

ОПРОКИДЫВАНИЕ ВОЛНЫ В ДИСПЕРСИОННОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА

*А. М. Камчатнов**

*Институт спектроскопии Российской академии наук
108840, Троицк, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 мая 2018 г.

Рассмотрена проблема опрокидывания волны в бозе-эйнштейновском конденсате при ее распространении в покоящуюся среду, когда начальный профиль в момент опрокидывания можно аппроксимировать степенной функцией вида $(-x)^{1/n}$. Эволюция волны описывается уравнением Гросса–Питаевского, так что в результате опрокидывания образуется дисперсионная ударная волна, которую в рамках подхода Гуревича–Питаевского можно представить как промодулированное периодическое решение уравнения Гросса–Питаевского, а эволюция параметров модуляции описывается уравнениями Уизема, получаемыми усреднением законов сохранения по быстрым осцилляциям в волне. Решение модуляционных уравнений Уизема получено в замкнутой форме для $n = 2, 3$, а скорости краев дисперсионной ударной волны при асимптотически больших временах эволюции найдены при произвольных целых $n > 1$. Рассмотренная задача может быть приложена к описанию образования дисперсионных ударных волн, наблюдавшихся в экспериментах с бозе-эйнштейновским конденсатом.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. П. Питаевского

DOI: 10.1134/S0044451018110111

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, нелинейные волны без учета эффектов вязкости или дисперсии «опрокидываются», т. е. после некоторого критического момента времени формальное решение соответствующих эволюционных уравнений становится многозначным (см., например, [1]). В классической газовой динамике эта проблема устраняется учетом малых диссипативных эффектов, так что вместо области многозначности в решении возникает ударная волна — узкая область перехода от течения с одними значениями параметров, характеризующих течение, к течению с другими значениями параметров. Ширина этой области перехода пропорциональна коэффициентам, характеризующим диссипативные процессы, и в реальных условиях имеет обычно порядок величины длины пробега молекул в газе. Поэтому в макроскопической теории эту область можно считать

разрывом параметров течения среды, причем при прохождении среды через разрыв должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии. Сформулированная на этой основе теория ударных волн получила большое развитие и нашла многочисленные приложения (см., например, [1, 2]).

Однако в современной физике зачастую приходится иметь дело с течениями среды, в которой диссипативными процессами в первом приближении можно пренебречь, и нелинейное опрокидывание волны устраняется учетом дисперсионных эффектов, приводящих вместо области многозначности к образованию дисперсионной ударной волны (ДУВ), т. е. эволюционирующей области нелинейного волнового движения среды. Впервые такого рода эффекты изучались в теории ундулярных бор в течении мелкой воды (см., например, [3]), а общий характер этого явления был осознан Сагдеевым [4], указавшим, что в диспергирующих волновых системах опрокидывание волны ведет к образованию протяженной волновой структуры, соединяющей разные состояния течения аналогично то-

* E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

му, как переход в ударной волне соединяет разные состояния течения среды с доминированием диссипации. В типичных случаях дисперсионная ударная волна занимает расширяющуюся со временем область пространства, причем на одном своем крае эта волна представляет собой последовательность солитонов, а на другом крае она вырождается в малоамплитудную гармоническую волну, распространяющуюся с соответствующей групповой скоростью. Основной теоретический подход к описанию ДУВ был предложен в классической работе Гуревича и Питаевского [5] на основе теории модуляции нелинейных волн Уизема [6]. В этом подходе ДУВ представляется в виде промодулированного периодического решения соответствующего нелинейного волнового уравнения и медленная эволюция модуляционных параметров подчиняется уравнениям Уизема, получаемым усреднением законов сохранения по быстрым колебаниям физических переменных в волне. Гуревич и Питаевский рассмотрели две типичные задачи об опрокидывании волны, эволюция которой описывается уравнением Кортевега – де Фриза (КдФ). Во-первых, они дали полное аналитическое решение задачи о распаде разрыва, когда начальное распределение амплитуды импульса имеет резкий скачок. Во-вторых, они нашли основные характеристики ДУВ вблизи точки типичного опрокидывания волны, когда начальное распределение в момент опрокидывания задается кубической параболой. Позднее более полное аналитическое решение этой задачи было получено Потеминим [7] (см. также [8]). В дальнейшем подход Гуревича и Питаевского к теории ДУВ получил большое развитие и был распространен на другие уравнения (см., например, обзор [9]).

Одним из важных приложений теории ДУВ является динамика бозе-эйнштейновского конденсата, описываемая уравнением Гросса – Питаевского [10, 11], которое мы запишем здесь для простоты в стандартных безразмерных переменных для одномерного течения конденсата:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

где ψ — «волновая функция» конденсата, текущего вдоль координаты x , причем предполагается, что взаимодействие между атомами является отталкивающим, что обеспечивает устойчивость его однородного состояния. Исследованию уравнения (1) посвящено огромное количество работ. В частности, его решение в виде темного солитона было получено в работе [12], а периодические решения, например,

в [13]. Интегрируемость уравнения (1) методом обратной задачи рассеяния была установлена в работе [14], а на основе этого подхода модуляционные уравнения были выведены в работах [15, 16]. Наконец, задача о распаде начального разрыва была исследована в [13, 17], а типичное опрокидывание волны было изучено в [18]. Разработанный в этих работах аппарат нашел приложения к описанию динамики ДУВ в бозе-эйнштейновском конденсате.

