ЖЭТФ, 2018, том 154, вып. 6 (12), стр. 1211–1216

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ЧАСТИЦ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

М. В. Еремин[*], *К. В. Васин*[**]

Институт физики Казанского (Приволжского) федерального университета
420111, Казань, Россия

Поступила в редакцию 29 мая 2018 г.

Получено аналитическое выражение для энергии взаимодействия двух сферически-симметричных частиц через поле деформаций в кубических кристаллах с точностью до квадратичных членов по параметру анизотропии $d = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$. Построены диаграммы областей притяжения и отталкивания частиц, спроектированных на плоскость xy. Найдено, что при $d < 0$ области притяжения формируются преимущественно вдоль осей x и y. При $d > 0$ преимущественным направлением притяжения в линейном приближении по параметру анизотропии d являются диагонали, однако, каждое направление «расщепляется» на два при наличии нелинейных поправок по d. Попутно отмечены ошибки и опечатки в предшествующих работах, выполненных в приближении изотропной среды ($d = 0$) и в линейном приближении по параметру d.

DOI: 10.1134/S0044451018120143

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о взаимодействии точечных дефектов, ионов, электронов или спинов в конденсированных средах имеет богатую историю. Достижения в решении этой проблемы освещены в ряде монографий: Ландау, Лифшица «Теория упругости» [1], Косевича [2], Стоунхэма [3], Эшелби [4], Мура [5] и др. Основополагающей является работа И. М. Лифшица и Розенцвейга [6], в которой был предложен метод решения уравнения упругости через тензор Грина и получен ряд важных соотношений и, в частности, аналитический вид тензора Грина для изотропной среды.

В развитии теории взаимодействия спинов через поле фононов важную роль сыграли работы Аминова, Кочелаева [7] и Орбаха, Тачики [8]. В работе[1)] [9] было доказано, что теория взаимодействия примесных центров произвольной природы через поле деформаций и квантовая теория взаимодействия через поле акустических фононов (в пренебрежении эффектами запаздывания) приводят к одинаковым результатам. При этом было отмечено, что в рамках теории упругости удается быстрее получить компактные аналитические выражения для энергии взаимодействия примесных центров, нежели в квантово-механических расчетах.

Дальнейшие обобщения теории на случай анизотропных сред стали особенно актуальными в связи с начавшимися исследованиями систем с орбитально-вырожденными состояниями ионов переходных металлов [10] и проблемой объяснения природы страйповых структур [11] в манганитах, купратах [12], особенности диффузии в пористых средах [13] и полупроводниках [14]. Кроме того, как это было выяснено еще в работах Эшелби [4], взаимодействие сферически-симметричных включений в изотропной среде вовсе отсутствует. Это обстоятельство дополнительно стимулировало исследования эффектов анизотропии.

Как уже отмечалось [11], анизотропия в кубических кристаллах возникает по двум причинам: 1) параметры связи иона с незаполненной электронной оболочкой с окружающей решеткой в общем случае анизотропны; 2) упругие свойства среды разные вдоль различных направлений. В настоящем сообщении мы обсуждаем наиболее простой, но необходимый для приложений случай: взаимодействующие частицы сферически-симметричны, а кубическая среда характеризуется всеми тремя модулями упругости c_{11}, c_{44} и c_{12}.

[*] E-mail: Mikhail.Eremin@kpfu.ru
[**] E-mail: KVVasin@stud.kpfu.ru

[1)] В формулах (19a) и (19c) допущены опечатки. Вместо $+b$ перед последней круглой скобкой в (19a) должно стоять $(-b)$, а в (19c) вместо -6 должно быть $+6$.

Ниже, как в [6] и последующих работах, будем использовать обозначения $a = c_{12}$, $b = c_{44}$, $d = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$. Случай $d = 0$ соответствует изотропной среде. Полученные к настоящему времени результаты, даже в линейном приближении по параметру анизотропии d противоречивы. Так, в публикациях [15, 16] и затем в [13] отмечалось, что в работе И. М. Лифшица, Розенцвейга упущены важные слагаемые в тензоре Грина, которые тоже линейны по параметру d. Авторы работ [13, 16] предложили новые формулы в качестве решения основного уравнения упругости, однако они не сводятся друг к другу. Кроме того, формула Дедерикса, Лебфрида [16] вошла в ряд монографий по теории взаимодействия дефектов (Стоунхэма [3] и др.), а между тем, как будет попутно показано ниже, она не верна. Основная цель данной работы — получить аналитическое выражение для энергии взаимодействия сферически-симметричных частиц произвольной природы в кубической среде с точностью до квадратичных членов по параметру анизотропии d.

