечной частоты.

Аналогичные вычисления можно проделать для другой двумерной модели — модели Дрессельхауза [10], где $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = \gamma_D(k_y\hat{y} - k_x\hat{x})$, но не для модели, где вектор $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$ представляет сумму этих векторов в моделях Рашба и Дрессельхауза.

Решения уравнений (34) и (35) для других двумерных и трехмерных моделей можно искать лишь численными методами.

В трехмерном случае в условиях слабого рассеяния на примесях выражение для плотности тока имеет вид

$$\mathbf{j} = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \mathbf{v}_+(\mathbf{w}_+\mathbf{E}) + \mathbf{v}_-(\mathbf{w}_-\mathbf{E}) - \right. \\ \left. - 2(n_+ - n_-)\,\mathrm{Im}(\mathbf{v}_\pm(\mathbf{v}^\star_\pm \mathbf{E})) \right\}. \quad (38)$$

Здесь два первых члена определяются решениями уравнений (34) и (35), а последний член — дополнительный диссипативный ток, определяемый недиагональными элементами матричной функции распределения, как и в бесстолкновительном случае.

3. Сильное рассеяние на примесях. Режим сильного рассеяния на примесях реализуется, когда типичное обратное время рассеяния оказывается порядка энергии спин-орбитального расщепления зон $\tau^{-1} \approx \gamma k_F$. В этом случае при выполнении условия $\gamma k_F \ll \varepsilon_F$ квазиклассическая теория остается применимой к описанию кинетических явлений, но необходимо решать полную систему из четырех кинетических уравнений для диагональных и недиагональных матричных элементов функции распределения.

3.3. Спиновый ток

Электрическое поле в кристаллах без центра инверсии порождает спиновый ток. Плотность спинового тока имеет вид

$$\mathbf{j}_i = e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma_1} \frac{\partial \varepsilon_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{k})}{\partial k_i} g_{\sigma_2\sigma}(\mathbf{k},\omega). \quad (39)$$

Переходя к зонному представлению, так же как это было сделано для электрического тока, получим выражения для проекций плотности спинового тока на оси координат

$$j_{xi} = e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ [v_{+i}(\mathbf{w}_\pm\mathbf{E}) + v_{-i}(\mathbf{w}_\mp\mathbf{E})] + \right. \\ \left. + [v_{\pm i}(\mathbf{w}_-\mathbf{E}) - v_{\mp i}(\mathbf{w}_+\mathbf{E})](\varepsilon_- - \varepsilon_+) \right\}, \quad (40)$$

$$j_{yi} = ie \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ [v_{+i}(\mathbf{w}_\pm\mathbf{E}) - v_{-i}(\mathbf{w}_\mp\mathbf{E})] + \right. \\ \left. + [v_{\pm i}(\mathbf{w}_-\mathbf{E}) + v_{\mp i}(\mathbf{w}_+\mathbf{E})](\varepsilon_- - \varepsilon_+) \right\}, \quad (41)$$

$$j_{zi} = e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ [v_{+i}(\mathbf{w}_+\mathbf{E}) - v_{-i}(\mathbf{w}_-\mathbf{E})] + \right. \\ \left. + [v_{\pm i}(\mathbf{w}_\mp\mathbf{E}) + v_{\mp i}(\mathbf{w}_\pm\mathbf{E})](\varepsilon_- - \varepsilon_+) \right\}. \quad (42)$$

В бесстолкновительном режиме решения кинетического уравнения даются формулами (27)–(30). В двумерном случае выражения для скоростей (20) имеют вид

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{k}}, \quad \mathbf{v}_\pm = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\hat{\gamma}_{\mathbf{k}x} - i\hat{\gamma}_{\mathbf{k}y})}{\partial \mathbf{k}}. \quad (43)$$

Очевидно, «диагональные» скорости — нечетные функции волнового вектора $\mathbf{v}_\alpha(-\mathbf{k}) = -\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{k})$, тогда как «недиагональные» скорости — четные функции волнового вектора $\mathbf{v}_\pm(-\mathbf{k}) = \mathbf{v}_\pm(\mathbf{k})$. Таким образом, баллистические спиновые токи (40), (41) тождественно равны нулю:

$$j_{xi} = j_{yi} = 0. \quad (44)$$

Чтобы найти спиновый ток в случае слабого рассеяния на примесях, можно использовать недиагональные матричные элементы функции распределения (29), (30), но для нахождения диагональных элементов надо решать уравнения (34), (35). Для модели Рашба в борновском приближении решения этих уравнений имеют вид (36). Таким образом, в этом случае спиновый ток также обращается в нуль в силу симметрийных свойств «диагональных» и «недиагональных» скоростей.