Впервые ДУВ в конденсате наблюдались в эксперименте [19, 20], где ударная волна образовывалась под действием расталкивающего конденсат лазерного излучения. Интерпретация наблюдений, представленных в докладе [19], как проявления динамики ДУВ, была предложена в работе [21], а в [20] для описания этого эксперимента была использована теория работ [13, 17], где предполагается, что ДУВ образуется в результате появления разрыва. Хотя такой разрыв может образоваться, если течение конденсата обусловлено движением поршня с постоянной скоростью [22], тем не менее такой случай является весьма специфическим и в типичных ситуациях волна, распространяющаяся в глубь покоящейся среды, опрокидывается из профиля, имеющего некую корневую особенность, а не резкий разрыв. Например, особенность в виде квадратного корня возникает при равноускоренном движении поршня [23], и уже из этого примера ясно, что реальное движение конденсата может иметь достаточно произвольную особенность в момент опрокидывания волны. В настоящей работе мы рассмотрим образование ДУВ при опрокидывании волны с начальной особенностью вида $(-x)^{1/n}$. Детальная теория будет развита для $n = 2$ и $n = 3$, а такие важные характеристики ДУВ, как законы движения ее краев, будут получены для произвольного целого $n > 1$. Развита теория дает основу для описания достаточно общих движений конденсата при опрокидывании волны.

2. МЕТОД ГУРЕВИЧА – ПИТАЕВСКОГО

Выпишем сначала основные соотношения метода Гуревича – Питаевского в теории ДУВ применительно к динамике бозе-эйнштейновского конденсата, подчиняющейся уравнению Гросса – Питаевского (1). Периодические решения этого уравнения удобно представить через более наглядные физические переменные, сделав в нем подстановку

$$\psi(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} \exp \left(i \int^x u(x', t) dx' \right), \quad (2)$$

так что после разделения действительной и мнимой частей мы приходим к системе

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \rho_x + \left[\frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho} \right]_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ является плотностью конденсата, а $u(x, t)$ — скоростью его течения. Периодическое решение в этих переменных может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)^2 + (\lambda_4 - \lambda_3) \times \\ &\times (\lambda_2 - \lambda_1) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} \theta, m \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$u = V - \frac{j}{\rho}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} j &= \frac{1}{8}(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \times \\ &\times (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \\ \theta &= x - Vt, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i, \\ m &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это решение зависит от четырех параметров $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$, через которые выражаются основные характеристики волны. В частности, ее длина волны равна

$$L = \frac{2K(m)}{\sqrt{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}}, \quad (7)$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. В пределе $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$, когда $m \rightarrow 1$ и $L \rightarrow \infty$, периодическая волна преобразуется в солитонное решение

$$\rho = \rho_0 - \frac{a_s}{\operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{a_s}(x - V_s t) \right)}, \quad (8)$$

где фоновая плотность ρ_0 , вдоль которой распространяется темный солитон, его амплитуда a_s и скорость V_s равны

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_1)^2, \quad a_s = (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1), \\ V_s &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4). \end{aligned} \quad (9)$$

В противоположном пределе $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$, когда $m \rightarrow 0$, амплитуда волны стремится к нулю и она превращается в линейную гармоническую волну, бегущую по фону с постоянной плотностью ρ_0 .

В ДУВ параметры λ_i становятся медленными функциями x и t , которые мало изменяются на одной длине волны L , поэтому можно усреднить законы сохранения уравнения (1) по быстрым колебаниям в волне и получить в результате эволюционные уравнения Уизема для модуляционных параметров λ_i . Эти уравнения можно представить в форме

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i(\lambda) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (10)$$

где характеристические скорости равны

$$\begin{aligned} v_i(\lambda) &= \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i \right) V, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \partial_i &\equiv \partial / \partial \lambda_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Подстановка сюда формул (6) и (7) дает конкретные выражения для скоростей:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} \sum \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)K}{(\lambda_4 - \lambda_1)K - (\lambda_4 - \lambda_2)E}, \\ v_2 &= \frac{1}{2} \sum \lambda_i + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)K}{(\lambda_3 - \lambda_2)K - (\lambda_3 - \lambda_1)E}, \\ v_3 &= \frac{1}{2} \sum \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)K}{(\lambda_3 - \lambda_2)K - (\lambda_4 - \lambda_2)E}, \\ v_4 &= \frac{1}{2} \sum \lambda_i + \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)K}{(\lambda_4 - \lambda_1)K - (\lambda_3 - \lambda_1)E}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $E = E(m)$ — эллиптический интеграл второго рода. Переменные λ_i называются римановыми инвариантами системы модуляционных уравнений Уизема. Нам также понадобятся предельные выражения для этих скоростей на краях ДУВ. На солитонном крае, где $\lambda_3 = \lambda_2$ и $m = 1$, получаем

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_4, \quad v_4 = \frac{3}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_1, \\ v_2 &= v_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4), \end{aligned} \quad (13)$$

а на малоамплитудном крае при $\lambda_3 = \lambda_4$ и $m = 0$ имеем

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, \quad v_2 = \frac{3}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1, \\ v_3 &= v_4 = 2\lambda_4 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)} \end{aligned} \quad (14)$$

(формулы для аналогичного предела $\lambda_1 = \lambda_2$ нам не понадобятся).