2. ТЕНЗОР ГРИНА В СЛУЧАЕ СЛАБОЙ АНИЗОТРОПИИ

Получить аналитическое решение уравнения упругости для тензора Грина

$$\frac{\partial^2 G_{mn}(\mathbf{r})}{\partial X_j \partial X_l}\lambda_{ijml} + \delta_{in}\delta(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

с упругими постоянными вида

$$\lambda_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\left(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right) + d\delta_{ijkl}, \tag{2}$$

как известно [6], в общем случае невозможно. Можно попытаться найти его в линейном приближении по параметру d. Такая попытка впервые была предпринята в работе [6]. Однако в связи со сложностью расчета корректного выражения для тензора Грина получить не удалось.

Решение уравнения (1) проводится в два этапа. Вначале, как и в работе [6], используется интегральное фурье-преобразование. Получившаяся в результате такой операции система алгебраических уравнений для фурье-образов [5, 9]

$$\begin{aligned} G_{xx}(\mathbf{p}) = {} & [b^2p^4 + b(a+b+d)(p_y^2+p_z^2)p^2 + \\ & + d(2a+2b+d)p_y^2p_z^2]/\Delta, \\ G_{xy}(\mathbf{p}) = {} & G_{yx}(\mathbf{p}) = -(a+b)p_xp_y[dp_z^2+bp^2]/\Delta \end{aligned} \tag{3}$$

решается по формулам Крамера, в которых детерминант Δ записывается в виде

$$\Delta = Ap^6 + B(p_x^2p_y^2 + p_x^2p_z^2 + p_y^2p_z^2)p^2 + Cp_x^2p_y^2p_z^2 \tag{4}$$

при следующих введенных обозначениях:

$$\begin{aligned} & A = b^2(a+2b+d), \quad B = bd(2a+2b+d), \\ & C = d^2(3a+3b+d). \end{aligned} \tag{5}$$

Затем проводится обратное преобразование Фурье

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int G_{ij}(\mathbf{p})\exp^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\,dp^3. \tag{6}$$

Для надежности расчета оно проводилось нами двумя способами. В первом определялись корни знаменателя, фигурирующего в выражениях (3), и затем проводилось интегрирование с использованием интегрального представления δ-функции.

В другом методе множитель $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ раскладывался по сферическим гармоникам

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(pr)Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta_r,\phi_r), \tag{7}$$

где $j_l(pr)$ — сферические функции Бесселя. Свойство ортогональности сферических функций позволяет легко выполнить интегрирование по угловым переменным.

В итоге оба метода привели к одинаковым результатам:

$$\begin{aligned} G_{zz}(\mathbf{r}) = {} & \frac{1}{4\pi br}\Big[1 - \frac{\beta}{2}\Big(1-n_z^2\Big)\Big] - \\ & - \frac{d}{8\pi b^2 r}\Big[n_p^2 - \frac{3\beta}{2}n_p^4 + \frac{\beta^2}{12}\Big(5\left(n_x^6+n_y^6\right) + \\ & + 10\left(1-n_z^6\right) - 21n_p^2n_z^2 - 6\left(n_x^4+n_y^4\right)\Big)\Big], \\ G_{xy}(\mathbf{r}) = {} & \frac{n_xn_y}{8\pi br}\beta - \frac{dn_xn_y}{32\pi b^2 r}\beta \times \\ & \times\Big[3\left(n_z^2+1\right) - \beta\Big(3\left(n_x^2+n_y^2\right) + 5n_z^4 - 5n_x^2n_y^2\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь для краткости используются обозначения

$$n_{x,y,z} = \frac{x,y,z}{r}, \quad n_p = \sqrt{n_x^2+n_y^2}, \quad \beta = \frac{a+b}{a+2b}. \tag{9}$$

Остальные компоненты получаются из приведенных циклической заменой $x \to y \to z \to x$. Этот результат затем был проверен путем непосредственной подстановки в уравнение (1).

