

СВЕРХТЕКУЧИЕ ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ: ФАЗЫ «ПАСТЫ» В КОРЕ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

Д. Н. Кобяков^{a*}, К. Д. Петик^{b,c**}

^a *Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

^b *Международная академия Нильса Бора, институт Нильса Бора, университет Копенгагена
DK-2100, Копенгаген, Дания*

^c *НОРДИТА, Королевский технологический институт и Стокгольмский университет
SE-10691, Стокгольм, Швеция*

Поступила в редакцию 2 мая 2018 г.

Фазы «пасты», появление которых предсказывается вблизи внутренней границы коры нейтронных звезд, подобны смектикам А в случае ядер в форме пластин (лазанья) и колончатой фазе в случае ядер в форме стержней (спагетти). Важное отличие от обычных жидких кристаллов состоит в том, что нуклоны обладают сверхтекучестью. Мы разрабатываем гидродинамические уравнения для этой системы и используем их для изучения коллективных колебаний. Нуклонная сверхтекучесть приводит к важным качественным различиям в спектрах этих осцилляций, а также увеличивает их частоты по сравнению с несверхтекучими жидкими кристаллами. Обсуждаются направления дальнейших исследований.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. П. Питаевского

DOI: 10.1134/S0044451018110056

1. ВВЕДЕНИЕ

Предсказывается, что во внутренней коре нейтронной звезды, благодаря поиску баланса между энергией кулоновских сил и поверхностной энергией ядерных сил, ядра принимают формы, совершенно отличные от сферической формы ядер, известных на Земле [1–3]. Из-за сходства с формой различных видов макаронных изделий, эти фазы часто обозначаются как фазы «пасты». Эти фазы существуют при плотностях немного меньших, чем плотность материи в основании внутренней коры — примерно половина плотности насыщения ядерной материи при равном числе нейтронов и протонов. При увеличении плотности сферические ядра сначала становятся подобными стержням (спагетти), а затем — подобными пластинам (лазанья), и в обоих случаях ядра погружены в нейтронную жидкость с практически однородным электронным фоном, компенси-

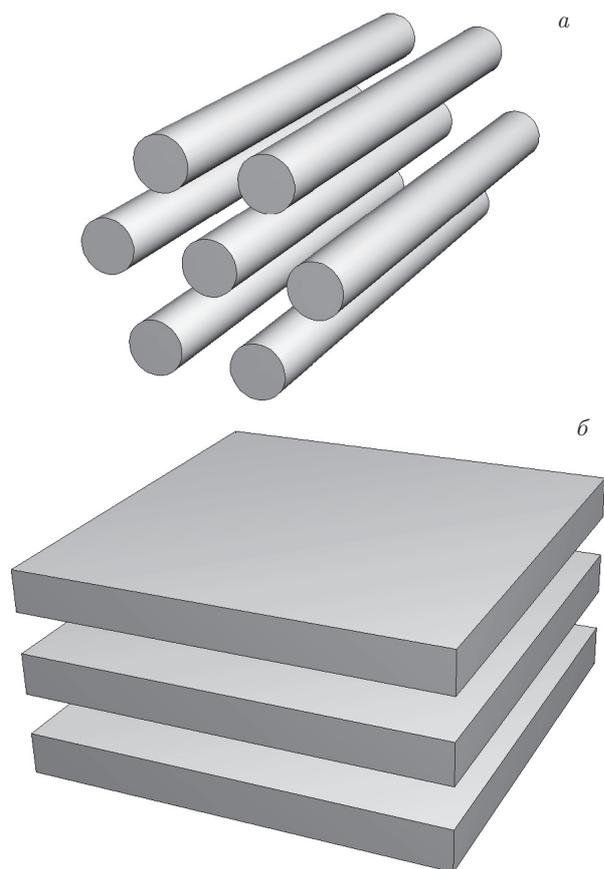
рующим электрический заряд протонов в материи. Схематическая картина этих фаз показана на рисунке. При еще более высоких плотностях предсказываются фазы с взаимно обратными ролями ядерной материи и чисто нейтронной жидкости, однако они менее распространены, чем фазы спагетти и лазанья.

В первом приближении фаза спагетти может быть представлена как периодический массив колонн, состоящих из ядерной материи, а фаза лазанья — как периодический массив пластин ядерной материи. Фаза спагетти напоминает колончатую фазу жидких кристаллов, а лазанья — фазу смектик А, которую в дальнейшем будем называть просто «смектик».

В этой статье разрабатывается теория длинноволновой динамики, в частности, коллективных мод фаз пасты. Особенный интерес здесь представляет в возможности искажения формы пасты. В этом смысле наша работа представляет собой обобщение работы по коллективным колебаниям в негибкой пасте [4]. Между фазами пасты и жидкими кристаллами существуют значительные различия. Первое — наличие нейтронов, протонов и электронов и, сле-

* E-mail: dmitry.kobyakov@appl.sci-nnov.ru

** E-mail: pethick@nbi.dk



Упрощенная картина фаз пасты: спагетти (а) и лазаньи (б). Стержни и пластины состоят из ядерной материи с нейтронами и протонами, а пространство между ними заполнено нейтронами, находящимися в равновесии с ядрами. Нуклоны погружены в электронный фон, в сущности однородный, обеспечивающий электрическую нейтральность материи. Две эти фазы являются наиболее распространенными фазами пасты в нейтронных звездах, но существуют также фазы, подобные им, но с взаимно-обратными ролями ядерной материи и нейтронной жидкости, а также фаза со сферическими полостями в однородной ядерной материи, заполненными нейтронами

довательно, существование дополнительной моды, включающей изменение плотностей частиц, в отличие от единственной моды в однокомпонентной системе.