В обобщенном методе годографа [24] решения уравнений (10) ищутся в виде

$$x - v_i(\lambda)t = w_i(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (15)$$

где $v_i(\lambda)$ — скорости (12), а $w_i(\lambda)$ — искомые функции. Если они найдены, то $x = x(\lambda)$ и $t = t(\lambda)$ оказываются заданными неявно функциями от параметров λ_i . Ввиду того, что эти функции должны быть обращены и модуляционные параметры должны стать функциями $\lambda_i = \lambda_i(x, t)$, очевидно, что w_i не могут быть независимыми друг от друга. Дифференцируя (15) по $\lambda_j, j \neq i$, и исключая t из всех попарных сочетаний получившихся соотношений, приходим к системе уравнений Царёва:

$$\frac{1}{w_i - w_j} \frac{\partial w_i}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{v_i - v_j} \frac{\partial v_i}{\partial \lambda_j}, \quad i \neq j. \quad (16)$$

Ввиду их симметрии относительно v_i и w_j естественно искать их решение в виде, аналогичном (11) (см. [25–27]):

$$w_i(\lambda) = \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i\right) W, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

Тогда уравнения (16) переходят в систему уравнений Эйлера–Пуассона ($i \neq j$)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \frac{1}{2(\lambda_i - \lambda_j)} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \right) = 0. \quad (18)$$

Для наших целей достаточно будет знать набор решений, получаемых из производящей функции

$$W = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i)}}, \quad (19)$$

удовлетворяющей (18) при любом λ . Разложение функции (19) по обратным степеням λ дает

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W^{(k)}}{\lambda^k} = 1 + W^{(1)} \frac{1}{\lambda} + W^{(2)} \frac{1}{\lambda^2} + \dots, \quad (20)$$

где $W^{(k)} = W^{(k)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ являются нужными нам частными решениями системы (18). В результате с помощью (17) получаем набор $w_i^{(k)}$, дающих решения уравнений Уизема (10):

$$w_i^{(k)} = W^{(k)} + (2v_i - s_1) \partial_i W^{(k)}, \quad (21)$$

так что $w_i^{(0)} = 1, w_i^{(1)} = v_i$. Уравнение Эйлера–Пуассона является линейным по W , как и формулы

(21) по $W^{(k)}$, поэтому любая их линейная комбинация также дает решение

$$x - v_i(\lambda)t = \sum_{k=0}^n A_k w_i^{(k)}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (22)$$

где число слагаемых n и постоянные коэффициенты A_k выбираются согласно условиям задачи.

Теперь мы покажем, что представленные здесь формулы теории ДУВ в подходе Гуревича и Питаевского позволяют решить задачу об образовании ДУВ при опрокидывании волны в бозе-эйнштейновском конденсате.

3. БЕЗДИСПЕРСИОННЫЙ ПРЕДЕЛ

До момента опрокидывания распределения плотности $\rho(x, t)$ и скорости течения $u(x, t)$ являются плавными функциями пространственной координаты x . Более того, даже после опрокидывания ДУВ занимает лишь конечную область пространства, граница на своих краях с гладкими распределениями, нахождение которых, таким образом, является частью решения задачи об опрокидывании волны. В случае достаточно плавных функций ρ и u членами с большим числом производных в системе (3) можно пренебречь, что означает пренебрежение эффектами дисперсии, так что эволюция плавных распределений описывается уравнениями бездисперсионного предела

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \rho_x = 0. \quad (23)$$

Они совпадают с уравнениями «мелкой воды» (см. [1]), эквивалентными уравнениям газовой динамики с «постоянной адиабаты» $\gamma = 2$. Поэтому для их решения можно использовать хорошо известные классические методы.

Уравнения (23) преобразуются к диагональной форме введением римановых инвариантов

$$\lambda_{\pm} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\rho}, \quad (24)$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_+}{\partial t} + v_+(\lambda_+, \lambda_-) \frac{\partial \lambda_+}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \lambda_-}{\partial t} + v_-(\lambda_+, \lambda_-) \frac{\partial \lambda_-}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$v_+ = \frac{3}{2} \lambda_+ + \frac{1}{2} \lambda_-, \quad v_- = \frac{1}{2} \lambda_+ + \frac{3}{2} \lambda_-, \quad (26)$$

причем ρ и u выражаются через λ_{\pm} формулами

$$\rho = \frac{1}{4}(\lambda_+ - \lambda_-)^2, \quad u = \lambda_+ + \lambda_- \quad (27)$$

В общем решении оба римановых инварианта λ_{\pm} являются функциями x и t . Однако нас интересует задача, когда волна распространяется в глубь покоящегося конденсата с постоянной плотностью ρ_0 . Как известно [1], с таким состоянием газа может граничить только течение в виде простой волны, в котором один из римановых инвариантов постоянен. Принимая для определенности, что волна распространяется вправо, приходим к заключению, что постоянным должен быть риманов инвариант λ_- , имеющий, следовательно, то же значение, что и в граничащей с волной покоящейся среде:

$$\lambda_- = -\sqrt{\rho_0}. \quad (28)$$

Тогда второе уравнение (25) удовлетворяется автоматически, а первое уравнение превращается в уравнение Хопфа

$$\frac{\partial \lambda_+}{\partial t} + \left(\frac{3}{2}\lambda_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0} \right) \frac{\partial \lambda_+}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

с хорошо известным общим решением

$$x - \left(\frac{3}{2}\lambda_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0} \right) t = w(\lambda_+).$$

При известной функции $w(\lambda_+)$ оно определяет зависимость $\lambda_+ = \lambda_+(x, t)$ и эта функция должна сшиваться на границе с покоящимся конденсатом со значением $\lambda_+ = \sqrt{\rho_0}$ в этой области пространства.

