

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ РАЙССНЕРА – НОРДСТРЁМА

В. П. Незнамов^{a,b}, И. И. Сафронов^a, В. Е. Шемарулин^a*

^a ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

^b Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 мая 2018 г.

При использовании уравнения второго порядка с эффективным потенциалом поля Райсснера – Нордстрёма (RN) с двумя горизонтами событий для заряженных и незаряженных фермионов доказано существование вырожденных стационарных связанных состояний с квадратично-интегрируемыми радиальными волновыми функциями. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий в интервалах от нуля до долей комптоновской длины волны фермионов в зависимости от величин гравитационной и электромагнитных констант связи и от величин углового и орбитального моментов j, l . В случае экстремальных полей RN показано отсутствие стационарных решений уравнения второго порядка, соответствующих связанным состояниям фермионов с энергиями $E < mc^2$ для любых значений гравитационной и электромагнитной констант связи. Для голой сингулярности RN решением уравнения второго порядка при определенных значениях физических параметров показано существование дискретного энергетического спектра. Дискретный спектр существует как для заряженных, так и для незаряженных фермионов. Голая сингулярность RN в квантовой механике с уравнением второго порядка для частиц со спином $1/2$ не несет угрозы космической цензуре, так как прикрыта бесконечно большим потенциальным барьером. Электрически нейтральные системы атомного типа (коллапсары RN с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях) предложены для рассмотрения в качестве частиц темной материи.

DOI: 10.1134/S0044451018100103

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] для метрики Шварцшильда при использовании самосопряженного уравнения второго порядка со спиновой волновой функцией доказано существование вырожденного стационарного связанного состояния фермионов с энергией связи $E_b = mc^2$, где m — масса фермиона, c — скорость света. Там же были анонсированы энергии вырожденных стационарных связанных состояний фермионов для полей Райсснера – Нордстрёма (RN), Керра, Керра – Ньюмена.

В настоящей работе мы обсуждаем стационарные решения уравнения второго порядка для фермионов в поле RN. Первоначально мы еще раз уста-

навливаем отсутствие стационарных регулярных решений уравнения Дирака в поле RN. Причинами этого являются

— квадратичная неинтегрируемость волновых функций в окрестности горизонтов событий (см. также [2]);

— невыполнение одного из условий существования стационарных связанных состояний фермионов в экстремальном поле RN в области вне единственного горизонта событий, ранее доказанного в работе [3];

— для области под горизонтом событий экстремального поля RN и для случая голой сингулярности RN существование двух регулярных решений с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями [4].

При использовании для фермионов самосопряженного уравнения второго порядка со спиновой

* E-mail: vpneznamov@vniief.ru, vpneznamov@mail.ru

волновой функцией ситуация качественно изменяется.

— В работе для метрики RN с двумя горизонтами событий для заряженных и незаряженных фермионов обосновано и доказано существование вырожденных стационарных связанных состояний с соответствующими квадратично-интегрируемыми радиальными волновыми функциями.

— Для экстремального поля RN с единственным горизонтом событий, наоборот, доказана невозможность существования связанных состояний фермионов вне горизонта событий. Связанное состояние возможно под горизонтом событий в случае одноименных зарядов фермиона и источника поля RN для энергии фермиона $E > mc^2$ [5].

— Для голой сингулярности RN при определенных значениях физических параметров обосновано и численно показано существование дискретного спектра частиц со спином 1/2.

— В работе продемонстрировано, что поле голой сингулярности RN в квантовой механике с уравнением второго порядка для фермионов не несет угрозы космической цензуре, так как сингулярность прикрыта бесконечно большим потенциальным барьером. Этот вывод подтверждает результаты [6], полученные в квантовой механике бесспиновых частиц для ряда времениподобных голых сингулярностей (в том числе для метрики RN).

Работа построена следующим образом. В разд. 2 получен самосопряженный дираковский гамильтониан в поле RN с плоским скалярным произведением волновых функций, проводится разделение переменных, исследуется асимптотика радиальных волновых функций, устанавливается существование нерегулярных стационарных решений. В случае асимптотик при $r \rightarrow 0$, в соответствии с [4], фиксируется существование двух квадратично-интегрируемых решений уравнения Дирака.

Раздел 3 посвящен самосопряженному уравнению второго порядка со спинорной волновой функцией. Волновые функции уравнения являются квадратично-интегрируемыми в окрестностях горизонтов событий и позволяют установить физически приемлемый выбор одного из двух регулярных решений при $r \rightarrow 0$. Особенности эффективных потенциалов свидетельствуют о возможности существования связанных состояний фермионов как при наличии двух горизонтов событий, так и для случая голой сингулярности RN. Наоборот, отсутствие потенциальной ямы для экстремального поля RN свидетельствует об отсутствии в этом случае связанных состояний фермионов с $E < mc^2$. В

разд. 4 уравнение второго порядка с эффективным потенциалом после преобразования Прюфера [7–10] и введения фазовой функции представляется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. В разд. 5 приводятся результаты численных расчетов с обсуждением тактики их проведения в окрестностях особых точек $r = \infty$, $r = 0$ и $r = r_{\pm}$, где r_{\pm} — радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля RN. В разд. 6 устанавливается отсутствие угрозы космической цензуре в квантовой механике движения фермионов в поле голой сингулярности RN. В разд. 7 электрически нейтральные атомные системы с фермионами, находящимися в вырожденных связанных состояниях, предложены в качестве частиц темной материи. В Заключении излагаются и обсуждаются основные результаты работы. В Приложениях А, В приводится процедура получения и явный вид эффективных потенциалов уравнения второго порядка в поле RN.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ПОЛЕ РАЙССНЕРА – НОРДСТРЁМА

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики плоского пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

Здесь и ниже подчеркнутые индексы являются локальными.

Индексы с греческими буквами принимают значения $0, 1, 2, 3, \dots$; индексы с латинскими буквами — значения $1, 2, 3, \dots$. Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

2.1. Метрика Райсснера – Нордстрёма

Статическая метрика RN характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q :

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2)$$

В формуле (2)

$$g_{00} = f_{R-N}, \quad g^{00} = (f_{R-N})^{-1},$$

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right),$$

$r_0 = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус поля Шварцшильда, $r_Q = \sqrt{G}Q/c^2$, G — гравитационная постоянная, c — скорость света.

1. Если $r_0^2 > 4r_Q^2$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где r_{\pm} — радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий,

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай $r_0^2 = 4r_Q^2$ соответствует экстремальному полю RN с единственным горизонтом событий $r_{\pm} = r_0/2$.

3. Случай $r_0^2 < 4r_Q^2$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае $f_{R-N} > 0$.

2.2. Самосопряженный гамильтониан

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в работах [11–13].

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином 1/2, массой m и зарядом q в поле RN имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$H_{\eta} = H_{\eta}^+$ — самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ гамильтониан H_{η} легко находится из полученного в [13] равенства

$$H_{\eta} = \frac{\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+}{2}, \quad (6)$$

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + qA^0. \quad (7)$$

В (7) подразумевается суммирование по $k = 1, 2, 3$.

В равенствах (5)–(7) приняты следующие обозначения. Индекс «+» означает эрмитово сопряжение. Знак « \sim » над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [14], $A^0 = Q/r$ — скалярный электромагнитный потенциал для метрики RN, $\tilde{\gamma}^{\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) — матрицы Дирака с мировыми индексами. Величины $\tilde{\gamma}^{\mu}$ связаны с матрицами γ^{β}

через тетрадные векторы в калибровке Швингера ($\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\beta}^{\mu} \gamma^{\beta}$). Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики RN равны

$$H_0^0 = \left(\sqrt{f_{R-N}}\right)^{-1}, \quad H_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}, \quad (8)$$

$$H_2^2 = r^{-1}, \quad H_3^3 = (r \sin \theta)^{-1}.$$

Принимая во внимание (6)–(8), в сферических координатах (r, θ, φ) можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана $H_{\eta} = H_{\eta}^+$:

$$H_{\eta} = \sqrt{f_{R-N}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) -$$

$$- i \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[\gamma^2 \gamma^3 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{qQ}{r}. \quad (9)$$

Здесь γ^0, γ^k — матрицы Дирака с локальными индексами.

Выражение в гамильтониане (9), содержащееся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

2.3. Разделение переменных

Для разделения переменных представим биспинор $\Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\Psi_{\eta}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_{\varphi}\varphi} e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла – Уилера [15]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_{\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) =$$

$$= i\kappa \xi(\theta). \quad (11)$$

Чтобы использовать уравнение (11), удобно провести эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11) $\xi(\theta)$ — сферические гармоники для спина 1/2, σ^k — двумерные матрицы Паули, E — энергия дираковской частицы, $m_{\varphi} = -j, -j + 1, \dots, j$ — азимутальная компонента углового момента j , κ — квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2, \end{cases} \quad (13)$$

j, l — квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы. $\xi(\theta)$ можно представить в виде [16]

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi+1/2} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} (\kappa - m_\varphi + 1/2) P_l^{m_\varphi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В (14) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей, $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных получаем уравнения для радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$:

$$f_{R-N} \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F(\rho) - \\ - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G(\rho) = 0, \quad (15) \\ f_{R-N} \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G(\rho) + \\ + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F(\rho) = 0.$$

В (15) введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c}, \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}, \\ \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_p^2}, \quad (16) \\ \alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G} Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_p} m \frac{Q}{e}, \\ \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{q}{e} \frac{Q}{e}.$$

Здесь $l_c = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны дираковской частицы; $M_p = \sqrt{\hbar c/G} = 2.2 \cdot 10^{-5}$ г ($1.2 \cdot 10^{19}$ ГэВ) — планковская масса; $\alpha_{fs} = e^2/\hbar c \approx 1/137$ — электромагнитная постоянная тонкой структуры; α, α_{em} — гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q — безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике RN.

В обозначениях (16)

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}. \quad (17)$$

При наличии внешнего и внутреннего горизонтов событий имеем $\alpha^2 > \alpha_Q^2$ и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}, \quad (18)$$

где

$$\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}. \quad (19)$$

Для экстремального поля RN $\alpha^2 = \alpha_Q^2, \rho_+ = \rho_- = \alpha$ и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \quad (20)$$

Случай голой сингулярности RN реализуется при $\alpha^2 < \alpha_Q^2$.