В трехмерном случае недиагональные скорости (20) не есть четные функции волнового вектора. Спиновый ток, вызванный электрическим полем, приобретает конечную величину. Так же как и электрический ток, спиновый ток даже в баллистическом режиме состоит из реактивной и диссипативной составляющих.

3.4. Поток тепла

При наличии градиента температуры матричное кинетическое уравнение для неравновесной функции распределения $g_{\alpha\beta}$ есть

$$-\frac{1}{T}\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_+\nabla T)\xi_+\dfrac{\partial n_+}{\partial \xi_+} & \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}_\pm\nabla T)(\varepsilon_- - \varepsilon_+)\left(\xi_+\dfrac{\partial n_+}{\partial \xi_+} + \xi_-\dfrac{\partial n_-}{\partial \xi_-}\right) \\ \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}_\mp\nabla T)(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)\left(\xi_+\dfrac{\partial n_+}{\partial \xi_+} + \xi_-\dfrac{\partial n_-}{\partial \xi_-}\right) & (\mathbf{v}_-\nabla T)\xi_-\dfrac{\partial n_-}{\partial \xi_-} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & ig_\pm(\varepsilon_- - \varepsilon_+) \\ ig_\mp(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) & 0 \end{pmatrix} = I_{\alpha\beta}. \quad (45)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_+ & g_\pm \\ g_\mp & g_- \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{T} \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_+\nabla T) & (\mathbf{u}_\pm\nabla T) \\ (\mathbf{u}_\mp\nabla T) & (\mathbf{u}_-\nabla T) \end{pmatrix}. \quad (46)$$

После подстановки этой матрицы в уравнение (45) и в интеграл столкновений (21) мы получим четыре уравнения, соответствующие каждому матричному элементу матрицы (46) для четырех зависящих от $\mathbf{k}$ скалярных функций $(\mathbf{u}_+\nabla T)$, $(\mathbf{u}_\pm\nabla T)$, $(\mathbf{u}_\mp\nabla T)$, $(\mathbf{u}_-\nabla T)$.

Плотность потока тепла есть

$$\mathbf{q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \xi_{\sigma\sigma_1}(\mathbf{k}) \frac{\partial \varepsilon_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} g_{\sigma_2\sigma}(\mathbf{k}). \quad (47)$$

Преобразуя это выражение к зонному представлению, получим

$$\mathbf{q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{\xi_+\mathbf{v}_+g_+ + \xi_-\mathbf{v}_-g_- + \\ + [\xi_+\mathbf{v}_\pm g_\mp - \xi_-\mathbf{v}_\mp g_\pm](\varepsilon_- - \varepsilon_+)\}. \quad (48)$$

Подставляя в это выражение $g_{\alpha\beta}$ из (46), приходим к

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{T} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{\xi_+\mathbf{v}_+(\mathbf{u}_+\nabla T) + \xi_-\mathbf{v}_-(\mathbf{u}_-\nabla T) + \\ + [\xi_+\mathbf{v}_\pm(\mathbf{u}_\mp\nabla T) - \xi_-\mathbf{v}_\mp(\mathbf{u}_\pm\nabla T)](\varepsilon_- - \varepsilon_+)\}. \quad (49)$$

Чтобы найти поток тепла в случае слабого рассеяния на примесях, можно использовать недиагональные матричные элементы функции распределения, полученные в пренебрежении столкновениями

$$g_\pm = -\frac{i}{2T}(\mathbf{v}_\pm\nabla T)\left(\xi_+\frac{\partial n_+}{\partial \xi_+} + \xi_-\frac{\partial n_-}{\partial \xi_-}\right), \quad (50)$$

$$g_\mp = -\frac{i}{2T}(\mathbf{v}_\mp\nabla T)\left(\xi_+\frac{\partial n_+}{\partial \xi_+} + \xi_-\frac{\partial n_-}{\partial \xi_-}\right). \quad (51)$$