Нас интересует ситуация, когда в момент опрокидывания гладкое решение для λ_+ стремится к своему граничному значению $\sqrt{\rho_0}$ в зависимости от x по корневому закону. Выбирая систему координат и начало отсчета времени так, что опрокидывание риманова инварианта λ_+ происходит в момент времени $t = 0$ в начале координат $x = 0$, приходим к зависимости

$$x - \left(\frac{3}{2}\lambda_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0} \right) t = -(\lambda_+ - \sqrt{\rho_0})^n, \quad (30)$$

где для упрощения формул единицы измерения длины и времени выбраны так, чтобы коэффициент в правой части стал равным единице. Таким образом, при $t < 0$ зависимость λ_+ от x не имеет особенностей, при $t = 0$ возникает корневая особенность

$$\lambda_+ = \sqrt{\rho_0} + (-x)^{1/n}, \quad (31)$$

а при $t > 0$ зависимость λ_+ от x становится многозначной (см. рис. 1).

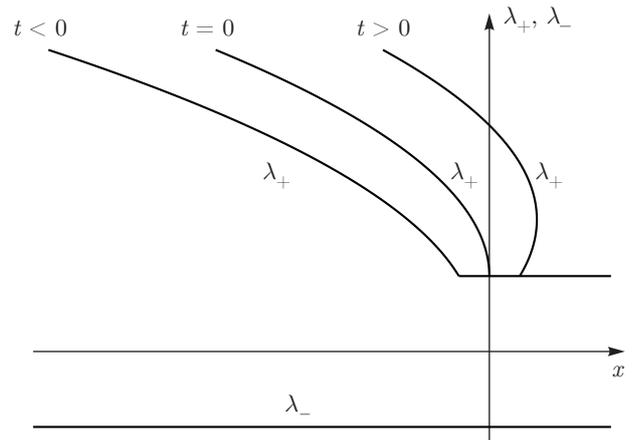


Рис. 1. Графики риманова инварианта λ_+ в зависимости от координаты x в фиксированные моменты времени t

4. ДИСПЕРСИОННАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА

В момент времени t ДУВ занимает область пространства

$$x_-(t) \leq x \leq x_+(t), \quad (32)$$

соединяясь в своих краевых точках с гладким решением (30). Сравнение скорости v_+ в (26) с предельным выражением (13) показывает, что ДУВ переходит в (30) при $\lambda_4 = \lambda_+$ на границе $x = x_-(t)$, причем коэффициенты A_k должны быть подобраны таким образом, чтобы правая часть (22) с $i = 4$ стала равной правой части (30). Далее, решение уравнений Уизема переходит в гармоническую волну на малоамплитудном крае $x = x_+(t)$, если вдоль всей ДУВ $\lambda_2 = \lambda_+ = \sqrt{\rho_0}$ и в точке $x_+(t)$ имеем $\lambda_3 = \lambda_4$. Поскольку на обоих краях ДУВ $\lambda_- = -\sqrt{\rho_0}$, условию сшивки λ_1 с λ_- на краях ДУВ мы удовлетворим, положив $\lambda_1 = -\sqrt{\rho_0}$ вдоль ДУВ. Таким образом, уравнения Уизема (10) с $i = 1, 2$ удовлетворяются постоянными решениями

$$\lambda_1 = -\sqrt{\rho_0}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\rho_0}, \quad (33)$$

и вдоль ДУВ изменяются лишь два римановых инварианта λ_3, λ_4 , удовлетворяя граничным условиям

$$\lambda_4 = \lambda_+, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad w_4 = -(\lambda_4 - \lambda_2)^n \quad (34)$$

$(m = 1), \quad x = x_-(t)$

и

$$\lambda_3 = \lambda_4 \quad (m = 0), \quad x = x_+(t). \quad (35)$$

Эти условия полностью определяют решение. В результате зависимость римановых инвариантов от координаты x при заданном t имеет вид, показанный на рис. 2. Отметим, что волны с двумя переменными римановыми инвариантами называются квазипростыми и они впервые изучались в работе [28]

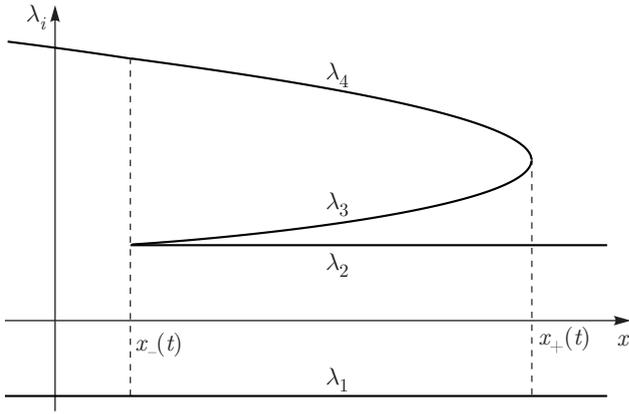


Рис. 2. Графики римановых инвариантов λ_i в дисперсионной ударной волне в зависимости от координаты x в фиксированный момент времени t

в теории уравнения КдФ. С учетом (33) несколько первых коэффициентов в (20) равны

$$\begin{aligned} W_0 &= 1, & W_1 &= \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4), \\ W_2 &= \frac{1}{8}(4\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 2\lambda_3\lambda_4 + 3\lambda_4^2), \\ W_3 &= \frac{1}{16}(\lambda_3 + \lambda_4)(4\lambda_2^2 + 5\lambda_3^2 - 2\lambda_3\lambda_4 + 5\lambda_4^2), \end{aligned} \quad (36)$$

знания которых достаточно, чтобы рассмотреть типичные случаи с $n = 2$ и $n = 3$.