Наличие нескольких компонент может быть учтено прямым обобщением стандартной теории. Второе различие состоит в том, что нейтроны и протоны в фазах пасты обладают сверхтекучестью. Таким образом, нейтроны могут почти свободно перемещаться относительно периодической структуры, в то время как в жидких кристаллах, в хорошем приближении, средняя скорость материи

совпадает со скоростью периодической структуры. На языке физики жидких кристаллов отклонение от такой ситуации обозначается как «просачивание» [5] или «перколяция»¹⁾. Благодаря сверхтекучести нуклонов в фазах пасты просачивание может играть важную роль, как показано ниже.

В жидких кристаллах существуют низкочастотные моды, скорости которых уменьшаются до нуля при волновых векторах, параллельных стержням спагетти или лежащих в плоскости пластин лазаньи. Это легко понять, поскольку силы реакции структуры при таких деформациях происходят из членов, зависящих от искривления, которые пропадают в первом порядке приближения по волновому вектору. Обнаружение мод, скорости которых обращаются в нуль при волновых векторах, перпендикулярных стержням и пластинам [7, 8], стало удивительной неожиданностью и впоследствии подтвердилось в эксперименте. В нашей работе показано, что в сверхтекучих жидких кристаллах, вследствие просачивания, скорости этих мод не обращаются в нуль.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 разрабатывается гидродинамический формализм. В разд. 3 формализм применяется к однокомпонентной материи в несжимаемом приближении и вычисляются скорости мод. В разд. 4 сделан набросок обобщения формализма на случай двухкомпонентной материи. В разд. 5 описываются эффекты связи низкоэнергетических мод с вариациями плотности материи. В разд. 6 рассмотрена дисперсия мод за счет высших членов градиентного разложения свободной энергии. Обсуждение и заключительные замечания представлены в разд. 7.

2. ФОРМАЛИЗМ

В нейтронных звездах возрастом более примерно одного года с момента рождения температура уменьшается значительно ниже 10^9 К (≈ 0.1 МэВ), поэтому в хорошем приближении можно пренебречь эффектами тепловых возбуждений, таким образом, актуальным термодинамическим потенциалом является энергия. Внутренняя кора состоит из нейтронов, протонов и электронов. Будем рассматривать низкочастотные низкоэнергетические явления, и поэтому предположение об электрической нейтральности и отсутствии электрических токов будет выполняться с хорошей степенью точности. Для выполне-

¹⁾ При подготовке этой статьи весьма полезной для нас оказалась глава, написанная Питаевским [6].

ния этих условий характерные масштабы длины L и времени τ должны удовлетворять условиям $L \gg \gg \lambda_D$, где $\lambda_D \approx (\pi/4\alpha)^{1/2} \hbar/p_{Fe}$ — длина экранировки электронов Дебая, и $L/\tau \ll v_e$, где v_e — скорость Ферми электронов, близкая к скорости света c . Здесь $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры и p_{Fe} — электронный фермиевский импульс. Скорость рассматриваемых коллективных мод намного меньше c , так что предположение об электрической нейтральности выполняется для масштабов длины, много больших длины экранировки электронов, что по порядку величины немного превосходит расстояния между элементами пасты. При этих условиях систему можно рассматривать, как состоящую из двух компонент: нейтронов и заряженных частиц.

Гидродинамическое описание является хорошим приближением на характерных масштабах, превосходящих длину когерентности $\sim \hbar v/\pi\Delta$, где v — фермиевская скорость нуклонов и Δ — энергия сверхтекучей щели. Поскольку длина когерентности порядка расстояния между элементами пасты, указанное условие не представляет дальнейших ограничений для применимости гидродинамического подхода.

Для большей ясности мы сначала детально рассмотрим однокомпонентный случай, показывающий качественные различия между обычными и сверхтекучими жидкими кристаллами. Как мы увидим ниже, наличие более одной компоненты не приводит к качественным изменениям результатов для низкочастотных мод, связанных с изменением структуры пасты, однако приводит к появлению второй моды с более высокой частотой, связанной с относительным движением компонент. Как и в случае с обычными жидкими кристаллами [5], основными переменными будут локальная плотность числа частиц $n(\mathbf{r})$ и смещение $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ пластин лазаньи перпендикулярно их плоскости или стержней спагетти перпендикулярно их направлению.

2.1. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия фаз пасты зависит от скорости структуры $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r})/\partial t$ и свойств сверхтекучей жидкости. Последнюю удобно описать с помощью величины ϕ , равной половине фазы амплитуды спаривания, усредненной на масштабах, больших расстояния между элементами структуры, но много меньших характерного масштаба L рассматриваемых явлений; это впервые было сделано в рамках модели колебаний материи внутренней коры со сферическими ядрами [9]. Использование такой усредненной величины сглаживает скачки фазы на

масштабах порядка расстояния между элементами структуры. Импульс на одну частицу конденсата равен $\hbar\nabla\phi$. Рассмотрим вначале ситуацию, когда ϕ однородна в пространстве. Полный ток (числа частиц) феноменологически выражается формулой

$$\mathbf{j}_0 = n^n \left. \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right|_0, \quad (1)$$

где n^n — нормальная плотность (числа частиц) в смысле двухжидкостной модели, а индекс «0» означает взятие производной в системе отсчета, в которой ϕ однородна в пространстве. В общем случае n^n будет также функцией $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r})/\partial t$, однако здесь, при рассмотрении линейных явлений, этой зависимостью можно пренебречь.