2.4. Асимптотика радиальных волновых функций

2.4.1. Наличие горизонтов событий ρ_+, ρ_- ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$)

При $\rho \rightarrow \infty$ ведущие члены асимптотик равны (см., например, [17, 18])

$$F = C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}, \\ G = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \times \\ \times \left(-C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho} \right), \quad (21)$$

где $\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho)$ — степенные функции от ρ . Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (21), т.е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \rightarrow 0$ в [4] для функций $f(\rho) = \rho F(\rho), g(\rho) = \rho G(\rho)$ доказано существование двух квадратично-интегрируемых решений уравнения Дирака с корнями определяющего уравнения $s_1 = 0, s_2 = 2$. В этом случае невозможна постановка краевой задачи определения стационарных решений уравнения Дирака, соответствующих связанным состояниям фермионов.

При $\rho \rightarrow \rho_+$ представим функции $F(\rho), G(\rho)$ в виде

$$F|_{\rho \rightarrow \rho_+} = (|\rho - \rho_+|)^{s_+} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(+)} (|\rho - \rho_+|)^k, \\ G|_{\rho \rightarrow \rho_+} = (|\rho - \rho_+|)^{s_+} \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(+)} (|\rho - \rho_+|)^k. \quad (22)$$

Определяющее уравнение для системы (15) приводит к решению

$$s_+ = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\rho_+^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right). \quad (23)$$

При $\rho \rightarrow \rho_-$ представим $F(\rho), G(\rho)$ в виде

$$F|_{\rho \rightarrow \rho_-} = (|\rho_- - \rho|)^{s_-} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(-)} (|\rho_- - \rho|)^k, \quad (24)$$

$$G|_{\rho \rightarrow \rho_-} = (|\rho_- - \rho|)^{s_-} \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(-)} (|\rho_- - \rho|)^k.$$

В данном случае определяющее уравнение для системы (15) приводит к решению

$$s_- = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right). \quad (25)$$

Из выражений (23), (25) видно, что осциллирующие части решений (22), (24) исчезают при энергиях фермиона $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$.

Формально решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$ являются единственными решениями уравнений (15). Однако эти решения являются нефизичными из-за логарифмической расходимости нормировочного интеграла

$$N_D \int (F^* F + G^* G) \rho^2 d\rho \quad (26)$$

вблизи горизонтов событий.

В результате мы так же, как и авторы [2], приходим к выводу об отсутствии решений уравнения Дирака, соответствующих стационарным связанным состояниям фермионов при наличии горизонтов событий в метрике RN.

2.4.2. Экстремальное поле

Райсснера – Нордстрёма ($\rho_+ = \rho_- = \alpha, \alpha^2 = \alpha_Q^2$)

Для области вне горизонта событий $\rho > \alpha$ в работе [3] определены три условия, при выполнении которых возможно существование стационарных связанных состояний фермионов:

$$\varepsilon = \alpha_{em}/\alpha, \quad (27)$$

$$\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > 1/4, \quad (28)$$

$$n + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_{em}^2} + \sqrt{\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2} = 0. \quad (29)$$

В (29) n – положительное целое число.

Поскольку $|\varepsilon| < 1$ и $|\alpha_{em}| < \alpha$, условие (29) для экстремального поля RN не выполняется. Для области под горизонтом событий $0 < \rho < \alpha$, как и в предыдущем разд. 2.4.1, отсутствует возможность постановки задачи определения стационарных решений уравнения Дирака.

2.4.3. Голая сингулярность Райсснера – Нордстрёма ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$)

При $\rho \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика (21). При $\rho \rightarrow 0$, как и в разд. 2.4.1, 2.4.2, остается проблема существования двух квадратично-интегрируемых решений уравнения Дирака.

Таким образом, в целом показано отсутствие стационарных решений уравнения Дирака, соответствующих связанным фермионным состояниям в поле RN. При наличии двух горизонтов событий отсутствие стационарных регулярных решений обусловлено квадратичной неинтегрируемостью волновых функций, что согласуется с выводами [2]. Для экстремального поля RN отсутствие стационарных связанных состояний фермионов вне горизонта событий связано с невыполнением условия (29) [3]. Для экстремального поля RN в области под горизонтом событий отсутствует возможность постановки задачи определения стационарных решений уравнения Дирака из-за наличия при двух квадратично-интегрируемых решений для радиальных волновых функций [4]. Аналогичная проблема существует в случае голой сингулярности RN.

Ситуация качественно изменяется при использовании для фермионов уравнения второго порядка со спинорной волновой функцией.

3. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ РАЙССНЕРА – НОРДСТРЕМА

Для получения уравнения второго порядка необходимо осуществить три этапа:

- 1) получение самосопряженного гамильтониана или получение самосопряженного уравнения Дирака;
- 2) переход в уравнении второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям;
- 3) проведение неунитарного преобразования подобия для обеспечения самосопряженности уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

Процедура получения уравнений второго порядка для фермионов в поле RN представлена в Приложении А. Уравнения для радиальных функций $\psi_F(\rho), \psi_G(\rho)$ имеют вид уравнения Шредингера с эффективными потенциалами $U_{eff}^F(\rho), U_{eff}^G(\rho)$, нелинейно зависящими от энергии ε :

$$\frac{d^2\psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho))\psi_F(\rho) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{d^2\psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho))\psi_G(\rho) = 0. \quad (31)$$

В уравнениях (30), (31)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (32)$$

$$\psi_F(\rho) = g_F(\rho)F(\rho), \quad (33)$$

$$\psi_G(\rho) = g_G(\rho)G(\rho). \quad (34)$$

Явный вид $U_{eff}(\rho)$ и $g(\rho)$ приведен в Приложениях А и В.

Уравнения (30), (31) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, $\kappa \rightarrow -\kappa$, $\alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$. Отсюда следует, что уравнения (30), (31) описывают движение частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (30) для функции $\psi_F(\rho)$ с эффективным потенциалом U_{eff}^F . Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$. Аналогично нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди-Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [19]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$ и при преобразовании Фолди-Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный $F(\rho)$.

3.1. Стационарные решения $\varepsilon = \varepsilon_{RN}$

Здесь и ниже ε_{RN} — стационарные решения уравнения второго порядка (30); $\varepsilon_{RN} = \alpha_{em}/\rho_+$, α_{em}/ρ_- при наличии двух горизонтов событий (см. (23), (25)) и $\varepsilon_{RN} = \alpha_{em}/\alpha$ в случае экстремального поля RN (см. (27)).

3.1.1. Особенности эффективных потенциалов при $\varepsilon = \varepsilon_{RN}$

При $\rho \rightarrow \infty$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{RN}) \rightarrow \varepsilon_{RN} \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}(1 - 2\varepsilon_{RN}^2) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (35)$$

При наличии двух горизонтов событий ρ_+, ρ_-

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}\right)\Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_+)^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - \rho_+|^{3/2}}\right), \quad (36)$$

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}\right)\Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_-)^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - \rho_-|^{3/2}}\right). \quad (37)$$

Для экстремального поля RN ($\rho_+ = \rho_- = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha_Q^2$)

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} \times \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)^2 + O\left(\frac{1}{|\rho - \alpha|^3}\right), \quad (38)$$

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{1}{2(\rho - \alpha)^2} \times \left[\frac{1}{4} - (\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2)\right] + O\left(\frac{1}{|\rho - \alpha|}\right). \quad (39)$$

Асимптотики (36), (37) представляют собой потенциальные ямы, обратно пропорциональные квадрату расстояний до горизонтов событий ρ_+, ρ_- с коэффициентом $K = 3/32 < 1/8$, что свидетельствует о возможности существования стационарных связанных состояний квантовомеханических частиц со спином 1/2 (см., например, [20]).

Для экстремального поля RN из асимптотики (39) условие существования потенциальной ямы и условие существования в ней стационарных связанных состояний дираковских частиц ($K < 1/8$) можно записать в виде

$$0 < \kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 < 1/4. \quad (40)$$

Поскольку для связанных состояний $-1 < \varepsilon = \alpha_{em}/\alpha < 1$, а константа разделения $|\kappa| \geq 1$ (см. (13)), условие (40) не выполняется при любых допустимых значениях $\kappa, \alpha, \alpha_{em}$. Уже на данном этапе можно сказать, что в экстремальном поле RN не существует стационарных связанных состояний фермионов с энергиями $|\varepsilon| < 1$.

При $\rho \rightarrow 0$ для любых значений ε

$$U_{eff}^F\Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (41)$$

Асимптотика (41) представляет собой бесконечно большой отталкивающий барьер.

3.1.2. Квадратичная интегрируемость радиальных волновых функций. Асимптотика функций $\psi_F(\rho, \varepsilon)$

3.1.2.1. При $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (33) и $g_F|_{\rho \rightarrow \infty} = \rho$ (см. Приложения А и В)

$$\psi_F|_{\rho \rightarrow \infty} = \rho F|_{\rho \rightarrow \infty}. \quad (42)$$

Для финитного движения частиц со спином 1/2 с учетом (21)

$$\psi_F|_{\rho \rightarrow \infty} = C_1 \varphi_1(\rho) \rho e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}. \quad (43)$$

3.1.2.2. При наличии двух горизонтов событий представим функцию $\psi_F(\rho, \varepsilon_{RN})$ в следующем виде: при $\rho \rightarrow \rho_+$

$$\begin{aligned} \psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} &= \\ &= |\rho - \rho_+|^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(+)} |\rho - \rho_+|^k, \end{aligned} \quad (44)$$

при $\rho \rightarrow \rho_-$

$$\begin{aligned} \psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} &= \\ &= |\rho - \rho_-|^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(-)} |\rho - \rho_-|^k. \end{aligned} \quad (45)$$

Из (30) с учетом (44), (45), (36), (37) следует определяющее уравнение

$$s(s-1) + 3/16 = 0 \quad (46)$$

с решениями $s_1 = 3/4, s_2 = 1/4$.