Тогда как диагональные матричные элементы должны быть найдены из уравнений

$$-\frac{1}{T}(\mathbf{v}_+\nabla T)\xi_+\frac{\partial n_+}{\partial \xi_+} = 4\pi n_i \int \frac{d^3k}{2\pi^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times \\ \times \{O_{++}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{++}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_+(\mathbf{k}') - g_+(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_+ - \varepsilon_+) + \\ + O_{+-}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{-+}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_-(\mathbf{k}') - \\ - g_+(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_- - \varepsilon_+)\}, \quad (52)$$

$$-\frac{1}{T}(\mathbf{v}_-\nabla T)\xi_-\frac{\partial n_-}{\partial \xi_-} = 4\pi n_i \int \frac{d^3k}{2\pi^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times \\ \times \{O_{-+}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{+-}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_+(\mathbf{k}') - g_-(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_+ - \varepsilon_-) + \\ + O_{--}(\mathbf{k}\mathbf{k}')O_{--}(\mathbf{k}'\mathbf{k})[g_-(\mathbf{k}') - \\ - g_-(\mathbf{k})]\delta(\varepsilon'_- - \varepsilon_-)\}. \quad (53)$$

4. РОЛЬ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Задача о рассеянии электронов на электронах в металлах без центра инверсии решалась в работе автора [11]. Вычисления проводились с использованием электрон-электронного интеграла столкновений для матричной спиновой функции распределения, выведенного в работах [12,13] (см. уравнения (B.1), (B.2) в Приложении B). Этот интеграл столкновений, давая правильное описание релаксационных процессов для установления равновесия в спиновом распределении ферми частиц в средах с ненарушенной зеркальной симметрией, не годится для описания релаксации в системах без центра инверсии. Таким образом, подход, использованный в работе [11], неверен. Электрон-электронный интеграл столкновений в средах без центра инверсии имеет значительно более сложный вид (B.1), (B.3). Тем не менее, главное утверждение работы [11] о том, что характерное время рассеяния электронов на электронах оказывается конечным при нулевой температуре, остается справедливым.

В равновесном состоянии интеграл (B.1), (B.3) обращается в нуль. При отклонении от равновесного распределения столкновительный член отличен от нуля даже при нулевой температуре. Дело в том, что даже при нулевой температуре квазичастицы имеют возможность рассеяться в незанятые состояния между двумя ферми-поверхностями, соответствующими двум зонам, расщепленным спин-орбитальным взаимодействием. Аналогичная ситуация имеет место в поляризованном жидком ^{3}He, где время релаксации для спиновой диффузии в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю, имеет конечную величину и при $T = 0$, благодаря возможности рассеяния в состояния между ферми-поверхностями частиц со спином вверх и вниз, имеющими разные радиусы [13–15]. Здесь будет уместно напомнить также замечание Херринга [16] в отношении релаксации в ферромагнетиках: «В любом ферромагнитном металле..., если спин квазичастицы на ферми-поверхности будет перевернут, соответствующее квазичастичное состояние не будет оставаться вблизи ферми-поверхности, но будет иметь конечную, а не бесконечно малую скорость распада».

Конечная скорость распада при нулевой температуре вызывает сомнения в применимости ферми-жидкостного описания электронов в металлах без центра инверсии. Оценка, сделанная в работе [11], а также более тщательные вычисления для поляризованного ферми-газа [17] позволяют выразить уверенность в применимости теории ферми-жидкости при условии, что расщепление ферми-поверхностей в импульсном пространстве мало по сравнению с энергией Ферми:

$$v_F(k_{F-} - k_{F+}) \ll \varepsilon_F. \tag{54}$$

Спин-орбитальное расщепление зон $v_F \Delta k_F$ прямо выражается через соответствующее расщепление частот в осцилляциях намагниченности [18] (эффект де Гааза–ван Альфена). Измеренная экспериментально типичная величина зонного расщепления в ряде металлических соединений без центра инверсии порядка нескольких сот Кельвин [19–21], что значительно меньше типичной энергии Ферми.

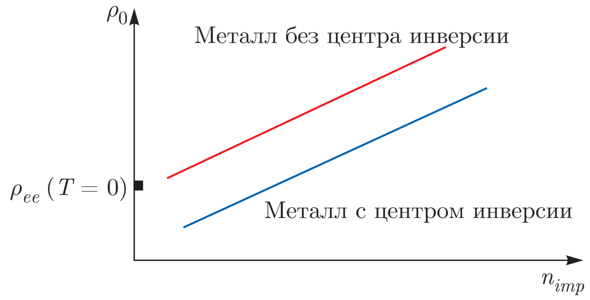
Из-за конечного времени релаксации, определяемой электрон-электронными столкновениями, остаточное сопротивление в металлах без центра инверсии складывается из двух частей, определяемых рассеянием электронов на примесях и рассеяния электронов на электронах:

$$\rho = \rho_{ee}(T = 0) + \rho_{imp}. \tag{55}$$

Мы игнорируем здесь тензорный характер удельного сопротивления. Примесное сопротивление пропорционально концентрации примесей $\rho_{imp} \propto n_{imp}$. Следовательно, остаточное сопротивление из-за электрон-электронного рассеяния $\rho_{ee}(T = 0)$ может быть найдено измерением сопротивления при низкой температуре при разных концентрациях примесей с последующим нахождением формального предела

$$\rho_{ee}(T = 0) = \rho(n_{imp} \to 0). \tag{56}$$

Соответствующее поведение изображено на рисунке. Разумеется, кристалл должен быть как можно ближе к идеальному, ибо наличие дислокаций, двойников и дефектов упаковки может полностью скрыть роль электрон-электронного рассеяния в формировании остаточного сопротивления. Насыщение электрон-электронного вклада в сопротивление возможно служит объяснением отсутствия обычной зависимости сопротивления пропорциональной T^2, наблюденного в недавних экспериментах [22].



Остаточное сопротивление

По той же причине остаточное тепловое сопротивление в металлах без центра инверсии складывается из теплового сопротивления за счет рассеяния электронов на примесях и теплового сопротивления, обусловленного электрон-электронным рассеянием:

$$T/\kappa = d_{imp} + d_{ee}(T = 0). \tag{57}$$

Здесь κ — коэффициент теплопроводности. Отношение теплового сопротивления к сопротивлению при низких температурах пропорционально температуре в соответствии с законом Видемана – Франца

$$\kappa/\sigma = AT. \tag{58}$$

Однако коэффициент пропорциональности не есть универсальное число Лоренца, но может быть разным даже для образцов одного и того же соединения разной чистоты .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Спин-орбитальное взаимодействие в металлах без центра инверсии снимает спиновое вырождение электронных состояний и расщепляет каждую зону проводимости на две зоны с разными ферми-импульсами. Кинетика металлов без центра инверсии описывается четырьмя кинетическими уравнениями для диагональных (внутризонных) и недиагональных (межзонных) элементов матричной функции распределения. В отличие от материалов, обладающих центром инверсии, в веществах с нарушенной зеркальной симметрией внешние силы не только ускоряют электроны, но и передают энергию электронному газу, создавая неравновесные состояния с недиагональной матричной функцией распределения, что порождает диссипативные потоки заряда, спина и тепла даже в бесстолкновительном режиме. Это чисто трехмерное явление, отсутствующее в двумерных средах. Теория транспорта заряда, спина и тепла сильно упрощается в пределе слабого рассеяния на примесях, когда типичное обратное время рассеяния не превышает энергию спин-орбитального расщепления зон. В этом случае можно пользоваться недиагональными элементами функции распределения, полученными в пренебрежении столкновениями, и решать лишь уравнения для диагональных матричных элементов. Проделан вывод интегралов столкновений электронов с примесями и друг с другом. Показано, что наряду с рассеянием на примесях рассеяние электронов на электронах дает вклад в остаточное сопротивление и в остаточное тепловое сопротивление при нулевой температуре.

ПРИЛОЖЕНИЕ A

Интеграл столкновений электронов с примесями

Интеграл столкновений электронов с примесями в операторной форме [23] для пространственно-однородных систем имеет вид

$$\hat{I}_{\sigma\sigma'} = n_{imp}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}|V(\mathbf{q})|^2 \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau e^{\lambda\tau}\hat{A}_{\sigma\sigma'}(\tau,t), \quad (\mathrm{A}.1)$$

где $\lambda \to +0$ и подынтегральное выражение в линейном приближении по медленноменяющейся во времени матрице плотности $\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)$ дается формулой

$$\hat{A}_{\sigma\sigma'}(\tau,t) = \Big[\exp(i\hat{h}_{\sigma\sigma_1}\tau)[e^{i\mathbf{qr}},\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)] \times \\ \times \exp(-i\hat{h}_{\sigma_2\sigma'}\tau), e^{-i\mathbf{qr}}\Big]. \quad (\mathrm{A}.2)$$

Здесь квадратные скобки означают коммутатор, $\sigma,\sigma_1,\ldots$ — спиновые индексы,

$$\hat{h}_{\sigma\sigma_1} = \hat{\varepsilon}_{\sigma\sigma_1}\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right) \quad (\mathrm{A}.3)$$

— гамильтониан не взаимодействующих электронов, определяемый выражением (2) в координатном представлении. Его собственные функции удовлетворяют уравнению

$$\hat{h}_{\sigma\sigma_1}e^{i\mathbf{kr}}\Psi^{\alpha}_{\sigma_1}(\mathbf{k}) = \varepsilon_\alpha e^{i\mathbf{kr}}\Psi^{\alpha}_{\sigma}(\mathbf{k}). \quad (\mathrm{A}.4)$$