Плотность тока в системе отсчета, движущейся со скоростью $-\mathbf{V}$, дается стандартным результатом галилеевского преобразования:

$$\mathbf{j} = n^n \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + n\mathbf{V}. \quad (2)$$

В новой системе отсчета $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{V}_\perp t$, и фаза дается выражением $\phi = m\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}/\hbar$, где m — масса частицы. Смещение \mathbf{u} направлено перпендикулярно пластин лазаньи или стержням спагетти, поэтому в выражение для скорости во второй системе отсчета входит лишь компонента скорости \mathbf{V}_\perp , перпендикулярная пластинам или стержням. Таким образом, ток дается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= n^n \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + n^s \frac{\nabla_\perp\phi}{m} + n^s \frac{\nabla_\parallel\phi}{m} = \\ &= n^n \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\nabla_\perp\phi}{m} \right) + n \frac{\nabla\phi}{m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Производная по времени в (3) вычисляется в системе отсчета, движущейся относительно первой системы отсчета со скоростью $-\nabla\phi/m$, и мы будем использовать систему единиц, где $\hbar = 1$. Величина ∇_\parallel равна компоненте градиента вдоль стержней или в плоскости пластин. Уравнение (3) имеет вид, ожидаемый для двухжидкостной модели, однако с анизотропной нормальной плотностью. Величина $n^s = n - n^n$ равна сверхтекучей плотности числа частиц в направлении, перпендикулярном плоскости пластин или перпендикулярном направлению стержней, в то время как нормальная плотность вдоль пластин или стержней равна нулю из-за нашего предположения о трансляционной инвариантности структуры в этих направлениях.

Кинетическая энергия может быть получена аналогичным образом, и мы находим

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{n}{m} (\nabla_\parallel\phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{n^s}{m} (\nabla_\perp\phi)^2 + \frac{1}{2} mn^n \dot{\mathbf{u}}^2, \quad (4)$$

где точкой обозначена производная по времени. Это выражение похоже на формулу для смесей сверхтекучих жидкостей, полученную в работе [10], однако здесь нормальная компонента жидкости возникает благодаря периодической структуре, а не тепловым возбуждениям.

2.2. Потенциальная энергия

Мы будем иметь дело только с линейными модами, поэтому будем рассматривать отклонение плотности энергии $E = E_{kin} + E_{pot}$ от значения этой величины в однородном состоянии, с плотностью n_0 в состоянии покоя, до членов второго порядка по возмущению плотности $\delta n = n - n_0$ и по смещению \mathbf{u} . Потенциальная энергия имеет тот же вид, что и в случае обычных жидких кристаллов. Для лазаньи она дается выражением

$$E_{pot}(n, \mathbf{u}) = E_{pot}(n, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial n^2} (\delta n)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial n \partial (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u})} \delta n \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u})^2} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u})^2, \quad (\text{лазанья}). \quad (5)$$

Для удобства сравнения с результатами [6], § 48, введем обозначения

$$E_{nn} = \frac{m}{n} A, \quad E_{n\mathbf{u}} = mC, \quad E_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = nmB, \quad (6)$$

где величины A , B и C , имеющие размерность квадрата скорости, имеют те же значения, что и в [6], § 48. Уравнение (5) принимает вид

$$E_{pot}(n, \mathbf{u}) = E_{pot}(n, 0) + \frac{1}{2} \frac{mA}{n} (\delta n)^2 + mC \delta n \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} nmB (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u})^2, \quad (\text{лазанья}). \quad (7)$$

Вид потенциальной энергии для лазаньи довольно прост ввиду наличия лишь одной компоненты, перпендикулярной пластинам. Описание состояния деформированной решетки исчерпывается знанием величины относительного изменения расстояния между пластинами, равной $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}$. Случай спагетти усложняется из-за того, что вектор деформации представляет собой двумерную величину. В этом случае требуется два модуля упругости: один для однородных сжатий, второй для сдвиговых деформаций. Выбирая направление стержней вдоль оси z ,

потенциальную энергию фазы спагетти можно записать в следующей форме [5], уравнение (7.30):

$$E_{pot}(n, \mathbf{u}) = E_{pot}(n, 0) + \frac{1}{2} \frac{mA}{n} (\delta n)^2 + mC \delta n \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} nmB_s \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} nmB_t \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (\text{спагетти}), \quad (8)$$

где индексы « s » и « t » обозначают соответственно скалярный вклад тензора напряжений и его тензорный вклад.