Отметим, что решение (8) после некоторых алгебраических преобразований сводится к виду тензора Грина, предложенному Остапчуком [13].

3. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Энергию взаимодействия i-й частицы с полем деформаций, как и в работе [9], запишем в виде

$$H^i = \sigma^i_{\alpha\beta}\nabla^i_\beta u_\alpha(\mathbf{r}_i). \tag{10}$$

Компоненты вектора смещений u_α связаны с тензором деформации $\epsilon_{\alpha\gamma}$ соотношением [1]

$$\epsilon_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha}\right). \quad (11)$$

Формула для энергии взаимодействия дефектов, расположенных в точках $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ через поле деформаций определяется через тензор Грина следующим образом [2][2)]:

$$H_{ij} = \sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^j_{\gamma\eta}\nabla^i_\beta\nabla^i_\eta G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (13)$$

Мы обсуждаем случай частиц со сферической симметрией, поэтому $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta}$. Конкретный вид параметра σ определяется спецификой задачи, т. е. он различен для дефектов структуры, электронных оболочек и т. п. Мы сосредотачиваемся на решении общей для всех этих частиц (а также и квазичастиц) проблемы, связанной с упругими свойствами среды, выступающими в качестве переносчика взаимодействия.

Подставляя в (13) выражения для компонент тензора Грина (8), как и в [13, 14], получаем[3)]

$$H^{(1)}_{ij} = \frac{15d\left(n_x^4 + n_y^4 + n_z^4 - 3/5\right)\sigma^i\sigma^j}{8\pi(a+2b)^2r^3}. \quad (14)$$

Опишем еще один альтернативный вариант расчета, так как комбинирование вторых производных с компонентами тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ при выводе (14) довольно утомительно. Подставляя выражение (6) в (13), проводим дифференцирование и группировку слагаемых под знаком интеграла. В линейном приближении по параметру d (при $r \neq 0$) получаем

$$H^{(1)}_{ij} = -2\frac{\sigma^i\sigma^j}{(2\pi)^3}\frac{d}{(a+2b)^2}\times \\ \times\int\frac{p_x^2p_y^2 + p_x^2p_z^2 + p_y^2p_z^2}{p^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}dp^3. \quad (15)$$

Далее, используя формулу (7) и соотношение ортогональности сферических функций, приходим к выражению

$$H^{(1)}_{ij} = \frac{\sigma^i\sigma^j}{2\pi^2}\frac{d}{(a+2b)^2}\left[\frac{x^4+y^4+z^4}{r^4} - \frac{3}{5}\right]\times \\ \times\int_0^\infty j_4(pr)p^2dp. \quad (16)$$

Оставшийся интеграл вычисляется по известной формуле

$$\int_0^\infty p^2 j_l(pr)\,dp = \frac{\pi}{r^3 2^{l/2}}\frac{(l+1)!!}{(l/2-1)!}. \quad (17)$$

Итоговое выражение совпадает с (14). Отметим, что описанный метод расчета весьма эффективен и поэтому мы используем его для расчета квадратичной по d поправки к энергии взаимодействия. В импульсном представлении она определяется выражением

$$H^{(2)}_{ij} = \frac{\sigma_i\sigma_j d^2}{(2\pi)^3b^2(a+2b)}\times \\ \times\left\{\frac{4b(a+b)}{(2b+a)^2}\int_0^\infty\frac{(p_x^2p_y^2+p_x^2p_z^2+p_y^2p_z^2)^2}{p^8}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}dp^3 + \right. \\ + \frac{b(2b-a)}{(2b+a)^2}\int_0^\infty\frac{(p_x^2p_y^2+p_x^2p_z^2+p_y^2p_z^2)}{p^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}dp^3 - \\ \left. - \frac{3b}{(a+2b)}\int_0^\infty\frac{p_x^2p_y^2p_z^2}{p^6}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}dp^3\right\}. \quad (18)$$

В координатном представлении результат удобно записать в виде разложения по функциям, преобразующимся по единичному (Γ_1) представлению кубических точечных групп [19], т. е. следующим образом:

$$H^{(2)}_{ij} = \frac{\sigma_i\sigma_j d^2}{r^3 2\pi b^2(2b+a)}\times \\ \times\left\{A_4C(4,\Gamma_1) + A_6C(6,\Gamma_1) + A_8C(8,\Gamma_1)\right\}, \quad (19)$$