В обозначениях Дирака они записываются как

$$e^{i\mathbf{kr}}\Psi^{\alpha}_{\sigma}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}\rangle\Psi^{\alpha}_{\sigma}(\mathbf{k}).$$

Чтобы преобразовать интеграл столкновений из координатного в импульсное представление и в то же время из спинового в зонное представление нужно сосчитать матричный элемент от выражения (A.2)

$$\Psi^{\alpha\star}_{\sigma}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|A_{\sigma\sigma'}(\tau,t)|\mathbf{k}'\rangle\Psi^{\beta}_{\sigma'}(\mathbf{k}) = \int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\times \\ \times\Big\{\Psi^{\alpha\star}_{\sigma}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|\exp(i\hat{h}_{\sigma\sigma_1}\tau)e^{i\mathbf{qr}}\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)\times \\ \times\exp(-i\hat{h}_{\sigma_2\sigma'}\tau)|\mathbf{k}'\rangle\Psi^{\mu}_{\sigma'}(\mathbf{k}')\Psi^{\mu\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')\langle\mathbf{k}'|e^{-i\mathbf{qr}}|\mathbf{k}\rangle\Psi^{\beta}_{\sigma_3}(\mathbf{k}) - \\ -\Psi^{\alpha\star}_{\sigma}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|\exp(i\hat{h}_{\sigma\sigma_1}\tau)\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)e^{i\mathbf{qr}}\times \\ \times\exp(-i\hat{h}_{\sigma_2\sigma'}\tau)|\mathbf{k}'\rangle\Psi^{\mu}_{\sigma'}(\mathbf{k}')\Psi^{\mu\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')\langle\mathbf{k}'|e^{-i\mathbf{qr}}|\mathbf{k}\rangle\Psi^{\beta}_{\sigma_3}(\mathbf{k}) - \\ -\Psi^{\alpha\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|e^{-i\mathbf{qr}}|\mathbf{k}'\rangle\Psi^{\nu}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')\Psi^{\nu\star}_{\sigma}(\mathbf{k}')\langle\mathbf{k}|\times \\ \times\exp(i\hat{h}_{\sigma\sigma_1}\tau)e^{i\mathbf{qr}}\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)\exp(-i\hat{h}_{\sigma_2\sigma'}\tau)|\mathbf{k}\rangle\Psi^{\beta}_{\sigma'}(\mathbf{k}) + \\ +\Psi^{\alpha\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|e^{-i\mathbf{qr}}|\mathbf{k}'\rangle\Psi^{\nu}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')\Psi^{\nu\star}_{\sigma}(\mathbf{k}')\langle\mathbf{k}|\times \\ \times\exp(i\hat{h}_{\sigma\sigma_1}\tau)\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)e^{i\mathbf{qr}}\exp(-i\hat{h}_{\sigma_2\sigma'}\tau)|\mathbf{k}\rangle\Psi^{\beta}_{\sigma'}(\mathbf{k})\Big\} + \\ +\mathrm{h.c.} \quad (\mathrm{A}.5)$$

Воспользуемся теперь уравнением (A.4) и условиями ортогональности (7). Для первого члена в выражении (A.5) это дает

$$\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\Psi^{\alpha\star}_{\sigma}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|\exp(i\hat{h}_{\sigma\sigma_1}\tau)e^{i\mathbf{qr}}\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)\times \\ \times\exp(-i\hat{h}_{\sigma_2\sigma'}\tau)|\mathbf{k}'\rangle\Psi^{\mu}_{\sigma'}(\mathbf{k}')\ \Psi^{\mu\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')\langle\mathbf{k}'|e^{-i\mathbf{qr}}|\mathbf{k}\rangle\times \\ \times\Psi^{\beta}_{\sigma_3}(\mathbf{k}) + \mathrm{h.c.} = \int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\Psi^{\alpha\star}_{\sigma}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|\exp(i\varepsilon_\alpha\tau)\times \\ \times\Psi^{\nu}_{\sigma_1}(\mathbf{k}')\Psi^{\nu\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{qr}}\rho_{\sigma_3\sigma_2}(\mathbf{r},t)\exp(-i\varepsilon'_\mu\tau)|\mathbf{k}'\rangle\times \\ \times\Psi^{\mu}_{\sigma_2}(\mathbf{k}')\Psi^{\mu\star}_{\sigma_3}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{q}-\mathbf{k})\Psi^{\beta}_{\sigma_3}(\mathbf{k}) + \mathrm{h.c.} \quad (\mathrm{A}.6)$$