Оба решения приводят к регулярным, квадратично-интегрируемым решениям для волновой функции $\psi_F(\rho, \varepsilon_{RN})$. Для однозначного выбора решения обратимся к асимптотикам (22), (24) для радиальной функции уравнения Дирака $F(\rho)$ и к преобразованию (33) с $g_F|_{\rho_{\pm}} \sim |\rho - \rho_{\pm}|^{3/4}$ (см. Приложения А и В). Получаем

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = C_3 |\rho - \rho_+|^{1/4}, \quad (47)$$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = C_4 |\rho - \rho_-|^{1/4}. \quad (48)$$

Асимптотики (47), (48) соответствуют решению определяющего уравнения (46) $s_2 = 1/4$. Ниже решения уравнения (30) с асимптотиками (47), (48) будем использовать в качестве собственных функций стационарных связанных состояний фермионов с собственными значениями $\varepsilon_{RN} = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$. Эти решения являются квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий. Отметим, что волновые функции (47), (48) на горизонтах событий ρ_+, ρ_- равны нулю.

3.1.2.3. При $\rho \rightarrow 0$ для любых значений ε функцию $\psi_F(\rho, \varepsilon)$ представим в виде

$$\psi_F(\varepsilon)|_{\rho \rightarrow 0} = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(0)} \rho^k. \quad (49)$$

Из (30) с учетом (49), (41) имеем определяющее уравнение вида

$$s(s-1) - 3/4 = 0 \quad (50)$$

с решениями $s_1 = 3/2, s_2 = -1/2$.

Решение с s_2 мы отвергаем, так как оно приводит к отсутствию квадратичной интегрируемости $\psi_F(\rho, \varepsilon)$ в окрестности $\rho = 0$.

В результате имеем

$$\psi_F(\varepsilon)|_{\rho \rightarrow 0} = C_5 \rho^{3/2}. \quad (51)$$

Таким образом, мы установили однозначное асимптотическое поведение волновых функций уравнения второго порядка (30) при наличии двух горизонтов событий ρ_+, ρ_- ($\rho \in (0, \rho_-], \rho \in [\rho_+, \infty)$) и для голой сингулярности $\rho \in (0, \infty)$. Аналогичным образом можно установить асимптотику волновых функций в случае экстремального поля RN ($\rho_+ = \rho_- = \alpha; \alpha^2 = \alpha_Q^2$). Однако для целей данной работы это не требуется, так как выше для этого случая мы показали отсутствие стационарных связанных состояний фермионов с $|\varepsilon| < 1$ по обе стороны единственного горизонта событий.

3.1.3. Область определения радиальных волновых функций $\psi_F(\rho, \varepsilon)$

Для голой сингулярности RN областью определения радиальных волновых функций является область

$$\rho \in (0, \infty). \quad (52)$$

При наличии двух горизонтов событий область (52) можно разбить на три области:

$$\rho \in [\rho_+, \infty), \quad (53)$$

$$\rho \in (\rho_-, \rho_+), \quad (54)$$

$$\rho \in (0, \rho_-]. \quad (55)$$

Области (53), (54) и области (54), (55) отделены друг от друга бесконечно глубокими потенциальными ямами

$$U \sim -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_{\pm})^2}$$

(см. (36), (37)). Волновые функции на горизонте событий равны нулю (см. (47), (48)). В областях (53), (55) эффективный потенциал $U_{eff}^F(\rho)$ и радиальная волновая функция $\psi_F(\rho)$ являются вещественными. В области (54) между горизонтами событий эти величины становятся комплексными. Ниже мы будем рассматривать области (53), (55). Для этих областей

решениям уравнения второго порядка $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ соответствуют регулярные вещественные квадратично-интегрируемые радиальные волновые функции $\psi_F(\varepsilon_{RN}, \rho)$, обращающиеся в нуль при $\rho = \rho_+$ или $\rho = \rho_-$.

В разд. 4 мы продемонстрируем это численными решениями уравнения второго порядка (30).

3.2. Непроницаемые потенциальные барьеры

Эффективный потенциал (A.22) может при некоторых $\rho = \rho_{cl}^\pm$ иметь особенности вида

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^\pm} \sim \frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}\right)^2}. \quad (56)$$

Эти особенности могут содержаться во втором слагаемом (A.22), равном

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2$$

(см. Приложение А).

Радиусы ρ_{cl}^\pm , при достижении которых выражение в знаменателе (56) равно нулю, определяются равенствами

$$\rho_{cl}^\pm = \frac{\alpha - \alpha_{em}\varepsilon \pm \sqrt{(\alpha - \alpha_{em}\varepsilon)^2 - (\alpha_Q^2 - \alpha_{em}^2)(1 - \varepsilon^2)}}{1 - \varepsilon^2}. \quad (57)$$

Асимптотику (56) с учетом (57) можно представить в виде

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^\pm} = \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl}^\pm)^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - \rho_{cl}^\pm|}\right). \quad (58)$$

Известно, что такие потенциальные барьеры являются квантовомеханически непроницаемыми [21]¹⁾.

При существовании хотя бы одной особенности (58) в эффективном потенциале $U_{eff}^F(\rho)$ при $\rho > \rho_{cl}^+$ отсутствует потенциальная яма, необходимая для возникновения связанных состояний с $-1 < \varepsilon_n < 1$. На рис. 1 приведены характерные зависимости $U_{eff}^F(\rho)$ с одной и с двумя особенностями.

Далее рассмотрим условия возникновения особенностей (58) при наличии двух горизонтов событий и в случае голой сингулярности RN.

¹⁾ Следует иметь в виду, что авторы [21] использовали уравнение типа Шредингера (30) без множителя 2. В нашем случае барьер $K/(\rho - \rho_{cl}^\pm)^2$ непроницаем, если $K \geq 3/8$.

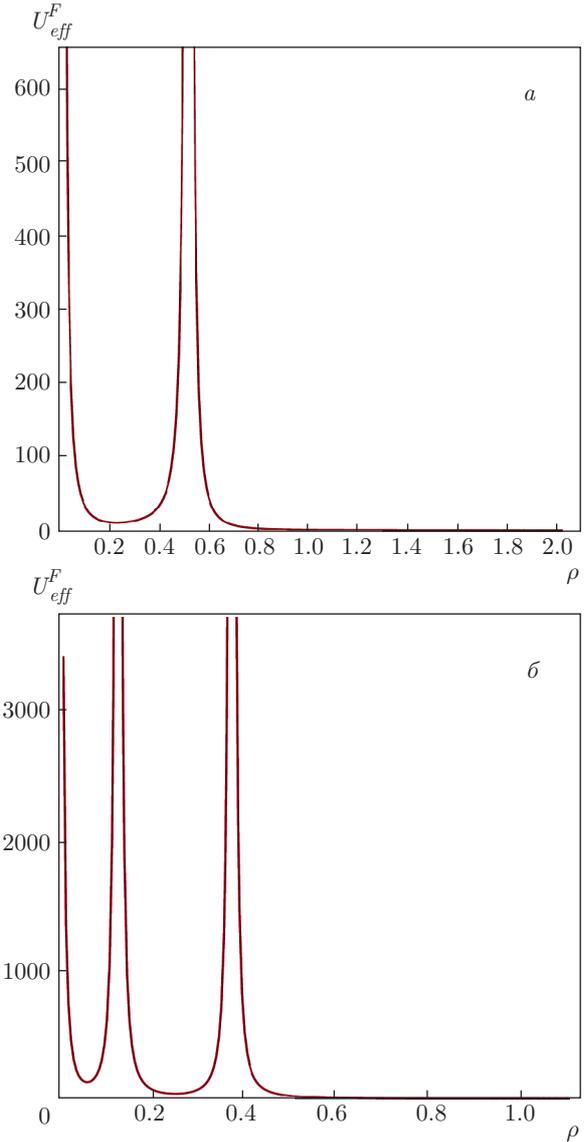


Рис. 1. Зависимости $U_{eff}^F(\rho)$ в поле голой сингулярности RN при а) $\alpha = 0.25$, $\alpha_Q = 0.5$, $\alpha_{em} = 1$, $\kappa = -1$, $\varepsilon = 0.9$, $\rho_{cl}^+ \simeq 0.5335$; б) $\alpha = 0.25$, $\alpha_Q = 0.5$, $\alpha_{em} = 0.45$, $\kappa = -1$, $\varepsilon = 0$, $\rho_{cl}^- = 0.125$, $\rho_{cl}^+ = 0.375$

3.2.1. Наличие двух горизонтов событий ρ_+ , ρ_- ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$); области определения волновых функций $\rho \in [\rho_+, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_-]$

Во-первых, выражение

$$\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{\frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}} \quad (59)$$

может быть равным нулю при $\varepsilon = 0$, $\alpha_{em} = 0$ и $\rho = \rho_\pm$. В этом случае новая особенность U_{eff}^F не

появляется. По-прежнему, (см. (36), (37))

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{\pm}} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_{\pm})^2}.$$

Во-вторых, для $\varepsilon \neq 0$, $\alpha_{em} \neq 0$ рассмотрим возможность обращения в нуль выражения (59) при $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(\rho_{cl} - \rho_+)(\rho_{cl} - \rho_-)}{\rho_{cl}^2}} &= \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}} - \varepsilon = \\ &= \alpha_{em} \frac{\rho_{\pm} - \rho_{cl}}{\rho_{cl}\rho_{\pm}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Для области определения $\rho \in [\rho_+, \infty)$ мы ищем существование $\rho_{cl} > \rho_+$. Из положительности левой части равенства (60) следует, что это возможно лишь при $\alpha_{em} < 0$ и $-1 < \varepsilon < 0$. Для области определения $\rho \in (0, \rho_-)$ возможное значение ρ_{cl} должно быть меньше ρ_- . Из равенства (60) следует, что это возможно лишь при $\alpha_{em} > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$. Из равенства (60) можно показать, что неравенства $\rho_{cl} > \rho_+$ и $\rho_{cl} < \rho_-$ не выполняются для обеих областей определения волновых функций. Таким образом, для решений $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$, для связанных состояний $-1 < \varepsilon < 1$ выражение (56) является несингулярным и непроницаемые барьеры вида (58) отсутствуют.

3.2.2. Голая сингулярность

Райсснера – Нордстрёма ($\alpha_Q^2 > \alpha^2$); область определения волновых функций $\rho \in (0, \infty)$

Как и выше, мы рассматриваем условия существования ρ_{cl} для связанных состояний с энергиями в интервале $-1 < \varepsilon < 1$.

Из положительности $\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}$ равенство знаменателя нулю в (56) возможно лишь при

$$\alpha_{em}/\rho - \varepsilon > 0. \quad (61)$$

Неравенство (61) для $\rho = \rho_{cl}^{\pm}$ можно представить в следующем виде.