3. СКОРОСТИ МОД

Для выявления эффектов сверхтекучести мы вычисляем скорости звука в несжимаемом приближении, следуя работе де Жена по жидким кристаллам [11]. Несжимаемость материи оказывается прекрасным приближением, поскольку модуль упругости A , описывающий объемные свойства, значительно превосходит модули B , B_t и C , зависящие от кулоновской энергии и ядерной поверхностной энергии, которые пренебрежимо малы по сравнению с объемной ядерной энергией. Будем рассматривать колебания с малой амплитудой вокруг состояния покоя материи, следовательно, уравнения движения могут быть линеаризованы по амплитуде возмущения. В разд. 7 мы вкратце обсудим нелинейные и диссипативные эффекты.

Основные уравнения содержат уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (9)$$

а также условия равенства скорости изменения плотности импульса, $m\mathbf{j}$, где \mathbf{j} дается уравнением (3), полной силе на единицу объема \mathbf{f} , или

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{f}, \quad (10)$$

где \mathbf{f} определяется выражением

$$\mathbf{f} = -\nabla p - \frac{\delta E_{pot}}{\delta \mathbf{u}}. \quad (11)$$

Здесь $p = n^2 \partial(E/n) / \partial n$ — давление, а второй член в (11) возникает за счет упругих напряжений структуры. Изменения в давлении определяются соотношением $dp = n d\mu$, где $\mu = \partial E / \partial n$ — химический

потенциал. Нам также понадобится уравнение для эволюции сверхтекучей фазы — уравнение Джозефсона:

$$\frac{\partial \delta \phi}{\partial t} = \mu - \mu_0 = -\delta \mu. \quad (12)$$

Здесь $\delta \phi = \phi + \mu_0 t$, μ_0 — химический потенциал невозмущенного состояния. Изменения химического потенциала определяются формулой

$$\delta \mu = \frac{\partial E_{pot}}{\partial n} = \frac{mA}{n} \delta n + mC \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}, \quad (13)$$

однако это выражение в явном виде не используется в вычислениях настоящего раздела.

3.1. Лазанья

Выберем ось z перпендикулярно пластинам лазаньи, а токи внутри них будут направлены вдоль оси x . Для такого выбора единственной ненулевой компонентой будет z -компонента второго члена уравнения (11), имеющая вид

$$-\frac{\partial E_{pot}}{\partial u} = mnB \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + mC \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (14)$$

Уравнение движения для плотности тока записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= \frac{n}{m} \nabla \dot{\phi} + n^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\nabla_{\perp} \dot{\phi}}{m} \right) = \\ &= -\frac{n}{m} \nabla \mu + nB \nabla_{\perp}^2 \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вклад, содержащий модуль упругости C , был отброшен вследствие предположения о несжимаемости. Условие несжимаемости записывается как $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, а его производная по времени получается из уравнения (15) в виде

$$\nabla^2 \delta \mu = mB \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}. \quad (16)$$

Рассматривая в качестве решений плоские волны $\exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$, из уравнения (16) и z -компоненты уравнения (15) получаем

$$n^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B \left(n - n^n \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (17)$$

и скорость моды $c_2 = \omega/k$ дается выражением

$$c_2^2 = B \left(\frac{n}{n^n} - \cos^2 \theta \right) \cos^2 \theta, \quad (18)$$

где θ — угол между волновым вектором и нормалью к пластинам лазаньи. Индекс «2» используется для обозначения второй моды из-за его сходства

со вторым звуком в жидком ^4He [11]. Таким образом, скорость обращается в нуль при $\theta = \pi/2$, как и в смектиках. В смектике нормальная плотность материи совпадает с полной плотностью и, следовательно, пропорциональна $|\sin \theta \cos \theta|$, обращаясь в нуль также при $\theta = 0$. Однако в сверхтекучем жидком кристалле, где $n^s = n - n^n > 0$, обращения в нуль при $\theta = 0$ не происходит. Отличие состоит в том, что в описании жидких кристаллов просачиванием можно пренебречь в лидирующем приближении. Как следствие, в возмущениях с $\theta = 0$ модуляция плотности материи жестко связана с модуляциями периодической структуры, и относительное движение материи и решетки невозможно. В случае сверхтекучего кристалла модуляция структуры не движется вместе с материей, и возможно противоположное движение структуры и материи.

Угловая зависимость скорости в уравнении (18) может быть выражена в физически более прозрачной форме при помощи тензора сверхтекучей плотности

$$\hat{n}^s = n\mathbf{1} - n^n \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}, \quad (19)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор, а $\hat{\mathbf{z}}$ — орт оси z (на анизотропию сверхтекучей и нормальной плотностей было указано в работе [12]). Следовательно,

$$c_2^2 = B \frac{n^s(\theta)}{n^n} \cos^2 \theta, \quad (20)$$

где

$$n^s(\theta) = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{n}^s \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad (21)$$

— проекция тензора сверхтекучей плотности для возмущения с волновым вектором \mathbf{k} . Коэффициент $n^s(\theta)/n^n$ аналогичен величине, возникающей в теории второго звука в жидком ^4He [13], и различие заключается в том, что здесь сверхтекучая плотность зависит от направления. Вдобавок, благодаря тому, что силы, действующие на листы лазаньи, направлены лишь вдоль нормали, возникает коэффициент $\cos^2 \theta$.