Подставляя эту формулу в уравнение (A.1) и выполняя интегрирования по d^3q и по τ, приходим к

$$2\pi n_{imp}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}|V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 O_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}')f_{\nu\mu}(\mathbf{k}')\times \\ \times O_{\mu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_\beta), \quad (\mathrm{A}.7)$$

где

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \Psi^{\alpha\star}_{\sigma_1}(\mathbf{k})\langle\mathbf{k}|\rho_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r},t)|\mathbf{k}\rangle\Psi^{\beta}_{\sigma_2}(\mathbf{k}), \quad (\mathrm{A}.8)$$

$\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm(\mathbf{k})$, $\varepsilon'_\pm = \varepsilon_\pm(\mathbf{k}')$ и

$$O_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \Psi^{\alpha\star}_{\sigma}(\mathbf{k})\Psi^{\beta}_{\sigma}(\mathbf{k}'), \quad (\mathrm{A}.9)$$

так что $O_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = O^{\star}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}',\mathbf{k})$. Выполняя аналогичные преобразования с остальными членами в (A.5), приходим к выражению для интеграла столкновений электронов с примесями в зонном представлении:

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 2\pi n_{imp} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times$$
$$\times \{O_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}') [f_{\nu\mu}(\mathbf{k}')O_{\mu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) - O_{\nu\mu}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) f_{\mu\beta}(\mathbf{k})] \times$$
$$\times \delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_\beta) +$$
$$+ [O_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}') f_{\nu\mu}(\mathbf{k}') - f_{\alpha\nu}(\mathbf{k}) O_{\nu\mu}(\mathbf{k},\mathbf{k}')] \times$$
$$\times O_{\mu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta(\varepsilon'_\mu - \varepsilon_\alpha)\} . \quad (A.10)$$

Интеграл столкновений для функций распределения, меняющихся в пространстве на масштабах, больших по сравнению с межэлектронными расстояниями, имеет такой же вид.

Можно переписать интеграл столкновений для матричной функции распределения в виде интеграла для функции распределения в «векторной» форме:

$$f^j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \sigma^j_{\beta\alpha}, \quad (A.11)$$

где $\sigma^j_{\beta\alpha} = (\delta_{\beta\alpha}, \sigma^x_{\beta\alpha}, \sigma^y_{\beta\alpha}, \sigma^z_{\beta\alpha})$ — матричный вектор с компонентами из базиса двухкомпонентных матриц Паули и единичной матрицы. В результате получим интеграл столкновений, удивительно похожий на стандартное диагональное по спиновым индексам выражение

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 2\pi n_{imp} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 \times$$
$$\times \Big\{ O_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}') R^j_{\nu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_\beta) + R^j_{\alpha\nu}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \times$$
$$\times O_{\nu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_\alpha) \} \left[f^j(\mathbf{k}') - f^j(\mathbf{k}) \right] . \quad (A.12)$$

Здесь

$$R^0_{\nu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = O^0(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta_{\nu\beta} + O^x(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^x_{\nu\beta} +$$
$$+ O^y(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^y_{\nu\beta} + O^z(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^z_{\nu\beta},$$
$$R^x_{\nu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = O^x(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta_{\nu\beta} + O^0(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^x_{\nu\beta} +$$
$$+ iO^y(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^z_{\nu\beta} - iO^z(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^y_{\nu\beta}, \quad (A.13)$$
$$R^y_{\nu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = O^y(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta_{\nu\beta} + O^0(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^y_{\nu\beta} +$$
$$+ iO^z(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^x_{\nu\beta} - iO^x(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^z_{\nu\beta},$$
$$R^z_{\nu\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = O^z(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \delta_{\nu\beta} O^0(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^z_{\nu\beta} +$$
$$+ iO^x(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^y_{\nu\beta} - iO^y(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \sigma^x_{\nu\beta},$$

и $O^j(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = (1/2) O_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \sigma^j_{\beta\alpha}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Интеграл парных столкновений электронов

Интеграл парных столкновений ферми частиц в Борновском приближении был выведен Силиным [12] и в работе [13] в приложении к жидкому ^{3}He. В металле с учетом процессов переброса он имеет вид

$$\hat{I} = 2\pi \int d^3\mathbf{k}' \frac{d^3\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \times$$
$$\times \sum_{\mathbf{m}} \delta \left(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \frac{2\pi\mathbf{m}}{a} \right) \hat{F}, \quad (B.1)$$