В случае $\alpha_{em} > 0$ (одноименные заряды источника поля голой сингулярности RN и фермиона)

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_{em}} \rho_{cl}^{\pm} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (62)$$

$$-\frac{|\varepsilon|}{\alpha_{em}} \rho_{cl}^{\pm} < 1 \quad \text{при} \quad -1 < \varepsilon < 0. \quad (63)$$

Неравенство (63) выполняется при любых значениях $\alpha_{em} > 0$ и $|\varepsilon| < 1$.

В случае $\alpha_{em} < 0$ (разноименные заряды источника поля голой сингулярности RN и фермиона)

$$\frac{|\varepsilon|}{|\alpha_{em}|} \rho_{cl}^{\pm} > 1 \quad \text{при} \quad -1 < \varepsilon < 0. \quad (64)$$

Для интервала $0 < \varepsilon < 1$ и $\alpha_{em} < 0$ неравенство (61) не выполняется и особенности типа (58) отсутствуют.

Условие положительности подкоренного выражения в (57) $N \geq 0$ можно представить в виде

$$N = \alpha_Q^2 \varepsilon^2 - 2\alpha \alpha_{em} \varepsilon + \alpha^2 - \alpha_Q^2 + \alpha_{em}^2 \geq 0. \quad (65)$$

Дискриминант трехчлена (65) $D = 4(\alpha_{em}^2 - \alpha_Q^2) \times (\alpha_Q^2 - \alpha^2)$.

Условие (65) выполняется, если $D \geq 0$, т.е. $\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$; условие (65) частично выполняется, если $D < 0$ и $\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$. В этом случае корни трехчлена (65) равны

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\alpha \alpha_{em} \pm \sqrt{(\alpha_Q^2 - \alpha_{em}^2)(\alpha_Q^2 - \alpha^2)}}{\alpha_Q^2}. \quad (66)$$

Условие (65) при $D < 0$ выполняется, если $\varepsilon \notin (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$.

В результате анализ существования особенностей типа (58) сводится к выполнению трех неравенств

$$\frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}^{\pm}} - \varepsilon > 0, \quad \rho_{cl}^{\pm} \geq 0, \quad N \geq 0. \quad (67)$$

Результаты анализа приведены в табл. 1.

Таким образом, из анализа следует, что при определенных значениях физических параметров возможно существование стационарных связанных состояний фермионов в поле голой сингулярности RN. Отметим, что при $\alpha_{em} < 0$ (разноименные заряды) и $|\alpha_{em}| < \alpha$ параметры метрики RN не могут обеспечить существование сильносвязанных стационарных состояний фермионов с $-1 < \varepsilon < 0$.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРИЮФЕРА И АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИЙ

Для численного решения уравнения второго порядка применим преобразование Приюфера [7–10] к уравнению (30) с эффективным потенциалом $U_{eff}^F(\rho)$:

$$\begin{aligned} \psi_F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\psi_F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (68)$$

Таблица 1. Условия существования непроницаемых барьеров и связанных состояний фермионов в поле голой сингулярности RN

Интервалы α_{em} и ε		Условия	ρ_{cl}^+	ρ_{cl}^-
$\alpha_{em} > 0,$ $0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon < \min(\alpha_{em}/\alpha, \alpha/\alpha_{em})$	$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\nexists	\nexists
	$\varepsilon > \alpha/\alpha_{em}$	$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$	\nexists	\nexists
$\varepsilon > \alpha_{em}/\alpha$	без условий	\nexists	\nexists	
$\alpha_{em} > 0,$ $\varepsilon = 0$		$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2 - \alpha^2$	\exists	
		$\alpha_Q^2 > \alpha_{em}^2 > \alpha_Q^2 - \alpha^2$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2 - \alpha^2$	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} > 0,$ $-1 < \varepsilon < 0$		$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} < 0,$ $0 < \varepsilon < 1$		без условий	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} < 0,$ $-1 < \varepsilon < 0$	$ \varepsilon < \alpha_{em} /\alpha$	без условий	\nexists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
	$ \varepsilon > \alpha_{em} /\alpha$	$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\nexists	\nexists

Тогда

$$\frac{\psi_F(\rho)}{d\psi_F(\rho)/d\rho} = \text{tg } \Phi(\rho) \tag{69}$$

и уравнение (30) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \tag{70}$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = (1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)) \sin \Phi \cos \Phi. \tag{71}$$

Отметим, что уравнение (71) должно решаться после определения собственных значений ε_n и собственных функций $\Phi_n(\rho)$ из уравнения (70).

4.1. Асимптотика функций $\Phi(\rho)$, $P(\rho)$

4.1.1. Для связанных состояний при $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (43), (69) получаем

$$\begin{aligned} \text{tg } \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \\ \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\text{arctg } \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \tag{72}$$

Для экспоненциально растущих решений в асимптотике (21) $C_2 \neq 0$ и с учетом (42), (69) имеем

$$\begin{aligned} \text{tg } \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \\ \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= \text{arctg } \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \tag{73}$$

В формулах (72), (73) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.1.2. При наличии двух горизонтов событий рассмотрим сначала случай $\rho \rightarrow \rho_+$.

Пусть

$$\Phi|_{\rho \rightarrow \rho_+} = k\pi + A|\rho - \rho_+|. \tag{74}$$

Тогда $\sin \Phi|_{\rho \rightarrow \rho_+} \simeq \pm A|\rho - \rho_+|$, $\cos \Phi|_{\rho \rightarrow \rho_+} \simeq \pm 1$. Из совместности (74) с уравнением (70) с учетом ведущей особенности (см. (36))

$$U_{eff}^F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_+)^2}$$

получаем

$$1 + \frac{3}{16} A^2 = A \tag{75}$$

с решениями $A_1 = 4, A_2 = 4/3$. Далее интегрируем уравнение (71) при $\rho \rightarrow \rho_+$ с учетом ведущей особенности эффективного потенциала (36). В результате имеем

$$P|_{\rho \rightarrow \rho_+} = C_6 \begin{cases} |\rho - \rho_+|^{-3/4}, & A_1 = 4, \\ |\rho - \rho_+|^{-1/4}, & A_2 = 4/3, \end{cases} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} &= \\ &= C_6 \begin{cases} 4|\rho - \rho_+|^{1/4}, & A_1 = 4, \\ \frac{4}{3}|\rho - \rho_+|^{3/4}, & A_2 = 4/3. \end{cases} \end{aligned} \quad (77)$$

Сравнение с (47) показывает, что для нашего рассмотрения приемлемыми являются решения (74), (76), (77) с решением уравнения (75) $A_1 = 4$ и $C_3 = 4C_6$.

Аналогичное рассмотрение при $\rho \rightarrow \rho_-$ приводит к следующим физически приемлемым асимптотикам для $\Phi(\rho)$ и $P(\rho)$:

$$\Phi|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -4|\rho_- - \rho| + k\pi, \quad (78)$$

$$P|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -\frac{C_4}{4}|\rho_- - \rho|^{-3/4}, \quad (79)$$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = C_4|\rho_- - \rho|^{1/4}. \quad (80)$$

4.1.3. Рассмотрим асимптотики $\Phi(\rho), P(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$.

Пусть

$$\Phi|_{\rho \rightarrow 0} = k\pi + B\rho. \quad (81)$$

Тогда из уравнения (70) с учетом ведущей особенности (41)

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8} \frac{1}{\rho^2}$$

получаем уравнение

$$1 - \frac{3}{4}B^2 = B \quad (82)$$

с решениями $B_1 = 2/3, B_2 = -2$.

После интегрирования (71) при $\rho \rightarrow 0$ с учетом ведущей особенности (41) получаем

$$P|_{\rho \rightarrow 0} = C_7 \begin{cases} \rho^{1/2}, & B_1 = 2/3, \\ \rho^{-3/2}, & B_2 = -2, \end{cases} \quad (83)$$

$$\psi_F|_{\rho \rightarrow 0} = C_7 \begin{cases} \frac{2}{3}\rho^{3/2}, & B_1 = 2/3, \\ -2\rho^{-1/2}, & B_2 = -2. \end{cases} \quad (84)$$

Сравнение с (51) показывает, что физически приемлемыми являются решения (81), (83), (84) с решением уравнения (82) $B_1 = 2/3$ и с $C_5 = (2/3)C_7$.

5. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе применен следующий численный способ решения уравнения (70).

Для разрешенного набора значений $-1 < \varepsilon < 1$ численно решается задача Коши с заданным начальным условием. Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге – Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо ПА [22]).

Определив решением (70) спектр ε_n и собственные функции $\Phi_n(\rho)$ и интегрируя уравнение (71), можно определить функции $P_n(\rho)$ и, с учетом (68), волновые функции $(\psi_F)_n(\rho)$. Далее можно определить плотность вероятности обнаружения фермионов в состоянии с ε_n на расстоянии ρ в сферическом слое $d\rho$,

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho), \quad (85)$$

и вероятность обнаружения связанных фермионов в интервале $[\rho_0, \rho]$,

$$W(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} P_n^2(\rho') \sin^2 \Phi_n(\rho') d\rho'. \quad (86)$$

При наличии двух горизонтов событий энергия связанных состояний определяется равенствами $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$. В этом случае численно определяются только собственные функции $(\psi_F)_n(\rho)$ (68), плотности вероятности (85) и интегральные вероятности (86).

Волновые функции $(\psi_F)_n(\rho)$ должны удовлетворять асимптотикам (43), (77) с $A_1 = 4$, (80) с $A_1 = -4$, (84) с $B_1 = 2/3$.

При решении уравнения (70) необходимо иметь в виду существование трех иррегулярных особых точек: $\rho = 0, \rho = \rho_+, \rho = \rho_-$. Численные расчеты с хорошей сходимостью результатов начинались или заканчивались в δ -окрестностях иррегулярных особых точек $\rho = 0, \rho = \rho_+, \rho = \rho_-$ с $\delta = 10^{-8}$. Выбор максимального значения ρ_{max} в расчетах с имитацией $\rho \rightarrow \infty$ определялся выполнением условий (72), (73) с заданной точностью 10^{-7} .

Ниже для случая голой сингулярности RN при определении спектра ε_n будем использовать функцию $\Phi(\varepsilon, \rho_{max}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{max}}$. Здесь ρ_{max} — максимальное расстояние в численных расчетах. Как правило, хорошую сходимость результатов обеспечивало значение $\rho_{max} = 10^7$.