Понять такое поведение можно и с другой точки зрения, а именно, заметив, что в смектике деформация слоев приводит к токам большой величины вдоль этих слоев, поскольку для несжимаемой материи с постоянной плотностью $\nabla \cdot \mathbf{n} = 0$ и $k_x v_x + k_z v_z = 0$. Здесь \mathbf{v} — скорость материи. Тогда $v_x = -v_z \text{ctg} \theta$, т. е. поперечная скорость испытывает расходимость при $\theta = 0$ для данного v_z . Кинетическую энергию можно записать в виде

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mn(v_z^2 + v_x^2) = \frac{1}{2} \frac{mn}{\sin^2 \theta} v_z^2. \quad (22)$$

Видна расходимость эффективной массы для движения вдоль оси z (расходимость $n/\sin^2\theta$ при $\theta = 0$) и, следовательно, частота соответствующей моды обращается в нуль. Для удовлетворения условия несжимаемости в сверхтекучих жидких кристаллах необходимость в больших токах вдоль слоев отпадает благодаря возможности просачивания.

3.2. Спагетти

В случае спагетти вычисления заметно упрощаются при специальном выборе осей. Рассмотрим стержни спагетти, расположенные в направлении z , с волновым вектором, лежащим в плоскости x - z . При таком выборе осей все производные по y обращаются в нуль и плотность энергии (8) принимает вид

$$E_{pot}(n, \mathbf{u}) = E_{pot}(n, 0) + \frac{1}{2} \frac{mA}{n} (\delta n)^2 + mC\delta n \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} nmB \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} nmB_t \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2, \quad (23)$$

где $B = B_s + B_t$. Плотность импульса равна произведению тока (3) и массы частицы m , а скорость ее изменения равна полной силе, действующей на единицу объема. Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{n}{m} \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + n^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial \nabla_{\perp} \phi}{\partial t} \right) = -\frac{n}{m} \nabla \mu - \frac{\delta E_{pot}}{\delta \mathbf{u}}. \quad (24)$$

При нашем выборе координатных осей компоненты упругого вклада в силу на единицу объема даются следующими выражениями:

$$-\frac{\delta E_{pot}}{\delta u_x} = mnB \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \quad -\frac{\delta E_{pot}}{\delta u_y} = mnB_t \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (25)$$

В первом из этих уравнений мы отбросили, из-за условия несжимаемости, вклад, пропорциональный C . Производная по времени от условия несжимаемости $\partial(\nabla \cdot \mathbf{j})/\partial t = 0$, следовательно,

$$\frac{n}{m} \nabla^2 \mu = B \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3}. \quad (26)$$

Уравнения для смещений запишутся как

$$mn^n \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -n^n \frac{\partial \mu}{\partial x} + B \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \quad (27)$$

$$mn^n \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = B_t \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (28)$$

Химический потенциал μ устраняется при помощи условия несжимаемости, и для моды, в которой лишь u_x отлично от нуля, получается скорость c_2 , равная

$$c_2^2 = B \frac{n}{n^n} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{n^n}{n} \sin^2 \theta \right), \quad (29)$$

где $\sin \theta = k_x/k$. Результат похож на скорость моды (18) в лазанье, но отличается множителем $\sin^2 \theta$ (в лазанье скорость пропорциональна $\cos^2 \theta$), отражая тот факт, что сверхтекучая плотность в лазанье подавлена вдоль оси z , а в спагетти — в плоскости, перпендикулярной оси z .

Результаты для спагетти могут быть выражены с помощью сверхтекучей плотности с угловой зависимостью, как и в случае с лазаньем. Тензор сверхтекучей плотности для спагетти равен

$$\hat{n}^s = n\mathbf{1} - n^n (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}), \quad (30)$$

где \hat{x} и \hat{y} — орты осей координат x и y . Тогда

$$c_2^2 = B \frac{n^s(\theta)}{n^n} \sin^2 \theta, \quad (31)$$

где $n^s(\theta)$ вычисляется из (21), но со сверхтекучим тензором, соответствующем спагетти (30).

Другая мода является поперечной, в ней смещения имеют лишь y -компоненту, а ее скорость c_t равна

$$c_t^2 = \frac{B_t}{mn^n} \sin^2 \theta. \quad (32)$$

В этой моде появляется новая физическая особенность по сравнению со случаем лазанья, а именно, смещение происходит в направлении, перпендикулярном и волновому вектору, и стержням. Таким образом, это чисто поперечная волна, соответственно обозначенная индексом « t », превращающаяся в результат для колончатых жидких кристаллов [5], Sec. 8.1.7 при $n^n = n$.

4. ДВУХЖИДКОСТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Обобщим наши рассуждения на случай двух компонент: нейтронов и заряженных частиц. Плотность нейтронов обозначим n_n , а плотность протонов — n_p . Вследствие электрической нейтральности плотность электронов равна плотности протонов. Фазы нейтронного и протонного конденсатов обозначим соответственно $2\phi_n$ и $2\phi_p$. Использование фазы для описания протонов подразумевает неявное предположение о когерентности между соседними стержнями и слоями. Такая когерентность может