где $2\pi\mathbf{m}/a$ — вектор обратной решетки,

$$\hat{F} = \Big\{ \frac{1}{2} W_1 \left\{ [\hat{n}', (\hat{1} - \hat{n}_1)]_+ \mathrm{Tr}((\hat{1} - \hat{n}_2) n'') - \right.$$
$$\left. - [(\hat{1} - \hat{n}'), \hat{n}_1]_+ \mathrm{Tr}(\hat{n}_2 (\hat{1} - \hat{n}'')) \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} W_2 \left\{ [\hat{n}'(\hat{1} - \hat{n}_2)\hat{n}'', (\hat{1} - \hat{n}_1)]_+ - \right.$$
$$\left. - [(\hat{1} - \hat{n}')\hat{n}_2(\hat{1} - \hat{n}''), \hat{n}_1]_+ \right\} \Big\} \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon' - \varepsilon''). \quad (B.2)$$

Здесь $[\hat{A}, \hat{B}]_+$ означает антикоммутатор матриц A и B и использованы следующие обозначения: $\hat{n}' = \hat{n}(\mathbf{k}')$, $\varepsilon' = \varepsilon(\mathbf{k}')$ и т. п. В изотропной ферми-жидкости типа жидкого ^{3}He

$$W_1 = [V(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'|)]^2,$$

$$W_2 = -V(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'|) V(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}''|)$$

выражаются через фурье-преобразования потенциала взаимодействия квазичастиц. В металле, ввиду экранировки заряда, можно положить их постоянными, не зависящими от передаваемого импульса.

Интеграл парных столкновений может быть также получен из интеграла парных столкновений в операторной форме, выведенного в книге [23], где продемонстрировано, что в случае неравновесных распределений, диагональных по спиновым индексам, интеграл парных столкновений принимает стандартный вид.

Матрица $\hat{F}$ для электрон-электронных столкновений, соответствующая формуле (B.1), в металлах без центра инверсии для матричной функции распределения в зонном представлении имеет вид

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}W_1 \{[O_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')f_{\nu\mu}(\mathbf{k}')O_{\mu\lambda}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_1)(\delta_{\lambda\beta} - f_{\lambda\beta}(\mathbf{k}_1))(\delta_{\xi\eta} - f_{\xi\eta}(\mathbf{k}_2))O_{\eta\zeta}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')f_{\zeta\rho}(\mathbf{k}'')O_{\rho\xi}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_2) -$$
$$- O_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')(\delta_{\nu\mu} - f_{\nu\mu}(\mathbf{k}'))O_{\mu\lambda}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_1)f_{\lambda\beta}(\mathbf{k}_1)f_{\xi\eta}(\mathbf{k}_2)O_{\eta\zeta}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')(\delta_{\zeta\rho} - f_{\zeta\rho}(\mathbf{k}''))O_{\rho\xi}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_2)]\, \delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_{1\beta} - \varepsilon_{2\xi} + \varepsilon''_\zeta) +$$
$$+ [(\delta_{\alpha\nu} - f_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1))O_{\nu\mu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')(\delta_{\mu\lambda} - f_{\mu\lambda}(\mathbf{k}'))O_{\lambda\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_1)(\delta_{\xi\eta} - f_{\xi\eta}(\mathbf{k}_2))O_{\eta\zeta}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')f_{\zeta\rho}(\mathbf{k}'')O_{\rho\xi}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_2) -$$
$$- f_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1))O_{\nu\mu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')f_{\mu\lambda}(\mathbf{k}')O_{\lambda\beta}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_1)f_{\xi\eta}(\mathbf{k}_2)O_{\eta\zeta}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')(\delta_{\zeta\rho} - f_{\zeta\rho}(\mathbf{k}''))O_{\rho\xi}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_2)]\, \delta(\varepsilon_{1\alpha} - \varepsilon'_\mu + \varepsilon_{2\xi} - \varepsilon''_\zeta)\} +$$
$$+ \frac{1}{2}W_2 \{[O_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')f_{\nu\mu}(\mathbf{k}')O_{\mu\lambda}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_2)(\delta_{\lambda\varphi} - f_{\lambda\varphi}(\mathbf{k}_2))O_{\varphi\psi}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')f_{\psi\rho}(\mathbf{k}''))O_{\rho\omega}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_1)(\delta_{\omega\beta} - f_{\omega\beta}(\mathbf{k}_1) -$$
$$- O_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')(\delta_{\nu\mu} - f_{\nu\mu}(\mathbf{k}'))O_{\mu\lambda}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_2)f_{\lambda\varphi}(\mathbf{k}_2)O_{\varphi\psi}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')(\delta_{\psi\rho} - f_{\psi\rho}(\mathbf{k}''))O_{\rho\omega}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_1)f_{\omega\beta}(\mathbf{k}_1] \times$$
$$\times\, \delta(\varepsilon'_\nu - \varepsilon_{1\beta} - \varepsilon_{2\varphi} + \varepsilon''_\psi) + [(\delta_{\alpha\nu} - f_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1)O_{\nu\mu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')f_{\mu\lambda}(\mathbf{k}')O_{\lambda\varphi}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_2)(\delta_{\varphi\psi} - f_{\varphi\psi}(\mathbf{k}_2))O_{\psi\rho}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'') \times$$
$$\times\, f_{\rho\omega}(\mathbf{k}''))O_{\omega\beta}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_1) - f_{\alpha\nu}(\mathbf{k}_1)O_{\nu\mu}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')(\delta_{\mu\lambda} - f_{\mu\lambda}(\mathbf{k}'))O_{\lambda\varphi}(\mathbf{k}',\mathbf{k}_2)f_{\varphi\psi}(\mathbf{k}_2)O_{\psi\rho}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'')(\delta_{\rho\omega} - f_{\rho\omega}(\mathbf{k}'')) \times$$
$$\times\, O_{\omega\beta}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}_1)]\, \delta(\varepsilon_{1\alpha} - \varepsilon'_\mu + \varepsilon_{2\psi} - \varepsilon''_\rho)\}\,. \quad (B.3)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. E. G. Mishchenko and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **68**, 045317 (2003).