4.1. Случай с $n = 2$

Поскольку формулы (36) имеют полиномиальный вид, квадратичную функцию $-(\lambda_4 - \lambda_2)^2$ можно представить в виде линейной комбинации первых трех выражений (36) с коэффициентами

$$A_0 = -\frac{4}{15}\lambda_2^2, \quad A_1 = \frac{16}{15}\lambda_2, \quad A_2 = -\frac{8}{15}. \quad (37)$$

Тогда формулы (22) с $i = 3, 4$ и этими значениями коэффициентов определяют неявным образом зависимости λ_3 и λ_4 от x и t , что решает, в принципе, задачу в этом частном случае. На солитонном крае эти формулы переходят в

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_2)t &= -\frac{1}{5}(\lambda_4 - \lambda_2)^2, \\ x - \frac{1}{2}(3\lambda_4 - \lambda_2)t &= -(\lambda_4 - \lambda_2)^2, \end{aligned} \quad (38)$$

откуда находим связь между t и λ_4 на этой границе:

$$t = \frac{4}{5}(\lambda_4 - \lambda_2), \quad \lambda_4 = \lambda_2 + \frac{5}{4}t. \quad (39)$$

Подстановка полученного значения λ_4 в любое из соотношений (38) дает закон движения солитонного края

$$x_-(t) = \lambda_2 t + \frac{5}{16}t^2. \quad (40)$$

На малоамплитудном крае при $\lambda_3 = \lambda_4$ обе формулы (22) с $i = 3, 4$ превращаются в одно и то же соотношение

$$x_+ - \left(2\lambda_4 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_4}\right)t = -\frac{8}{15}(\lambda_4 - \lambda_2)^2 \left(3 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_4}\right). \quad (41)$$

Этот край движется с групповой скоростью, соответствующей волновому числу $k = 2\pi/L$ с $L = 2\sqrt{\lambda_4^2 - \lambda_2^2}$, что для закона дисперсии Боголюбова $\omega = k\sqrt{\lambda_2^2 + k^2/4}$ дает $d\omega/dk = 2\lambda_4^2 - \lambda_2^2/\lambda_4$. Поэтому дифференцирование формулы (41) по t с учетом $dx_+/dt = d\omega/dk$ определяет зависимость t от величины λ_4 на этой границе. Вводя вместо λ_4 параметр $y = \lambda_4/\lambda_2$, записываем эту зависимость в виде

$$t = \frac{16\lambda_2}{15} \frac{(y-1)(3y^2+y+1)}{2y^2+1}, \quad y \geq 1, \quad (42)$$

а ее подстановка в (41) дает

$$x_+ = \frac{8\lambda_2^2}{15} \frac{(y^2-1)(6y^2-1)}{2y^2+1}. \quad (43)$$

Формулы (42) и (43) задают параметрически закон движения $x_+ = x_+(t)$ малоамплитудного края. Асимптотически при $t \sim \lambda_0 y \gg \lambda_2^2 = \rho_0$ этот закон движения приобретает простой вид

$$x_+(t) \approx \frac{5}{8}t^2, \quad t \gg \rho_0. \quad (44)$$

Отметим, что аналогичные формулы, найденные при решении задачи о движении конденсата под действием равноускоренного поршня [23], могут быть преобразованы к найденному здесь виду после переноса точки опрокидывания в начало координат и вычитания из t времени опрокидывания.

4.2. Случай с $n = 3$

В этом случае расчет проводится аналогичным образом. Теперь в правые части формул (22) с $i = 3, 4$ войдет функция W_3 и условие (34) даст значения коэффициентов

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{8}{35}\lambda_2^3, & A_1 &= -\frac{8}{7}\lambda_2^2, \\ A_2 &= \frac{48}{35}\lambda_2, & A_3 &= -\frac{16}{35}. \end{aligned} \quad (45)$$

На солитонном крае решение (22) переходит в

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_2)t &= -\frac{1}{7}(\lambda_4 - \lambda_2)^3, \\ x - \frac{1}{2}(3\lambda_4 - \lambda_2)t &= -(\lambda_4 - \lambda_2)^3, \end{aligned} \quad (46)$$

откуда находим

$$t = \frac{6}{7}(\lambda_4 - \lambda_2)^2, \quad \lambda_4 = \lambda_2 + \sqrt{\frac{7t}{6}}. \quad (47)$$

Подстановка этого соотношения в (46) дает закон движения солитонного края

$$x_- = \lambda_2 t + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{6}}t^{3/2}. \quad (48)$$

На малоамплитудном крае формулы (22) с $i = 3, 4$ переходят в

$$x_+ - \left(2\lambda_4 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_4}\right)t = -\frac{16}{35}(\lambda_4 - \lambda_2)^3 \left(4 + \frac{3\lambda_2}{\lambda_4}\right). \quad (49)$$

Из условия согласования закона движения границы с групповой скоростью линейной волны получаем

$$t = \frac{48\lambda_2^2}{35} \frac{(y-1)^2(4y^2+2y+1)}{2y^2+1}, \quad y \geq 1, \quad (50)$$

и подстановка в (49) дает

$$x_+ = \frac{16\lambda_2^3}{35} \frac{(y-1)^2(16y^3+14y^2-4y-5)}{2y^2+1}. \quad (51)$$

При асимптотически больших временах $t \sim \lambda_0^2 y^2 \gg \gg \lambda_2^2 = \rho_0^2$ находим

$$x_+(t) \approx \frac{1}{3}\sqrt{\frac{35}{6}}t^{3/2}, \quad t \gg \rho_0^2. \quad (52)$$

Закон движения краев ДУВ от времени для $n = 2, 3$ показан на рис. 3. При малых временах доминирует движение со скоростью звука $\sqrt{\rho_0}$, а при больших временах происходит переход к асимптотическим законам.