иметь место благодаря либо туннелированию протонов сквозь нейтронную жидкость, либо наличию перемычек между пластинами, обнаруженных при численном моделировании, например, в [14]. Для простоты пренебрежем разницей масс между нейтроном и протоном, поскольку она мала по сравнению с эффективной массой электрона ($\approx p_{Fe}/c$) и по сравнению с релятивистскими вкладами в массы нуклонов, которыми мы также пренебрегаем. Можно использовать основные идеи, описанные выше для однокомпонентного случая, однако выражения для токов будут более громоздкими из-за взаимного увлечения нейтронов и протонов. Естественным обобщением уравнения (3) будут выражения

$$\mathbf{j}_n = n_n^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n_{nn}^{s\perp} \frac{\nabla_{\perp} \phi_n}{m} + n_{np}^{s\perp} \frac{\nabla_{\perp} \phi_p}{m} + n_{nn}^{s\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} \phi_n}{m} + n_{np}^{s\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} \phi_p}{m}, \quad (33)$$

$$\mathbf{j}_p = n_p^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n_{pp}^{s\perp} \frac{\nabla_{\perp} \phi_p}{m} + n_{np}^{s\perp} \frac{\nabla_{\perp} \phi_n}{m} + n_{pp}^{s\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} \phi_p}{m} + n_{np}^{s\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} \phi_n}{m}. \quad (34)$$

Здесь тензор сверхтекучей плотности определяется как

$$n_{\alpha\beta}^{s\perp} = m \frac{\partial^2 E}{\partial(\nabla_{\perp} \phi_{\alpha}) \partial(\nabla_{\perp} \phi_{\beta})}, \quad (35)$$

и можно записать соответствующее уравнение для $n_{\alpha\beta}^{s\parallel}$. Из галилеевской инвариантности следуют равенства

$$n_n^n + n_{nn}^{s\perp} + n_{np}^{s\perp} = n_{nn}^{s\parallel} + n_{np}^{s\parallel} = n_n, \quad (36)$$

$$n_p^n + n_{pp}^{s\perp} + n_{np}^{s\perp} = n_{pp}^{s\parallel} + n_{np}^{s\parallel} = n_p. \quad (37)$$

Полная плотность числа нуклонов равна $n = n_p + n_n$, плотность полного тока числа частиц равна $\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_n$, плотность импульса равна $m\mathbf{j}$, а скорость его изменения дается силой на единицу объема (11). Когда плотность энергии деформации намного меньше объемной ядерной энергии, нейтроны и протоны можно считать несжимаемыми, $\nabla \cdot \mathbf{j}_p = \nabla \cdot \mathbf{j}_n = 0$. Совмещая эти условия с уравнением движения для \mathbf{j} , аналогично однокомпонентному случаю, для скорости второго звука получается уравнение (18), в котором нормальная плотность заменена на величину $n^n = n_n^n + n_p^n$. Аналогичные результаты получаются и для случая мод фазы спагетти.

5. СВЯЗЬ С ИЗМЕНЕНИЯМИ ПЛОТНОСТИ

В вычислениях выше мы предполагали несжимаемость материи. Если не делать такого предположения, то моды, ассоциированные с осцилляциями структуры пасты, будут связаны со звуковыми модами. Для иллюстрации этих эффектов рассмотрим случай лазаньи и ограничимся одной компонентой.

Плотность тока удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial j_z}{\partial t} = n^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n^s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial z} + nB \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial t} = n^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n^s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z}. \quad (39)$$

Мы убираем из уравнения (38) изменения давления, используя тот факт, что

$$\delta p = n\delta\mu = Am\delta n + mnC \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (40)$$

а также тот факт, что сверхтекучая фаза удовлетворяет уравнению Джозефсона (12). Отсюда получается выражение

$$n^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (nB - n^n C) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(C - \frac{n^n}{n} A\right) \frac{\partial n}{\partial z} \quad (41)$$

или при переходе к фурье-образу смещения и определении скорости звука как $c = \omega/k$ —

$$\left[c^2 - \left(\frac{n}{n^n} B - C\right) \cos^2 \theta\right] u = -i \frac{\cos \theta}{k} \left(\frac{c}{n^n} - \frac{A}{n}\right) \delta n. \quad (42)$$

Производная по времени от уравнения непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{p}{m} + nB \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + C \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = 0. \quad (43)$$

Подставляя (40) в (43), после фурье-преобразования получим

$$(c^2 - A + C \cos^2 \theta) \delta n = ikn \cos \theta (C - B \cos^2 \theta) u. \quad (44)$$

Из уравнений (42) и (43) получается уравнение для скоростей мод:

$$c^4 - c^2 \left(A + \left[\frac{n}{n^n} B - 2C\right] \cos^2 \theta\right) + (AB - C^2) \cos^2 \theta \left(\frac{n}{n^n} - \cos^2 \theta\right) = 0. \quad (45)$$

Когда сверхтекучая плотность равна нулю, тогда $n^n = n$, и результат сводится к полученному ранее для обычных жидких кристаллов, [6], § 47.

Модули B и C в фазах пасты, зависящие от кулоновской и поверхностной ядерных энергий, имеют намного меньшие значения, чем модуль A , который связан с объемной энергией ядерных сил в ядерной и нейтронной материях. В пределе мода, связанная с деформацией решетки, описывается уравнением (18), а мода плотности имеет скорость $c_1^2 = A$. В этом результате обнаруживается контраст со случаем жесткой пасты, соответствующим пределу в (45), при котором $B \rightarrow \infty$, а A и C остаются постоянными. Тогда получается $c_1^2 \simeq An^2(\theta)/n$, таким образом, эта скорость зависит от угла и принимает меньшие значения, чем в случае гибкой пасты. Физический смысл состоит в том, что в фазах пасты структура изгибается достаточно легко, и в модах плотности эти деформации переносятся сверхтекучей жидкостью. В этих модах происходит движение обеих компонент — и нормальной, и сверхтекучей.