2. J. Schliemann and D. Loss, Phys. Rev. **68**, 165311 (2003).

3. Zhian Huang and Liangbin Hu, Phys. Rev. B **73**, 113312 (2006).

4. V. Brosco, L. Benfatto, E. Cappelutti, and C. Grimaldi, Phys. Rev. Lett. **116**, 166602 (2016).

5. В. П. Силин, ЖЭТФ **33**, 1227 (1957) [Sov. Phys. JETP **6**, 945 (1958)].

6. А. Е. Кошелев, В. Я. Кравченко, Д. Е. Хмельницкий, ФТТ **30**, 246 (1988).

7. A. Khaetskii, Phys. Rev. Lett. **96**, 056602 (2006).

8. V. P. Mineev and M. Sigrist, in: *Non-Centrosymmetric Superconductors: Introduction and Overview*, Lecture Notes in Physics, ed. by E. Bauer and M. Sigrist, Vol. 847, Springer, Heidelberg (2012), p. 129.

9. Э. И. Рашба, ФТТ **2**, 1109 (1960).

10. G. Dresselhaus, Phys. Rev. **100**, 580 (1955).

11. V. P. Mineev, Phys. Rev. B **98**, 165121 (2018).

12. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).

13. J. W. Jeon and W. J. Mullin, J. Phys. France **49**, 1691 (1988).

14. A. E. Meyerovich, in *Helium Three*, ed. by W. P. Halperin and L. P. Pitaevskii, Elsevier Sc. Publ., Amsterdam (1990), p. 757.

15. V. P. Mineev, Phys. Rev. B **69**, 144429 (2004).

16. C. Herring, in: *Magnetism*, Vol. IV, ed. by G. T. Rado and H. Suhl, Academic Press, New York and London (1966), p. 345.

17. D. I. Golosov and A. E. Ruckenstein, J. Low Temp. Phys. **112**, 265 (1998).

18. V. P. Mineev and K. V. Samokhin, Phys. Rev. B **72**, 212504 (2005).

19. T. Terashima, M. Kimata, S. Uji, T. Sugawara, N. Kimura, H. Aoki, and H. Harima, Phys. Rev. B **78**, 205107 (2008).

20. Y. Onuki, A. Nakamura, T. Uejo, A. Teruya, M. Hedo, T. Nakama, F. Honda, and H. Harima, J. Phys. Soc. Jpn. **83**, 061018 (2014).

21. A. Maurya, H. Harima, A. Nakamura, Y. Shimizu, Y. Homma, DeXin Li, F. Honda, Y. J. Sato and D. Aoki, J. Phys. Soc. Jpn. **87**, 044703 (2018).

22. Darren C. Peets, Tianping Ying, Xiaoping Shen, Yunjie Yu, Maxim Avdeev, Shiyan Li, and Donglai Feng, Phys. Rev. Mater. **2**, 103403 (2018).

23. F. T. Vasko and O. E. Raichev, *Quantum Kinetic Theory and Applications*, Springer Science+Buisness Media, Inc, New York (2005).