[2)] Во избежание недоразумений здесь мы явно указываем, что дифференцирование проводится по переменным одного и того же узла. Это обстоятельство, как нам представляется, не было учтено в работе [17] при выводе энергии взаимодействия примесей в стеклах. Формула в (17) не согласуется с результатом, полученным по квантовой теории [9]. Выражение для энергии взаимодействия в изотропной среде, записанное через скорости продольного и поперечного звука $v_l = \sqrt{(a+2b)/\rho}$, $v_t = \sqrt{b/\rho}$, соответствующее квантовой теории, имеет вид

$$H^{(0)}_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho r^3_{ij}v_t^2}\left[3\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^j_{\gamma\alpha}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} - \sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^j_{\alpha\beta}\right] + \\ + \frac{1}{8\pi\rho r^3_{ij}}\left(\frac{1}{v_t^2} - \frac{1}{v_l^2}\right)\left[15\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^j_{\gamma\delta}\frac{x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta}{r^2} - 3(4\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^j_{\gamma\alpha} + \right. \\ \left. + \sigma^i_{\alpha\alpha}\sigma^j_{\gamma\beta} + \sigma^i_{\gamma\beta}\sigma^j_{\alpha\alpha})\frac{x_\gamma x_\beta}{r^2} + 2\sigma^i_{\alpha\beta}\sigma^j_{\alpha\beta} + \sigma^i_{\alpha\alpha}\sigma^j_{\beta\beta}\right]. \quad (12)$$

Приведенная формула (12) по общему знаку соответствует также формуле (2.7) работы [18], полученной в рамках теории упругости для изотропной среды. Что касается отличия (12) от выражения (16) в работе [9], то оно связано с допущенными при печати опечатками.

[3)] Причина ошибки Эшелби в знаке перед энергией взаимодействия дефектов пояснена в работах [13, 14].

где

$$C(4,\Gamma_1) = \frac{5}{2}\Big\{z^4 + x^4 + y^4 - \frac{3}{5}r^4\Big\}\frac{1}{r^4},$$
$$C(6,\Gamma_1) = \frac{1}{2}\Big\{7(z^6 + x^6 + y^6) + {} + 210x^2y^2z^2 - 5r^6\Big\}\frac{1}{r^6}, \qquad (20)$$
$$C(8,\Gamma_1) = \Big\{(z^8 + y^8 + x^8) + {} + 35(x^4y^4 + x^4z^4 + z^4y^4) - 14(z^6x^2 + y^6x^2 + {} + z^6y^2 + y^6z^2 + x^6y^2 + x^6z^2)\Big\}\frac{1}{r^8}.$$

Коэффициенты разложения A_i равны

$$A_4 = -\frac{9}{286}\,\frac{b(3a+68b)}{(a+2b)^2},\; A_6 = \frac{1}{88}\,\frac{b(14b-a)}{(a+2b)^2}, \quad A_8 = \frac{63}{104}\,\frac{b(a+b)}{(a+2b)^2}. \qquad (21)$$

Величины A_4, A_6 и A_8 могут быть записаны через скорости продольного и поперечного звука в кристалле. Так, например, если выбрать в качестве направлений оси четвертого и третьего порядков, то три минимально необходимые скорости звука выражаются через a, b и d следующим образом [20]:

$$\nu_{t4} = \nu_{t2} = \sqrt{b/\rho}, \quad \nu_{l4} = \nu_{l2} = \sqrt{(d+a+2b)/\rho}, \quad \nu_{l3} = \sqrt{(d+2a+4b)/\rho}. \qquad (22)$$

4. ДИАГРАММЫ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ И ОТТАЛКИВАНИЯ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Область применения теории взаимодействия сферических частиц довольно широка. В качестве еще одной, не упомянутой во введении, укажем физику соединений, активированных редкоземельными ионами. Электрон-деформационное взаимодействие с окружающими ионами решетки главным образом определяется перекрыванием заполненных (т. е. сферически-симметричных) внешних $5s$- и $5p$-оболочек с ионами решетки. Так, по расчетам Малкина [21] при внедрении редкоземельных ионов в кристаллы типа флюорита (CaF_2) параметр электрон-деформационного взаимодействия $\sigma_{\alpha\alpha} \sim$ 2–7 эВ. На расстояниях r = 7 Å получаем энергию отталкивания вдоль осей четвертого порядка 10^{-3}–10^{-2} эВ и энергию притяжения 10^{-4}–10^{-3} эВ.