В этом разделе мы рассмотрели однокомпонентную жидкость. Для того чтобы принять во внимание наличие в фазе пасты двух сверхтекучих компонент, можно обобщить рассуждения, однако без какой-либо концептуальной новизны, а лишь за счет алгебраических усложнений. Качественно новым свойством является наличие второй моды плотности, в которой нейтроны и протоны колеблются в фазе и в противофазе. Это аналогично случаю двух мод в однородной жидкой фазе материи нейтронных звезд, рассмотренному ранее в работах [15–17]. Рассуждения в случае спагетти близко следуют рассуждениям в случае лазаньи. Как показано выше, помимо двух мод, найденных в лазанье, в спагетти обнаруживается еще и поперечная мода, возникающая из-за ненулевой сдвиговой жесткости решетки. Последняя мода, будучи не связанной с колебаниями плотности, имеет такую же скорость, что и поперечная мода, полученная в несжимаемом приближении (32). Две другие моды могут быть найдены с помощью обобщения результатов предыдущего раздела на случай спагетти. Дисперсионное соотношение будет таким же, как и (45), но с заменой $\cos \theta$ на $\sin \theta$.

6. ДИСПЕРСИЯ

Для вычисления таких величин, как теплоемкость, которая зависит от поведения коллективных мод при малых волновых векторах \mathbf{k} , необходимо принять в расчет члены более высокого порядка

в градиентном разложении. Для лазаньи лидирующий член разложения равен

$$\Delta E = \frac{1}{2} K_1 (\nabla_{\parallel}^2 u)^2 = \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2, \quad (46)$$

а для спагетти —

$$\Delta E = \frac{1}{2} K_3 (\nabla_{\parallel}^2 u)^2 = \frac{1}{2} K_3 \left[\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)^2 \right], \quad (47)$$

причем выражения справа от второго знака равенства в этих уравнениях верны для специального выбора координат, который мы сделали. Величины K_1 и K_3 представляют собой модули упругости в обозначениях [18]. Когда эти члены включены в вычисления частот мод $\omega_{\mathbf{k}}$, можно найти, что второй звук в несжимаемом приближении описывается выражениями

$$\omega_2(\mathbf{k})^2 = B (k_z^2 + (k_x^2 + k_y^2) \ell_1^2) \times \left(\frac{n}{n^n} - \frac{k_z^2}{k^2} \right), \quad (\text{лазанья}), \quad (48)$$

$$\omega_2(\mathbf{k})^2 = B (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \ell_3^2) \times \left(\frac{n}{n^n} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right), \quad (\text{спагетти}), \quad (49)$$

где $\ell_1 = (K_1/nmB)^{1/2}$ и $\ell_3 = (K_3/nmB)^{1/2}$. Для поперечной моды в спагетти получается выражение

$$\omega_t(\mathbf{k})^2 = B_t (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \ell_t^2) \times \left(\frac{n}{n^n} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right), \quad (\text{спагетти}), \quad (50)$$

где $\ell_t = (K_3/nmB_t)^{1/2}$. Как будет показано в работе [19], вклад этих мод в теплоемкость пропорционален T^2 для лазаньи и $T^{5/2}$ для спагетти при низких температурах и, следовательно, превосходит вклад обычных фононов, который меняется как T^3 .

7. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой статье мы получили гидродинамические уравнения для описания динамики фаз пасты. Модель, в сущности, является трехкомпонентной: одна

скорость описывает нормальную компоненту жидкости, ассоциированную с периодической структурой, а два импульса описывают нейтронный и протонный конденсаты. Ключевое различие между фазами пасты и обычными жидкими кристаллами состоит в том, что структура перемещается со скоростью, отличной от локальной скорости материи. Мы находим, что частоты осцилляций мод, включающих деформацию структуры, имеют более высокие значения, чем в случае, если бы нуклоны были нормальными.

Как было показано для смектиков [20] и для пионных конденсатов в ядерной материи [21], дальний порядок в бесконечных системах при ненулевой температуре отсутствует. Это также применимо к фазе лазаньи, однако для количественного выяснения важности эффекта требуется дальнейшее исследование.

Для вычисления скоростей мод необходимы значения модулей упругости и компонент тензора сверхтекучих плотностей. Модули B и B_t были получены в работе [18], а оценку плотности нормальной нейтронной жидкости можно получить из [22]. Эти вычисления необходимо расширить для более глубокого понимания частот мод.

Мы проводили вычисления в гармоническом приближении и не учитывали нелинейную связь мод, которая приводит к аномальному поведению упругих свойств при длинных волнах и низких частотах [8, 23]. Такие эффекты сложно обнаружить экспериментально в обычных жидких кристаллах, однако остается открытым вопрос об их актуальности в фазах пасты. Другой открытый вопрос — затухание мод, имеющее вклады от нелинейных эффектов, как в обычных жидких кристаллах, а также от динамики электронного газа. Как и в случае обычных жидких кристаллов, эффекты диссипации особенно важны для моды, скорость которой обращается в нуль в отсутствие диссипации. Это происходит при волновых векторах, лежащих в плоскости пластин лазаньи или вдоль стержней спагетти, что на языке физики жидких кристаллов соответствует изгибной моде [5], Sec. 8.1.4 (в англоязычной литературе используется термин “undulation mode”).