Общие формулы (22) вместе с найденными выше конкретными выражениями для функций $w_i^{(k)}$, получаемыми с помощью (21), (36) и коэффициентов (37) ($n = 2$) или (45) ($n = 3$), позволяют вычислить λ_3 и λ_4 как функции от x и t , так что последующая их подстановка в (4) и (5) дает нам профили распределений плотности и скорости течения в ДУВ (см. рис. 4). Огибающие плотности конденсата в ДУВ рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \rho_{max} &= \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_3 + 2\sqrt{\rho_0})^2, \\ \rho_{min} &= \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_3 - 2\sqrt{\rho_0})^2. \end{aligned}$$

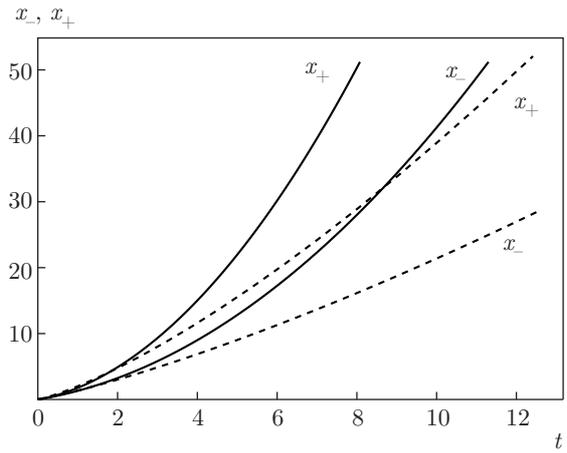


Рис. 3. Движение краев ДУВ при $n = 2$ (сплошные линии) и $n = 3$ (штриховые линии). Фоновая плотность $\rho_0 = 1$

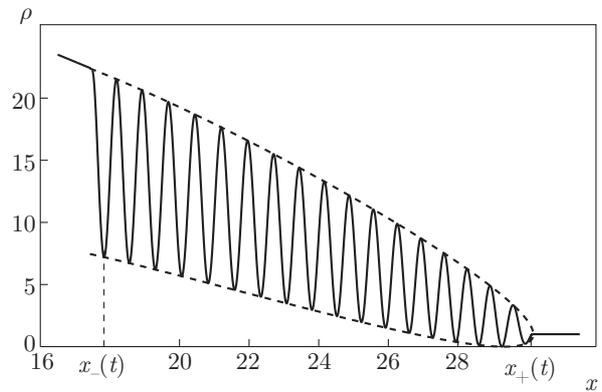


Рис. 4. Профиль плотности конденсата в дисперсионной ударной волне при опрокидывании волны с $n = 2$, $\rho_0 = 1$. Время эволюции $t = 6$

Хотя формулы усложняются с ростом показателя n , такие важные характеристики ДУВ, как законы движения ее краев, могут быть найдены без детального исследования полного решения по крайней мере в асимптотическом пределе $t \gg \rho_0^n$. В следующих разделах статьи мы обратимся к этому вопросу.

5. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ СОЛИТОННОГО КРАЯ ДУВ

Комбинируя (34) с предельным выражением формулы (21), мы можем записать граничное условие на солитонном крае в виде дифференциального уравнения для функции $W = W(-\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_4)$, зависящей лишь от λ_4 :

$$W + 2(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{dW}{d\lambda_4} = -(\lambda_4 - \lambda_2)^n, \quad (53)$$

решение которого дает

$$W(-\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_4) = -\frac{1}{2n+1}(\lambda_4 - \lambda_2)^n, \quad (54)$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы в последующих формулах время t стремилось к нулю при $\lambda_4 \rightarrow \lambda_2$. Поскольку на этой границе $w_3 = W$, формулы (22) дают

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_2)t &= -\frac{1}{2n+1}(\lambda_4 - \lambda_2)^n, \\ x - \frac{1}{2}(3\lambda_4 - \lambda_2)t &= -(\lambda_4 - \lambda_2)^n, \end{aligned} \quad (55)$$

что согласуется с (38) ($n = 2$) и (46) ($n = 3$). Отсюда находим

$$t = \frac{2n}{n+1}(\lambda_4 - \lambda_2)^{n-1} \quad (56)$$

и

$$x_-(t) = \lambda_2 t + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{1/(n-1)} t^{n/(n-1)}. \quad (57)$$

Это обобщает полученные выше формулы на произвольные целые значения $n > 1$.