Численные расчеты показали наличие следующих важных свойств функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{min})$ (подобные свойства функции Φ для более простых потенциалов, не зависящих от ε , строго доказаны в работах [8–10]).

1. Функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ монотонна по ε .

2. В случае существования связанных состояний с $-1 < \varepsilon < 1$ поведение $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ носит скачкообразный характер. При достижении собственного значения ε_n функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ изменяется скачком на π :

$$[\Phi(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon, \rho_{max}) - \Phi(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon, \rho_{max})] |_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} = \pm n\pi. \quad (87)$$

3. В случае отсутствия связанных состояний изменение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ во всем интервале $-1 < \varepsilon < 1$ меньше π .

5.1. Наличие двух горизонтов событий $\rho_+, \rho_-; \alpha^2 > \alpha_Q^2$. Область определения волновых функций $\rho \in [\rho_+, \infty)$

В этом случае существует вырожденное по m_φ решение (36): $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$. Для связанных состояний $-1 < \varepsilon < 1$, поэтому $-\rho_+ < \alpha_{em} < \rho_+$. Решение $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ включает состояния с одноименными и разноименными зарядами источника поля RN и фермиона. Случай $\varepsilon = 0, \alpha_{em} = 0$ соответствует незаряженной частице со спином 1/2.

При определении волновых функций с известным собственным значением $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ интегрирование уравнения (70) осуществлялось «справа налево» (от $\rho = \rho_{max}$ с граничным условием (72) до $\rho = \rho_+$ с асимптотикой (74) и с решением уравнения (75) $A_1 = 4$).

На рис. 2 представлено семейство интегральных кривых уравнения (70) вблизи горизонта событий ρ_+ , являющегося иррегулярной особой точкой этого уравнения. Показаны сепаратрисы (красные кривые), соответствующие асимптотикам (74)–(77) с $A_1 = 4$ и $A_2 = 4/3$. Две сепаратрисы начинаются в точке $(\rho_+, 0)$. В расчетах при интегрировании (70) «справа налево» в окрестности горизонта событий ρ_+ осуществляется выбор «физической» сепаратрисы с $A_1 = 4$. Картина интегральных кривых уравнения (70) является периодической по Φ с периодом π .

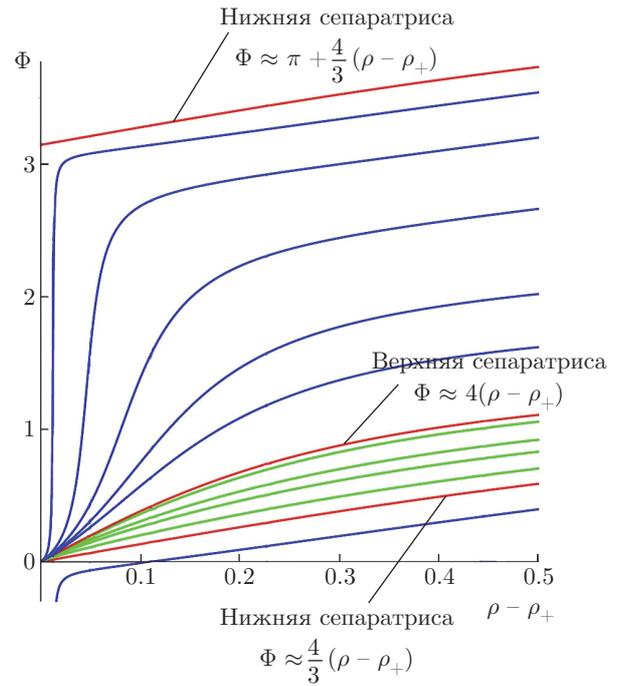


Рис. 2. (В цвете онлайн) Интегральные кривые $\Phi(\rho - \rho_+)$ в окрестности ρ_+

5.1.1. Определение границ физической приемлемости решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ и результаты расчетов

Решение $\varepsilon = 0$ при $\alpha_{em} = 0$ формально справедливо для любого значения гравитационной константы связи α . Однако, как и в случае поля Шварцшильда [1], для достижения столь сильной связи $\varepsilon_b = 1$ необходимы значения $\alpha \geq \alpha_{min}$. Например, энергия связанного электрона $\varepsilon_e = 0$ в кулоновском поле ядра с числом протонов Z в состоянии $1S_{1/2}$ достигается при значении электромагнитной константы связи $\alpha_{fs}Z \simeq Z/137 \approx 1.06$ ($Z = 140$). Для состояний $2S_{1/2}$ и $3S_{1/2}$ аналогичные значения $\alpha_{fs}Z \simeq 1.42$ и 1.9 [23].

В работе [1] для поля Шварцшильда определено

$$\alpha_{min} \sim 0.25. \quad (88)$$

Здесь и ниже значком « \sim » будем отражать, что $\alpha_{min} \approx 0.25$, но всегда $\alpha_{min} > 0.25$.

При $\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0$ поле RN переходит в поле Шварцшильда. Максимальное значение $|\alpha_Q|^{max} = \alpha$ при наличии горизонтов событий соответствует экстремальному полю RN. Поскольку для экстремального поля RN стационарных связанных состояний фермионов не существует, в наших обозначениях

Таблица 2. Значения ρ_m для $\varepsilon = 0$, $\alpha_{min} = 0.251$, $\alpha_Q/\alpha_{min} = 0, 0.5, 0.9$ в зависимости от $\kappa(j, l)$

		α_Q/α_{min}	0	0.5	0.9
ρ_m	$\kappa = -1 (j = 1/2, l = 0)$		0.043	0.04	0.023
	$\kappa = +1 (j = 1/2, l = 1)$		0.023	0.021	0.012
ρ_+			0.502	0.4684	0.3604

$$\alpha_{min} \sim |\alpha_Q|^{max}. \tag{89}$$

Для связанных состояний $-1 < \varepsilon < 1$ и для решений $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$ должно выполняться соотношение

$$\rho_{\pm} \sim \alpha_{em}. \tag{90}$$

В табл. 2 для решения $\varepsilon = 0$, $\alpha_{min} = 0.251$, $\alpha_Q/\alpha_{min} = 0, 0.5, 0.9$ и для различных значений j, l приведены определенные из расчетов расстояния ρ_m от максимумов плотностей вероятности до горизонта событий ρ_+ . На рис. 3 для $\kappa = -1 (j = 1/2, l = 0)$ приведены нормированные плотности вероятности (85) и интегральные вероятности (86). В табл. 3 для $\alpha_{min} = 0.251$ приведены значения ρ_m в зависимости от изменения α_{em} .

Расчеты показывают, что в отличие от электронной структуры атомов Периодической системы степень локализации частиц вблизи горизонта событий ρ_+ увеличивается по мере увеличения j, l . Данные табл. 2, 3 и рис. 3 показывают, что локализация частиц вблизи ρ_+ увеличивается при возрастании $|\alpha_Q|$. Для состояний $j = l + 1/2 (\kappa < 0)$ максимальные значения ρ_m при $\alpha_{em} > 0$ достигаются при значении $\rho_+ \sim \alpha_{em}^{max}$. Для разноименных зарядов источника поля RN и фермиона ($\alpha_{em} < 0$) минимальные значения ρ_m достигаются при минимально допустимом значении $\alpha_{em}^{min} \sim -\rho_+$. Наоборот, для состояний $j = l - 1/2 (\kappa > 0)$ максимальные значения ρ_m достигаются при $\alpha_{em}^{max} \sim -\rho_+$, а минимальные — при $\alpha_{em}^{max} \sim \rho_+$.

Реализация решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ возможна лишь при определенных соотношениях между массами и зарядами источника поля RN и фермиона.

1. Мы принимаем, что $M \geq M_p$.

2. Для существования горизонтов событий $\alpha_Q = k\alpha$, где $0 < k < 1$.

3. Для простоты мы рассматриваем соотношение масс $m/M \leq 10^{-2}$. В этом случае движение фермиона можно описывать относительно покоящегося источника поля RN. Для больших масс фермионов нужно учитывать движение источника поля

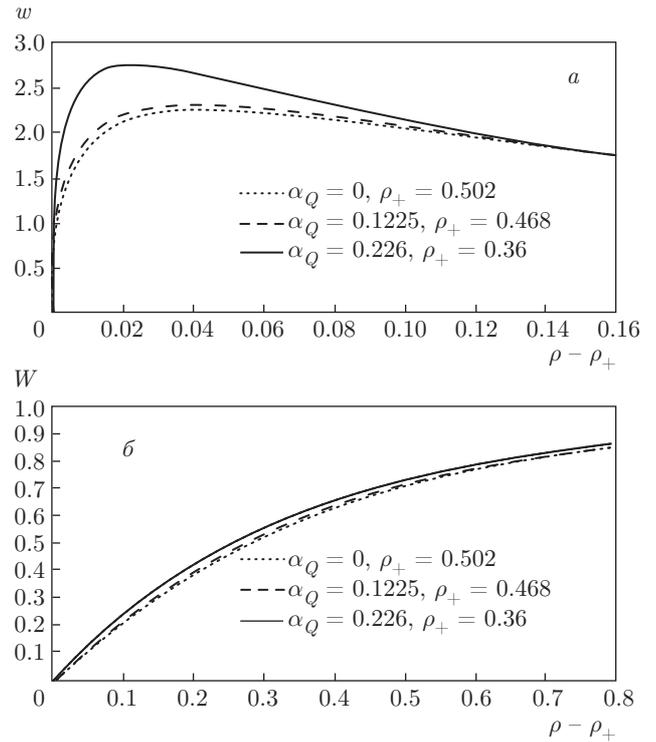


Рис. 3. Зависимости $w(\rho - \rho_+)$ (а), $W(\rho - \rho_+)$ (б) для связанных состояний с $\varepsilon = 0$, $\alpha_{min} = 0.251$, $\kappa = -1 (j = 1/2, l = 0)$ для значений $\alpha_Q/\alpha_{min} = 0, 0.5, 0.9$

RN, что в искривленном пространстве-времени является непростой и громоздкой задачей (см., например, [24]).