В представленных здесь вычислениях мы предположили, что толщина пластин и стержней постоянна в пространстве, однако микроскопические подходы к проблеме приводят к выводу, что толщина пластин и поперечная плотность стержней модулированы в пространстве [24–27]. Однако при определенной температуре ожидается «плавление» этих модуляций, и наш подход применим выше этой

температуры. Для описания деформаций структуры при более низких температурах требуется трехмерный вектор деформации \mathbf{u} , поскольку смещения структуры в плоскости слоев или вдоль стержней приводят к изменению энергии. Как следствие, ожидается линейная зависимость скорости звука в фазе пасты во всех направлениях в пространстве.

В настоящей работе сделано предположение об идеальном порядке в структуре пасты, однако весьма вероятно, что в реальном веществе будут присутствовать дефекты наподобие найденных в численных моделях [14]. Могут также существовать области с более сложными фазами, найденными в модели Хартри – Фока [25–27], в зависящей от времени модели Хартри – Фока [28] и в модели молекулярной динамики [29]. Довольно общее свойство состоит в том, что фазы пасты могут иметь очень сложную текстуру. Важной проблемой для исследований является определение плотности дефектов и пространственного масштаба текстур. Эти величины влияют на механические свойства фаз пасты, включая модули упругости и пределы прочности, которые выступают значимыми величинами при определении силы излучения гравитационных волн вращающимися нейтронными звездами.

Вскоре после первой публикации рукописи этой статьи появилась работа, посвященная модам в фазах пасты [30]. Основным отличием было неявное предположение в [30] об отсутствии когерентности между соседними пластинами и стержнями в случае двухкомпонентной системы, что привело к появлению еще одной моды. Выяснение степени когерентности между элементами пасты является предметом отдельного рассмотрения.

Мы благодарны Gerd Schröder-Turk за информативные обсуждения и Л. П. Пятаевскому за полезную переписку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 31 16-32-60023 мол_a_дк).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, and J. R. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2066 (1983).
2. M. Hashimoto, H. Seki, and M. Yamada, *Progr. Theor. Phys.* **71**, 320 (1984).
3. C. J. Pethick and D. G. Ravenhall, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **45**, 429 (1995).

4. L. Di Gallo, M. Oertel, and M. Urban, *Phys. Rev. C* **84**, 045801 (2011).
5. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Oxford Univ. Press, Oxford (1993).
6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, Oxford (1987), ch. VI.
7. P. G. de Gennes, *J. Physique Suppl., Colloque C* **430**, 65 (1969).
8. P. C. Martin, O. Parodi, and P. S. Pershan, *Phys. Rev. A* **6**, 2401 (1972).
9. C. J. Pethick, N. Chamel, and S. Reddy, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **186**, 9 (2010).
10. A. F. Andreev and E. P. Bashkin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 319 (1975) [*ЖЭТФ* **42**, 164 (1976)].
11. P. G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals*, Oxford Univ. Press, Oxford (1974), Sec. 7.2.2.3.
12. N. Martin and M. Urban, *Phys. Rev. C* **94**, 065801 (2016).
13. L. Landau, *J. Phys. USSR* **5**, 71 (1941).
14. D. K. Berry, M. E. Caplan, C. J. Horowitz, G. Huber, and A. S. Schneider, *Phys. Rev. C* **94**, 055801 (2016).
15. R. I. Epstein, *Astrophys. J.* **333**, 880 (1988).
16. P. Bedaque and S. Reddy, *Phys. Lett. B* **735**, 340 (2014).
17. D. N. Kobyakov and C. J. Pethick, *Astrophys. J.* **836**, 203 (2017).
18. C. J. Pethick and A. Y. Potekhin, *Phys. Lett. B* **427**, 7 (1998).
19. D. N. Kobyakov and C. J. Pethick, готовится к публикации.
20. A. Caillé, *C. R. Acad. Sci. Ser. B* **274**, 891 (1972), Sec. 22 D.
21. G. Baym, B. Friman, and G. Grinstein, *Nucl. Phys. B* **210**, 193 (1982).
22. G. Watanabe and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 062701 (2017).
23. G. Grinstein and R. A. Pelcovits, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 856 (1981).
24. R. D. Williams and S. E. Koonin, *Nucl. Phys. A* **435**, 844 (1985).
25. W. G. Newton and J. R. Stone, *Phys. Rev. C* **79**, 055801 (2009).
26. H. Pais and J. R. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 151101 (2012).
27. B. Schuetrumpf, M. A. Klatt, K. Iida, G. E. Schröder-Turk, J. A. Maruhn, K. Mecke, and P.-G. Reinhard, *Phys. Rev. C* **91**, 025801 (2015).
28. F. Sébille, V. de la Mota, and S. Figerou, *Phys. Rev. C* **84**, 055801 (2011).
29. H. Sonoda, G. Watanabe, K. Sato, K. Yasuoka, and T. Ebisuzaki, *Phys. Rev. C* **77**, 035806 (2008).
30. D. Durel and M. Urban, *Phys. Rev. C* **97**, 065805 (2018).