Отметим, что фактически мы можем найти закон движения солитонного края для произвольной монотонной зависимости начального распределения риманова инварианта λ_+ вида $w = w(\lambda_+ - \sqrt{\rho_0})$, если обратимся к соображениям, использованным в работе [28] для вывода закона движения малоамплитудного края при опрокидывании волны в теории уравнения КдФ. В самом деле, уравнения Уизема (10) с $i = 3, 4$ в классическом методе годографа переходят в линейные дифференциальные уравнения для функций $x = x(\lambda_3, \lambda_4)$ и $t = t(\lambda_3, \lambda_4)$, одно из которых при $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ превращается в

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_4} - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4) \frac{\partial t}{\partial \lambda_4} = 0. \quad (58)$$

С другой стороны, на этой границе решение должно сшиваться с гладким решением, что дает

$$x - \frac{1}{2}(3\lambda_4 - \lambda_2)t = w(\lambda_4 - \lambda_2).$$

Дифференцирование этого соотношения по λ_4 приводит к еще одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_4} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}(3\lambda_4 - \lambda_2) \frac{\partial t}{\partial \lambda_4} = \frac{\partial w}{\partial \lambda_4}. \quad (59)$$

Исключая $\partial x / \partial \lambda_4$ из (58) и (59), получаем дифференциальное уравнение для t , интегрирование которого дает ($z = \lambda_4 - \lambda_2$)

$$t = t(z) = -z^{-3/2} \int_0^z z^{1/2} \frac{dw}{dz} dz, \quad (60)$$

и, следовательно,

$$x_- = x_-(z) = \left(\frac{3}{2}z + \lambda_2 \right) t(z) - w(z). \quad (61)$$

Эти формулы задают параметрически зависимость $x_- = x_-(t)$.

6. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ МАЛОАМПЛИТУДНОГО КРАЯ

Формулы (41) ($n = 2$) и (49) ($n = 3$) имеют простую структуру, ведущую к предположению, что при $m \rightarrow 0$ ($\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$) и целом n функции w_3 и w_4 должны переходить в правую часть соотношения

$$\begin{aligned} x_+ - \left(2\lambda_4 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_4} \right) t &= \\ &= A_n (\lambda_4 - \lambda_2)^n \left(n + 1 + \frac{n\lambda_2}{\lambda_4} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Мы докажем эту формулу в асимптотическом пределе $t \rightarrow \infty$ ($\lambda_4 \rightarrow \infty$), когда слагаемым с λ_2/λ_4 можно пренебречь. Для этого замечаем, что в пределе $\lambda_2 \rightarrow 0$ производящая функция (19) сводится к производящей функции многочленов Лежандра (см., например, [29])

$$\begin{aligned} W &\approx \\ &\approx \left(1 - 2 \left(\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2\sqrt{\lambda_3\lambda_4}} \right) \frac{\sqrt{\lambda_3\lambda_4}}{\lambda} + \left(\frac{\sqrt{\lambda_3\lambda_4}}{\lambda} \right)^2 \right)^{-1/2} = \\ &= \sum_n P_n \left(\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2\sqrt{\lambda_3\lambda_4}} \right) \frac{(\lambda_3\lambda_4)^{n/2}}{\lambda^n}, \end{aligned}$$

т. е.

$$W_n \approx (\lambda_3\lambda_4)^{n/2} P_n \left(\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2\sqrt{\lambda_3\lambda_4}} \right). \quad (63)$$

С помощью рекуррентной формулы для производной многочлена Лежандра (см. [29]) легко доказать, что в этом приближении

$$\frac{\partial W_n}{\partial \lambda_4} = \frac{n}{\lambda_4 - \lambda_3} (W_n - \lambda_3 W_{n-1}). \quad (64)$$

Для вычисления функции $w_4^{(n)}$ в пределе $m \rightarrow 0$ покажем, что при $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ имеем соотношение

$$W_n - \lambda_3 W_{n-1} \approx (\lambda_4 - \lambda_3) \cdot \frac{1}{2} \lambda_4^{n-1}.$$

С этой целью заметим, что аргумент многочлена Лежандра в (63), будучи отношением среднего арифметического к среднему геометрическому, достигает

максимума при $\lambda_3 = \lambda_4$ и поэтому квадратичен по малой разности $\lambda_4 - \lambda_3 = \varepsilon$, причем $P_n(1) = 1$, т. е. $W_n(\lambda_4, \lambda_4) = \lambda_4^n$. Следовательно, в первом порядке по ε находим

$$W_n(\lambda_4 - \varepsilon, \lambda_4) - (\lambda_4 - \varepsilon)W_{n-1}(\lambda_4 - \varepsilon, \lambda_4) \approx (\lambda_4 - \varepsilon)^{n/2} \lambda_4^{n/2} - \lambda_4(\lambda_4 - \varepsilon)^{(n-1)/2} \lambda_4^{(n-1)/2} + \varepsilon \lambda_4^{n-1} \approx \frac{1}{2} \varepsilon \lambda_4^{n-1}.$$

Кроме того, замечаем, что при $\lambda_2 \rightarrow 0$ в сумме (22) остается лишь старший член с $k = n$, так как при $k < n$ коэффициенты A_k содержат в качестве множителей степени λ_2 . Таким образом, с учетом $2(V - v_4) \approx -2\lambda_4$ получаем

$$w_4 \approx A_n(n + 1)\lambda_4^n. \tag{65}$$

Для полного определения w_4 при $m = 0$ нам осталось найти A_n , что легко сделать с помощью разложения старшего члена многочлена Лежандра в ряд при $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2 = 0$ (см. [29]):

$$W_n \approx (\lambda_2 \lambda_4)^{n/2} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_4}{2\sqrt{\lambda_2 \lambda_4}} \right)^n \approx \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \lambda_4^n. \tag{66}$$

Тогда условие сшивки с гладким решением дает

$$w_4 \approx A_n \frac{(2n + 1)!}{4^n (n!)^2} \lambda_4^n = -\lambda_4^n,$$

т. е.