4. Существование предельного значения $\rho_+ \sim |\alpha_{em}|^{max}$ приводит к дополнительным ограничениям для отношений m/M и q/e . Из равенств (16) получаем

$$\alpha = \frac{m}{M_p} \frac{M}{M_p} = \frac{m}{M} \frac{M^2}{M_p^2},$$

$$\frac{m}{M_p} = \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{\alpha} = \frac{\alpha_Q}{\alpha_{em}} \sqrt{\alpha_{fs}} \frac{q}{e}.$$

Предельное значение

$$\rho_+ = \alpha \left(1 + \sqrt{1 - k^2} \right) \sim |\alpha_{em}|^{max}.$$

Здесь $k = \alpha_Q/\alpha$ и $0 < k < 1$. Тогда

$$\left(\frac{m}{M} \right)_{lim} = \frac{k^2 \alpha_{fs} (q/e)^2}{(1 + \sqrt{1 - k^2})^2} \frac{1}{\alpha}.$$

5.2. Наличие двух горизонтов событий ρ_+, ρ_- ; $\alpha^2 > \alpha_Q^2$. Область определения волновых функций $\rho \in (0, \rho_-]$

В этом случае существует вырожденное по m_φ решение $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$. Для связанных состояний

Таблица 3. Значения ρ_m для $\alpha_{min} = 0.251$, $\alpha_Q/\alpha_{min} = 0.5$, $\rho_+ = 0.4684$ в зависимости от α_{em} и от $\kappa(j, l)$

κ (j, l)	-1 (1/2, 0)					+1 (1/2, 1)				
	α_{em}	+0.4679	+0.2342	0	-0.2342	-0.4679	+0.4679	+0.2342	0	-0.2342
ε	+0.999	+0.5	0	-0.5	-0.999	+0.999	+0.5	0	-0.5	-0.999
ρ_m	0.059	0.045	0.04	0.033	0.02	0.016	0.018	0.021	0.026	0.037
κ (j, l)	-2 (3/2, 1)					+2 (3/2, 2)				
	α_{em}	+0.4679	+0.2342	0	-0.2342	-0.4679	+0.4679	+0.2342	0	-0.2342
ε	+0.999	+0.5	0	-0.5	-0.999	+0.999	+0.5	0	-0.5	-0.999
ρ_m	0.0097	0.0089	0.008	0.0069	0.0057	0.0052	0.0057	0.0063	0.0072	0.0084

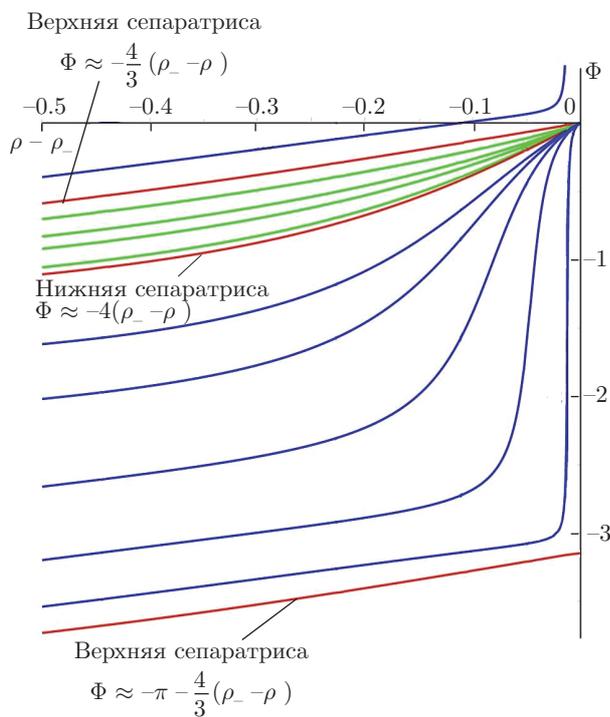


Рис. 4. (В цвете онлайн) Интегральные кривые $\Phi(\rho - \rho_-)$ в окрестности ρ_-

$-1 < \varepsilon < 1$, поэтому $-\rho_- < \alpha_{em} < \rho_-$. Решение $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ включает состояния с одноименными и разноименными зарядами источника поля RN и фермиона. Случай $\varepsilon = 0$, $\alpha_{em} = 0$ соответствует незаряженной дираковской частице.

На рис. 4 приведены интегральные кривые уравнения (70) в окрестности иррегулярной особой точки $\rho = \rho_-$. Видны сепаратрисы (красные кривые), соответствующие асимптотикам (78)–(80) с $A_1 =$

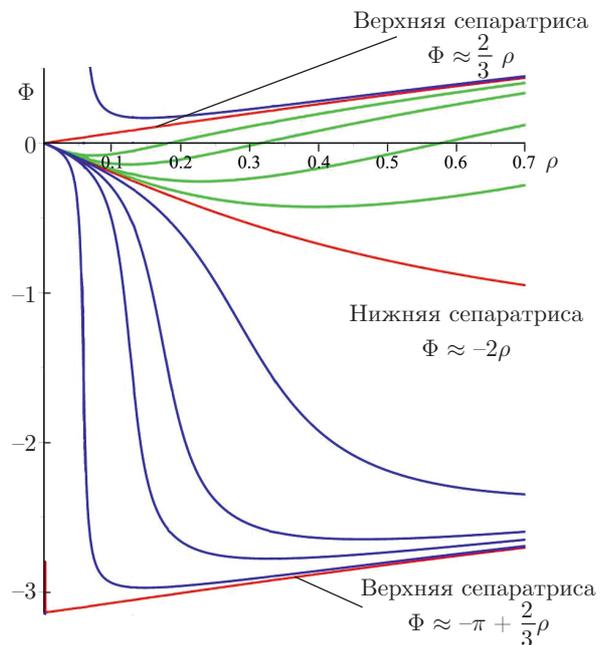


Рис. 5. (В цвете онлайн) Интегральные кривые $\Phi(\rho)$ в окрестности $\rho = 0$

$= -4$ и $A_2 = -4/3$. Одна из сепаратрис, начинающихся в $(\rho_-, 0)$, соответствует физически приемлемой асимптотике с $A_1 = -4$. Интегральные кривые $\Phi(\rho - \rho_-)$ периодичны по Φ с периодом π .

На рис. 5 приведены интегральные кривые уравнения (70) в окрестности иррегулярной особой точки $\rho = 0$. Видны сепаратрисы (красные кривые), одна из которых соответствует физически приемлемым асимптотикам (81)–(84) с решением уравнения (82) $B_1 = 2/3$. Интегральные кривые $\Phi(\rho)$ периодичны по Φ с периодом π .

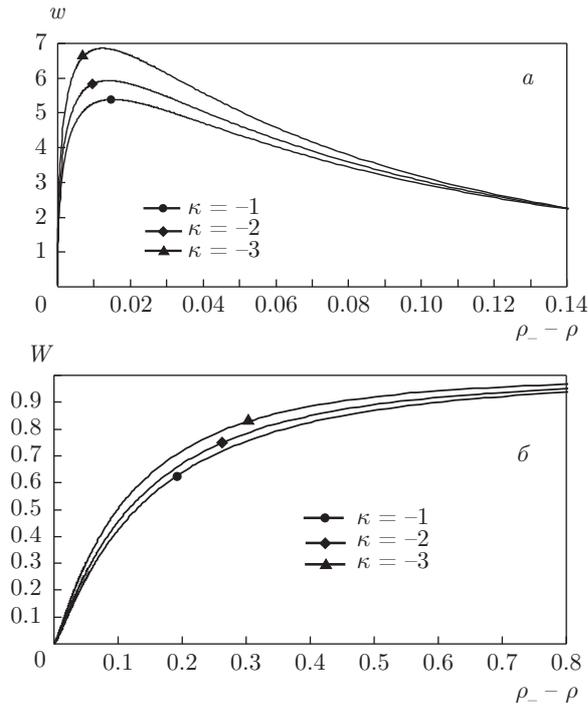


Рис. 6. Зависимости $w(\rho_+ - \rho)$ (а), $W(\rho_+ - \rho)$ (б) для связанных состояний с $\varepsilon = 0$, $\alpha = 10$, $\alpha_Q = 0.909$, $\rho_- = 5.832$, $\kappa = -1, -2, -3$. Зависимость $W(\rho)$ вычислялась при интегрировании «справа налево» от $\rho_+ - \rho_{max} = 10^{-8}$

При интегрировании (70) «слева направо» (от $\rho = 10^{-8}$ до $\rho_+ - \rho = 10^{-8}$) в расчетах осуществляется правильный выбор асимптотик $\Phi(\rho)$, $P(\rho)$, $\psi_F(\rho)$ как в окрестности $\rho = 0$, так и в окрестности $\rho = \rho_-$.

5.2.1. Границы физической приемлемости решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ и результаты расчетов

Решение $\varepsilon = 0$ при $\alpha_{em} = 0$ формально справедливо для любого значения гравитационной константы связи α . Мы ограничим себя рассмотрением менее экзотичных систем с горизонтом событий $\rho_- \geq 1$, т.е. с радиусами внутреннего горизонта событий, большими или сравнимыми с комптоновской длиной волны фермиона l_c . Из неравенства $\rho_- = \alpha(1 - \sqrt{1 - k^2}) \geq 1$ возникают автоматические ограничения на величину α и отношение $k = \alpha_Q/\alpha$ ($0 < k < 1$).

В табл. 4 для решения $\varepsilon = 0$, для $\kappa = 0.909$, $\alpha = 10$, $\rho_- = 5.832$ и различных j, l приведены определенные из расчетов расстояния ρ_m от максимумов плотностей вероятности до горизонта событий ρ_- . На рис. 6 для некоторых значений j, l и с параметра-

ми из табл. 4 приведены нормированные плотности вероятности (85) и интегральные вероятности (86).

Диапазон значений электромагнитной константы связи α_{em} для решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ определяется диапазоном энергии фермиона для связанных состояний $-1 < \varepsilon < 1$. Максимальное значение $|\alpha_{em}|^{max}$ равно $\rho_- \sim |\alpha_{em}|^{max}$. В табл. 5 для $\alpha = 10$, $\alpha_Q = 9.09$ и различных значений j, l приведены значения ρ_m в зависимости от изменения допустимых значений α_{em} .

Расчеты показывают, что связанные фермионы с подавляющей вероятностью находятся вблизи внутренней окрестности горизонта событий ρ_- . Степень локализации фермионов увеличивается с увеличением j, l .