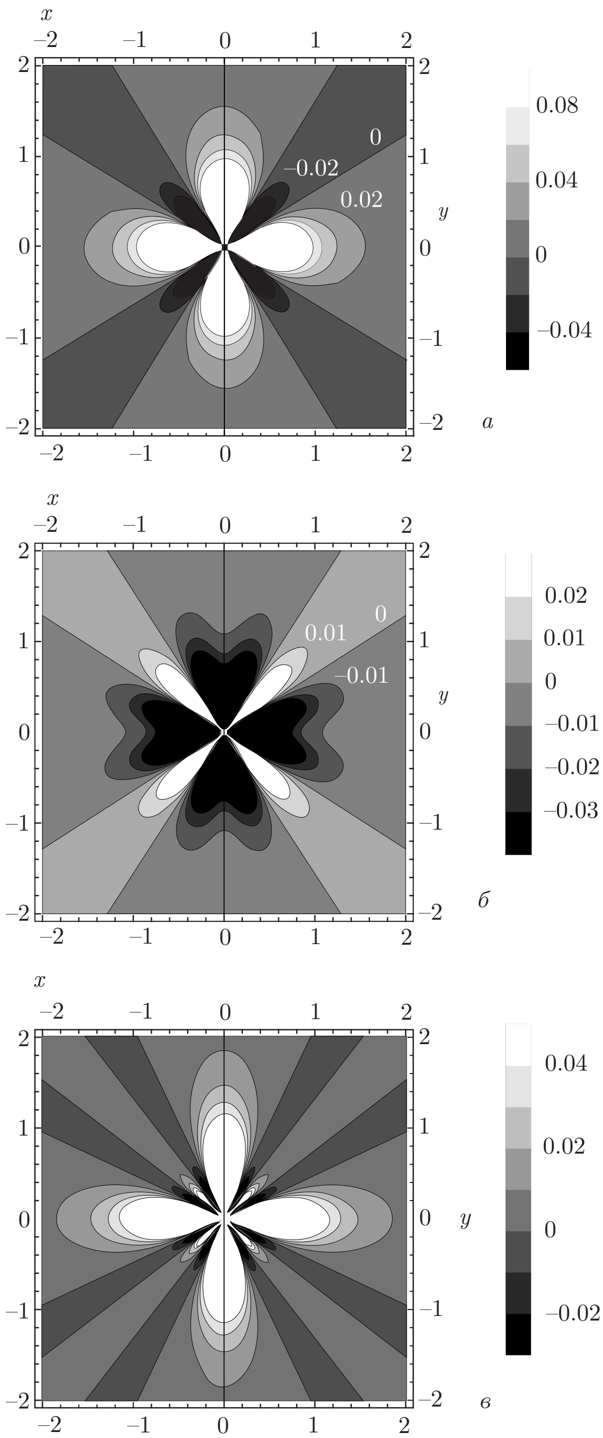

Рис. 1. Диаграммы энергии взаимодействия двух частиц при $d > 0$ в относительных единицах, спроектированные на плоскость xy: *а* — линейное приближение по параметру d, *б* — поправки пропорциональные d^2, *в* — сумма линейных и квадратичных вкладов. Одна из частиц находится в начале координат, в центре куба. Белые области ($H_{ij} > 0$) и черные ($H_{ij} < 0$) означают соответственно отталкивание и притяжение частиц. Координатные оси направлены вдоль осей четвертого порядка