$$A_n = -\frac{4^n (n!)^2}{(2n + 1)!}. \tag{67}$$

Дифференцируя формулу

$$x - 2\lambda_4 t = w_4 = A_n(n + 1)\lambda_4^n \tag{68}$$

по λ_4 с условием $\partial x / \partial \lambda_4 = 0$ при фиксированном t , что эквивалентно условию согласования с групповой скоростью волны на малоамплитудном крае, получаем

$$t = -\frac{1}{2} n(n + 1) A_n \lambda_4^{n-1}. \tag{69}$$

Подстановка получаемого отсюда λ_4 в (68) дает закон движения малоамплитудного края в асимптотическом режиме:

$$x_+ = \frac{2(n - 1)}{n} \times \left(\frac{(2n + 1)!}{2^{2n-1} n(n + 1)(n!)^2} \right)^{1/(n-1)} t^{n/(n-1)}. \tag{70}$$

Естественно, эта формула воспроизводит ранее найденные асимптотические законы (44) при $n = 2$ и (52) при $n = 3$.

Выражение (68) подтверждает справедливость формулы (62) в пределе $\lambda_2 \rightarrow 0$. Предполагая, что она верна и при конечном λ_2 , находим закон движения малоамплитудной границы в параметрической форме

$$t = \frac{n A_n \lambda_2^{n-1} (y-1)^{n-1}}{2y^2 + 1} [(n+1)y^2 + (n-1)y + 1],$$

$$x = \frac{A_n \lambda_2^n (y-1)^{n-1}}{2y^2 + 1} [2(n^2 - 1)y^3 + 2(n^2 - n + 1)y^2 - (n-1)^2 y - n^2 + n + 1]. \tag{71}$$

Стоит отметить, что, в отличие от теории уравнения КдФ, автомодельный режим движения границ реализуется лишь асимптотически при достаточно больших временах $t \gg \rho_0^{n-1}$, когда скорость движения много больше скорости звука в фоновом распределении. Однако переход к пределу $\rho_0 \rightarrow 0$ невозможен в формулах, описывающих профиль волны, так как при $\lambda_2 = -\lambda_1 \rightarrow 0$ модуль m эллиптических функций обращается в нуль.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, подход Гуревича и Питаевского позволяет достаточно детально исследовать процесс формирования ДУВ при опрокидывании волны в бозе-эйнштейновском конденсате, динамика которого подчиняется уравнению Гросса–Питаевского. Развита теория применима к начальной стадии процесса, когда гладкую часть профиля можно считать монотонной функцией координаты. Отметим, однако, что теория квазипростых волн должна также описывать асимптотическую стадию эволюции импульса с конечной протяженностью, поскольку по аналогии с теорией простых волн начальный импульс разделяется со временем на два, в каждом из которых снова два римановых инварианта из четырех остаются постоянными. Таким образом, подход Гуревича и Питаевского, дополненный обобщенным методом годографа и современными способами вывода модуляционных уравнений Уизема, остается мощным методом исследования дисперсионных ударных волн, представляющих большой интерес для современной нелинейной физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
2. Р. Курант, К. Фридрихс, *Сверхзвуковое течение и ударные волны*, Изд-во иностр. лит., Москва (1950).
3. Т. В. Benjamin and M. J. Lighthill, Proc. Roy. Soc. London, A **224**, 448 (1954).
4. Р. З. Сагдеев, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, Вып. 4 (1964), с. 20.
5. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **65**, 590 (1973).
6. G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. London A **283**, 238 (1965).
7. Г. В. Потемин, УМН **43**, 39 (1988).
8. A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations. An Introductory Course*, World Scientific, Singapore (2000).
9. G. A. El and M. A. Hoefer, Physica D **333**, 11 (2016).
10. E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
11. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961).
12. T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys. **4**, 441 (1971).
13. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, ЖЭТФ **92**, 1684 (1987).
14. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **64**, 1627 (1973).
15. M. G. Forest and J. E. Lee, in *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness*, ed. by C. Dafermos et al., IMA Volumes on Mathematics and its Applications **2**, Springer, New York (1986).
16. М. В. Павлов, ТМФ **71**, 351 (1987).
17. G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, Physica D **87**, 186 (1995).
18. A. M. Kamchatnov, R. A. Kraenkel, B. A. Umarov, Phys. Rev. E **66**, 036609 (2002).
19. E. A. Cornell, Talk at NATO Advanced Workshop "Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects," Lisbon (2003).
20. M. A. Hoefer, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cornell, P. Engels, and V. Schweikhard, Phys. Rev. A **74**, 023623 (2006).
21. A. M. Kamchatnov, A. Gammal, and R. A. Kraenkel, Phys. Rev. A **69**, 063605 (2004).
22. M. A. Hoefer, M. J. Ablowitz, and P. Engels, Phys. Rev. Lett. **100**, 084504 (2008).
23. А. М. Камчатнов, С. В. Корнеев, ЖЭТФ **137**, 191 (2010).
24. С. П. Царев, Изв. АН СССР, Сер. матем. **54**, 1048 (1990).
25. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, ЖЭТФ **101**, 1797 (1992).
26. O. Wright, Commun. Pure Appl. Math. **46**, 421 (1993).
27. F. R. Tian, Commun. Pure Appl. Math. **46**, 1093 (1993).
28. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Н. Г. Мазур, ЖЭТФ **95**, 1674 (1989).
29. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т. II, ГИФМЛ, Москва (1963).