Данные табл. 5 показывают, что для состояний $j = l + 1/2$ ($\kappa < 0$) максимальные значения ρ_m при $\alpha_{em} > 0$ достигаются при $\rho_- \sim \alpha_{em}^{max}$. Для разноименных зарядов источника поля RN и фермиона ($\alpha_{em} < 0$) минимальные значения достигаются при минимально допустимом значении $\alpha_{em}^{min} \sim -\rho_-$. Наоборот, для состояний $j = l - 1/2$ ($\kappa > 0$) максимальные значения ρ_m достигаются при $\alpha_{em}^{min} \sim -\rho_-$, а минимальные при $\rho_- \sim \alpha_{em}^{max}$.

Как и в разд. 5.1, реализация решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ возможна лишь при определенных соотношениях между массами и зарядами источника поля RN и фермиона. По-прежнему принимаем, что $M \geq M_p$, $\alpha_Q = k\alpha$, где $0 < k < 1$, $m/M \leq 10^{-2}$,

$$\left(\frac{m}{M}\right)_{lim} = \frac{k^2 \alpha_{fs}(q/e)^2}{(1 - \sqrt{1 - k^2})^2} \frac{1}{\alpha}.$$

Мы используем также предельное значение $\rho_- = 1$.

5.3. Экстремальное поле

Райсснера – Нордстрёма ($\rho_+ = \rho_- = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha_Q^2$). Область определения волновых функций $\rho \in (0, \alpha]$, $\rho \in [\alpha, \infty)$

В разд. 3.1 мы показали невозможность существования стационарных связанных состояний фермионов с $|\varepsilon| < 1$ как вне, так и внутри единственного горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$. При $\varepsilon = \alpha_{em}/\alpha$ непроницаемый барьер ρ_{cl} находится на горизонте событий (см. равенство (57)).

Для иллюстрации на рис. 7 приведен характерный вид потенциала $U_{eff}^F(\rho)$ для экстремального поля RN. Как отмечено в [5], в области под горизонтом событий $\rho \in (0, \alpha]$ для одноименных зарядов фермиона и источника поля RN возможно существование связанного состояния фермиона с $\varepsilon = \alpha_{em}/\alpha > 1$.

Таблица 4. Значения ρ_m для $\varepsilon = 0$, $\kappa = 0.909$, $\alpha = 10$, $\rho_- = 5.832$ в зависимости от κ (или j, l)

κ	-1	+1	-2	+2	-3	+3
(j, l)	$(j = 1/2, l = 0)$	$(j = 1/2, l = 1)$	$(j = 3/2, l = 1)$	$(j = 3/2, l = 2)$	$(j = 5/2, l = 2)$	$(j = 5/2, l = 3)$
ρ_m	0.0152	0.0151	0.014	0.0138	0.0123	0.0121

Таблица 5. Значения ρ_m для $\alpha = 10$, $\alpha_Q = 9.09$, $\rho_- = 5.832$ и различных κ в зависимости от допустимых значений α_{em}

κ	-1					+1				
α_{em}	5.832	2.916	0	-2.916	-5.832	5.832	2.916	0	-2.916	-5.832
ε	+1	+0.5	0	-0.5	-1	+1	+0.5	0	-0.5	-1
ρ_m	0.0155	0.0154	0.0152	0.01514	0.0151	0.0149	0.015	0.0151	0.0152	0.0154
κ	-2					+2				
α_{em}	5.832	2.916	0	-2.916	-5.832	5.832	2.916	0	-2.916	-5.832
ε	+1	+0.5	0	-0.5	-1	+1	+0.5	0	-0.5	-1
ρ_m	0.0145	0.0142	0.014	0.0139	0.0137	0.0135	0.0137	0.0138	0.014	0.0142
κ	-3					+3				
α_{em}	5.832	2.916	0	-2.916	-5.832	5.832	2.916	0	-2.916	-5.832
ε	+1	+0.5	0	-0.5	-1	+1	+0.5	0	-0.5	-1
ρ_m	0.0129	0.0126	0.0123	0.0121	0.012	0.0117	0.0119	0.0121	0.0124	0.0126

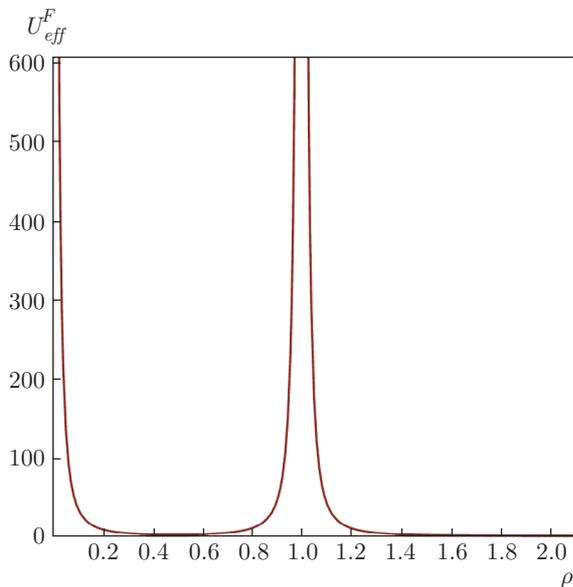


Рис. 7. Зависимость $U_{eff}^F(\rho)$ в экстремальном поле RN при $\alpha = 1$, $\alpha_Q = 1$, $\alpha_{em} = 0.9$, $\kappa = -1$, $\varepsilon = 0.9$, $\rho_+ = \rho_- = 1$

При этом значение ε должно быть больше минимального значения потенциала $U_{eff}^F(\rho)$ в рассматриваемой области.

5.4. Голая сингулярность Райсснера – Нордстрёма ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$). Область определения волновых функций $\rho \in (0, \infty)$

В отличие от случаев, рассмотренных в разд. 5.1, 5.2, для заряженных фермионов (см. разд. 3.2) в поле голой сингулярности RN при определенных значениях физических параметров существует невырожденный по n, j, l дискретный энергетический спектр. Дискретный спектр также существует в случае незаряженных фермионов.

Для иллюстрации в численных расчетах рассматривались два варианта атомных систем.

Первый вариант:

$$\alpha = 0.025, \quad \frac{|\alpha_Q|}{\alpha} = 2, \tag{91}$$

$$\alpha_{em} = -0.1 \quad \text{либо} \quad \alpha_{em} = 0.$$

Источником поля RN является частица с $M = 0.585M_p$ и зарядом $+13.7e$; в качестве фермиона выбрана частица с $m = 0.043M_p$ и зарядом $-e$ либо незаряженная частица с $m = 0.043M_p$.

Второй вариант:

$$\alpha = 0.25, \quad \frac{|\alpha_Q|}{\alpha} = 2, \quad (92)$$

$$\alpha_{em} = -1 \quad \text{либо} \quad \alpha_{em} = 0.$$

Источником поля RN является частица с $M = 5.85M_p$ и зарядом $+137e$; в качестве фермиона выбрана частица с $m = 0.043M_p$ и зарядом $-e$ либо незаряженная частица с $m = 0.043M_p$.

Для иллюстрации существования стационарных связанных состояний одноименно заряженных с источником поля голой сингулярности RN фермионов при $\varepsilon > \alpha_{em}/\alpha$ (см. разд. 3.2, табл. 1) проведены расчеты второго варианта с $\alpha_{em} = 0.1$.

В численных расчетах интегрирование уравнения (70) проводилось «слева направо» (от ρ_{min} до ρ_{max}). Хорошая математическая сходимость результатов обеспечивается при выборе $\rho_{min} = 10^{-8}$, $\rho_{max} = 10^7$. Как и в разд. 5.2, в расчетах в окрестности $\rho = 0$ обеспечиваются физически приемлемые асимптотики (81)–(84) с решением уравнения (82) $B_1 = 2/3$.

Уровни энергии в расчетах определялись в точках, где функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho \rightarrow \rho_{max}}$ изменяется скачками на π в соответствии с (87).

В табл. 6–8 для указанных вариантов значений α , $|\alpha_Q|$, α_{em} приведены расчетные значения дискретного спектра $1 - \varepsilon_n$ в зависимости от некоторых значений квантовых чисел n, j, l .

Расчетные величины $1 - \varepsilon_n$ определены с точностью до первого знака после запятой. Численные величины во вторых знаках после запятой могут изменяться после проведения специальных расчетов на сходимость математических результатов. В данной работе дискретные спектры приведены для качественных оценок без проведения прецизионных расчетов.

Для иллюстрации на рис. 8 для второго варианта с $\kappa = -1$ представлена зависимость $\Phi(1 - \varepsilon, \rho_{max})$.

На рис. 9, 10 приведены нормированные плотности вероятности для собственных функций состояний $1S_{1/2}$ ($n = 1, \kappa = -1, l = 0, j = 1/2$) и $2P_{1/2}$ ($n = 2, \kappa = 1, l = 1, j = 1/2$). Зависимости $w(\rho)$ получены для двух вариантов атомных систем, рассмотренных выше. Для всех вариантов рассматривались как заряженные, так и незаряженные дираковские частицы. Волновые функции и плотности вероятности для собственных значений ε_n определялись ин-

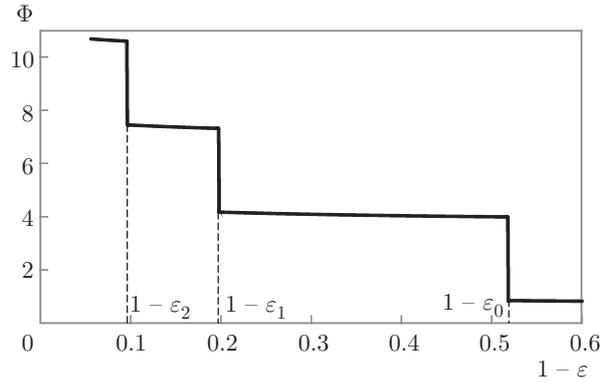


Рис. 8. Зависимость $\Phi(1 - \varepsilon, \rho_{max})$ в расчете с $\alpha = 0.25$, $\alpha_Q = 0.5$, $\alpha_{em} = -1$, $\kappa = -1$, $\rho_{max} = 10^7$. Величины $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответствуют энергиям связанных состояний $1S_{1/2}, 2S_{1/2}, 3S_{1/2}$. Для всех остальных энергий в соответствии с (73) $\Phi(1 - \varepsilon, \rho_{max}) \sim \arctg \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + k\pi$