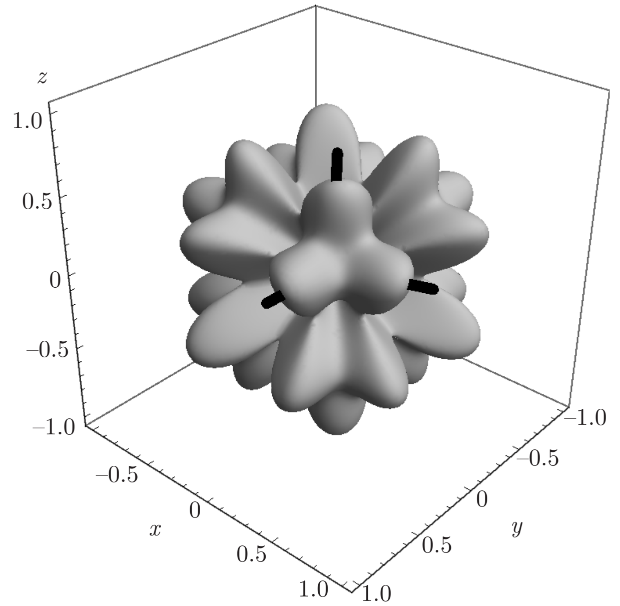

Рис. 2. Поверхность постоянной энергии взаимодействия $H_{ij}^{(1)} + H_{ij}^{(2)} = \mathrm{const} < 0$ (область притяжения) двух частиц при $d > 0$ (например, в кристалле $\mathrm{CaF_2}$) в относительных единицах. Координатные оси направлены вдоль осей четвертого порядка. Черными линиями отмечены направления $[\cos(\pi/8)^2\,\sqrt{2}/4\ \sin(\pi/8)]$, $[\sqrt{2}/4\ \sin(\pi/8)\ \cos(\pi/8)^2]$, $[\sin(\pi/8)\ \cos(\pi/8)^2\sqrt{2}/4]$ наибольшего притяжения частиц

Области притяжения и отталкивания между частицами зависят от ориентации рассматриваемой пары относительно осей симметрии кубической среды и знака параметра d. На рис. 1 мы приводим диаграмму областей притяжения и отталкивания для случая $d > 0$. На рис. 2 приведено трехмерное изображение областей притяжения. Как видно, частицы наиболее сильно притягиваются вдоль направлений

$$\left[\cos(\pi/8)^2\ \sqrt{2}/4\quad \sin(\pi/8)\right],$$

$$\left[\sqrt{2}/4\quad \sin(\pi/8)\quad \cos(\pi/8)^2\right],$$

$$\left[\sin(\pi/8)\quad \cos(\pi/8)^2\ \sqrt{2}/4\right].$$

Квадратичные поправки по параметру анизотропии существенно модифицируют области притяжения, «расщепляя» их на части.

Для кристалла MgO при $d < 0$ [22] (рис. 3, рис. 4), квадратичная поправка усиливает области притяжения, проходящие вдоль осей кристалла.

В заключение отметим, что полученное выражение для тензора Грина и формулы для расчета энергии взаимодействия частиц могут быть обобщены на случай орбитально-вырожденных состояний ионов переходных металлов. И в этом аспекте результаты данной работы выходят за рамки теории взаимодействия сферически-симметричных частиц.

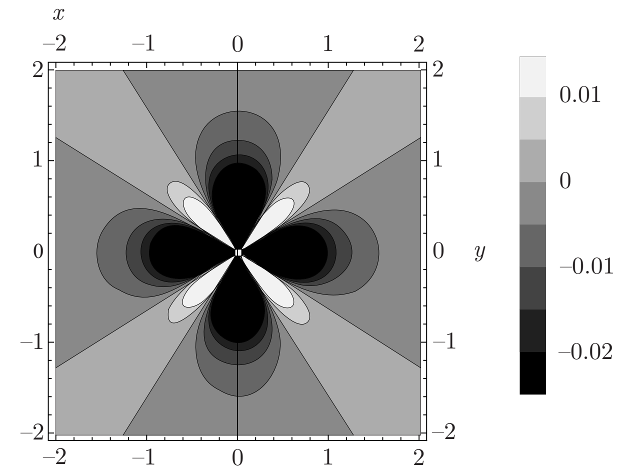

Рис. 3. Диаграмма энергии взаимодействия двух частиц при $d < 0$ (например, ионы $\mathrm{Mn^{2+}}$ в MgO) в относительных единицах, спроектированная на плоскость xy. Темные зоны ($H_{ij} < 0$) соответствуют притяжению частиц

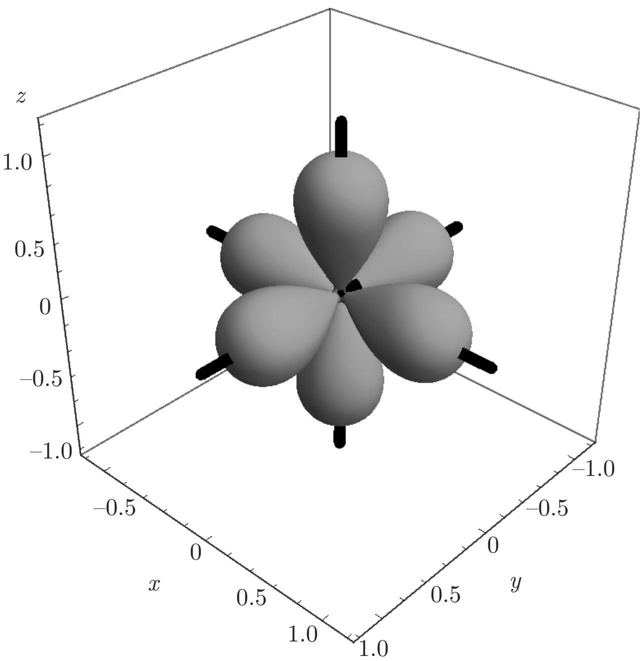

Рис. 4. Поверхность постоянной энергии взаимодействия $H_{ij}^{(1)} + H_{ij}^{(2)} = \mathrm{const} < 0$ (область притяжения) двух частиц при $d < 0$ (например, в кристалле MgO). Черными линиями отмечены направления $[1\ 0\ 0]$, $[0\ 1\ 0]$, $[0\ 0\ 1]$ наибольшего притяжения двух частиц

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке К(П)ФУ для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 3.6722.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, изд. 4, Наука, Москва (1987).

2. А. М. Косевич, *Основы механики кристаллической решетки*, Наука, Москва (1972).

3. A. M. Stoneham, *Theory of Defects in Solids*, Claredon Press, Oxford (1975) [пер. А. М. Стоунхэм, *Теория дефектов в твердых телах*, Т. 1, Т. 2, Мир, Москва (1978)].

4. J. D. Eshelby, *The Continuum Theory of Lattice Defects*, Sol. State Phys. **3**, 79 (1956) [пер. Дж. Эшелби, *Континуальная теория дислокаций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963)].

5. T. Mura, *Micromechanics in Defects of Solids*, Second Revisited Edition, Martinus Nijhoff Publishers (1987).

6. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг, ЖЭТФ **9**, 183 (1947).

7. Л. К. Аминов, Б. И. Кочелаев, ЖЭТФ **42**, 1303 (1962).

8. R. Orbach and M. Tachiki, Phys. Rev. **158**, 524 (1967).

9. М. В. Еремин, А. Ю. Завидонов, Б. И. Кочелаев, ЖЭТФ **90**, 537 (1985).

10. К. И. Кугель, Д. И. Хомский, УФН **136**, 621 (1982).

11. D. I. Khomskii and K. I. Kugel, Phys. Rev. B: Cond. Matt. **67**, 134401 (2003).

12. B. I. Kochelaev, A. M. Safina, A. Shengelaya, H. Keller, A. Muller, and K. Conder, Mod. Phys. Lett. B **17**, 415 (2003).

13. П. Н. Остапчук, ФТТ **54**, 92 (2012).

14. С. А. Кукушкин, А. В. Осипов, Р. С. Телятник, ФТТ **58**, 941 (2016).

15. R. A. Masmnura and G. Sines, J. Appl. Phys. **41**, 3930 (1970).

16. P. H. Dederichs and G. Leibfried, Phys. Rev. **188**, 1175 (1969).

17. J. L. Black and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **16**, 2879 (1977).

18. H. E. Schaeffer and H. Kronmuller, Phys. Stat. Sol. (B) **67**, 63 (1975).

19. А. М. Леушин, *Таблицы функций, преобразующихся по неприводимым представлениям кристаллографических точечных групп*, Наука, Москва (1968).

20. C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th Edition, Wiley (2005).

21. Б. З. Малкин, в сб.: *Парамагнитный резонанс*, Изд. Казанского университета (1976), вып. 12, с. 3; ФТТ **11**, 1208 (1969).

22. C. Teodosi, *Elastic Models of Crystal Defects*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1982), [пер. К. Теодосиу, *Упругие модели дефектов в кристаллах*, Мир, Москва (1985)].