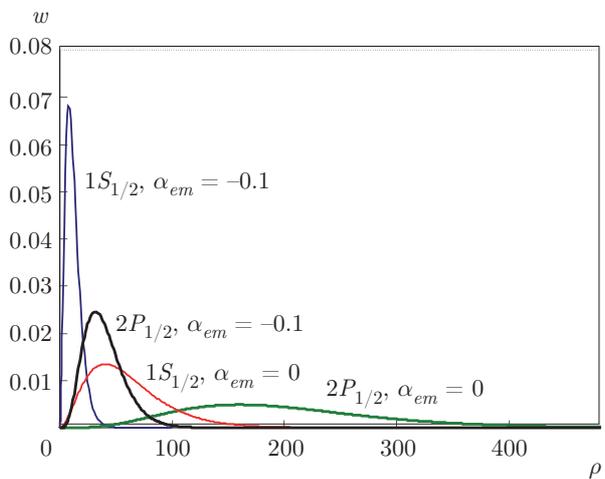


Рис. 9. Нормированная плотность вероятности для $1S_{1/2}$ -, $2P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при $\alpha = 0.025$, $\alpha_Q = 0.05$

тегрированием уравнений (70), (71) «справа налево» с использованием граничного условия (72). В этом случае из рис. 5 видно, что в численных расчетах в окрестности $\rho = 0$ невозможно достичь физически приемлемой сепаратрисы с асимптотикой (81), с решением уравнения (82) $B_1 = 2/3$. В приведенных расчетах асимптотики (81)–(84) с $B_1 = 2/3$ «сшивались» с соответствующими функциями из численных расчетов при $\rho = 10^{-2} \div 10^{-3}$. Такая процедура практически не отражается на зависимостях рис. 9, 10.

По результатам расчетов отметим существование стационарных связанных состояний незаряженных дираковских частиц, возникающих только за счет

Таблица 6. Численные значения $1 - \varepsilon_n$ при разноименных знаках зарядов Q, e для двух вариантов значений $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$

	$n = 1, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 2, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 3, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 2, \kappa = +1$ $j = 1/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = +1$ $j = 1/2, l = 1$
$\alpha = 0.025, \alpha_Q = 0.05,$ $\alpha_{em} = -0.1$	$7.85 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$8.74 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$8.73 \cdot 10^{-4}$
$\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5,$ $\alpha_{em} = -1$	$5.18 \cdot 10^{-1}$	$1.98 \cdot 10^{-1}$	$9.58 \cdot 10^{-2}$	$3.21 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$

	$n = 2, \kappa = -2$ $j = 3/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = -2$ $j = 3/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = +2$ $j = 3/2, l = 2$	$n = 3, \kappa = -3$ $j = 5/2, l = 2$
$\alpha = 0.025, \alpha_Q = 0.05, \alpha_{em} = -0.1$	$1.96 \cdot 10^{-3}$	$8.71 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$8.69 \cdot 10^{-4}$
$\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5, \alpha_{em} = -1$	$2.22 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$9.31 \cdot 10^{-2}$

Таблица 7. Численные значения $1 - \varepsilon_n$ для незаряженного фермиона для двух вариантов величин α, α_Q

	$n = 1, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 2, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 3, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 2, \kappa = +1$ $j = 1/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = +1$ $j = 1/2, l = 1$
$\alpha = 0.025, \alpha_Q = 0.05,$ $\alpha_{em} = 0$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	$7.81 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$	$7.82 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5,$ $\alpha_{em} = 0$	$2.31 \cdot 10^{-2}$	$6.95 \cdot 10^{-3}$	$3.24 \cdot 10^{-3}$	$7.84 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-3}$

	$n = 2, \kappa = -2$ $j = 3/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = -2$ $j = 3/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = +2$ $j = 3/2, l = 2$	$n = 3, \kappa = -3$ $j = 5/2, l = 2$
$\alpha = 0.025, \alpha_Q = 0.05, \alpha_{em} = 0$	$7.81 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5, \alpha_{em} = 0$	$7.53 \cdot 10^{-3}$	$3.43 \cdot 10^{-3}$	$3.46 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$

гравитационного взаимодействия. В целом при малых значениях $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ (первый вариант) дискретные спектры подобны спектрам водородоподобных атомов со слабо выраженной зависимостью энергии связи $1 - \varepsilon_n$ от орбитального и полного углового моментов частицы. Во втором варианте обеспечивается достаточно сильная связь дираковских частиц с полем голой сингулярности RN с устойчивым снятием вырождения уровней энергии с данным значением n и со значениями $\pm \kappa$.

В целом поведение плотностей вероятности носит такой же характер, как и при рассмотрении атомных систем в пространстве Минковского. Можно отметить, что для $1S_{1/2}$ -состояний борковский радиус $r_B = \hbar^2/m_e^2$ (в безразмерных единицах $\rho_B = (\alpha_{em})^{-1}$) близок к соответствующим максимумам плотности вероятности:

вариант 1: $\rho_B = 10, \rho_{w_{max}} = 7.7$, рис. 9;
вариант 2: $\rho_B = 1, \rho_{w_{max}} = 1.18$, рис. 10.

Во всех вариантах для незаряженных дираковских частиц (чисто гравитационное взаимодействие) максимумы плотности вероятности смещаются в сторону больших значений ρ .

Для $2P_{1/2}$ -состояний соответствующие максимумы плотностей вероятности по сравнению с $1S_{1/2}$ -состояниями расположены в области больших значений ρ .

6. КОСМИЧЕСКАЯ ЦЕНзуРА

Гипотеза космической цензуры, предложенная в работе [25], запрещает существование в природе сингулярностей, не прикрытых горизонтами событий, однако полное доказательство этой гипотезы отсут-

Таблица 8. Численные значения $1 - \varepsilon_n$ при одноименных знаках зарядов Q, e

	$n = 1, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 2, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 3, \kappa = -1$ $j = 1/2, l = 0$	$n = 2, \kappa = +1$ $j = 1/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = +1$ $j = 1/2, l = 1$
$\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5,$ $\alpha_{em} = 0.1$	$8.37 \cdot 10^{-3}$	$2.47 \cdot 10^{-3}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$2.74 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$
	$n = 2, \kappa = -2$ $j = 3/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = -2$ $j = 3/2, l = 1$	$n = 3, \kappa = +2$ $j = 3/2, l = 2$	$n = 3, \kappa = -3$ $j = 5/2, l = 2$	
$\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5, \alpha_{em} = 0.1$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$1.22 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$1.225 \cdot 10^{-3}$	

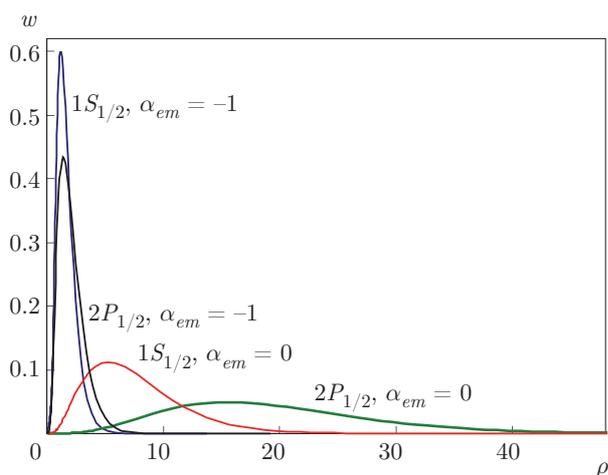


Рис. 10. Нормированная плотность вероятности для $1S_{1/2}$ -, $2P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при $\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5$

ствует до сих пор. Многие исследователи наряду с черными дырами рассматривают образование голых сингулярностей, их стабильность и отличительные особенности при экспериментальном наблюдении [26–31].

Для классических частиц хорошо известна геодезическая неполнота голой сингулярности RN. Массивные тестовые частицы, двигающиеся по геодезическим, не достигают сингулярности из-за отталкивательного характера внутренних областей метрики RN.

В работе [6] показано, что существуют статические метрики с времениподобными сингулярностями (среди них метрики Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма), которые проявляют себя полностью несингулярными при рассмотрении квантовой механики бесспиновых частиц. Авторами [6] отмечается, что решения Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма для бесспиновых частиц становятся сингулярны-

ми лишь при $M < 0$. В классическом случае для $M < 0$ оба решения являются геодезически полными. В настоящей работе мы получили подтверждение результатов [6] применительно к движению фермионов в поле голой сингулярности RN. Действительно, ведущая особенность эффективного потенциала U_{eff}^F в окрестности сингулярности представляет собой бесконечно большой потенциальный барьер (41)

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Поскольку голая сингулярность RN в квантовой механике прикрыта отталкивающим барьером (41), наличие этой сингулярности не несет угрозы космической цензуре.

7. ВЫРОЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЧАСТИЦЫ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

При наличии горизонтов событий ρ_+, ρ_- вырожденные стационарные связанные состояния фермионов в поле RN, определяемые решениями $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_{\pm}$, могут являться кандидатами на роль частиц темной материи.

Действительно, рассмотрим, например, решение $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$. Если при образовании коллапсара RN возникла атомная система со связанными фермионами, находящимися вблизи внутренней окрестности горизонта событий ρ_- , и если при этом заряд источника поля RN скомпенсирован суммарным зарядом связанных фермионов, то для внешнего мира такая атомная система взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными κ (или j, l) такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие.

Второй атомной системой может рассматриваться система связанных фермионов в поле RN с энергией $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$. В этом случае фермионы с подавляющей вероятностью находятся вблизи внешней окрестности ρ_+ и при компенсации заряда источника поля RN суммарным зарядом связанных фермионов такая атомная система взаимодействует с другими внешними объектами лишь гравитационным образом. Как и в первом случае, атомная система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. В данной атомной системе обнаружить заряд источника поля RN можно лишь, «выбив» часть фермионов со своих орбит внешним воздействием.

В качестве кандидатов в частицы темной материи возможны другие атомные системы с энергией связанных фермионов частично $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$, частично $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$.

Массы таких систем должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью.

Следует отметить, что рассмотрение атомных систем проведено в качестве нулевого приближения без учета взаимодействия связанных фермионов друг с другом и в рамках применимости одночастичной квантовой механики.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате рассмотрения стационарных решений самоспряженного уравнения второго порядка со спинорной волновой функцией в квантовой механике движения фермионов в классическом поле Райсснера – Нордстрёма получены следующие результаты.

1. При наличии двух горизонтов событий ρ_+ , ρ_- существуют регулярные решения с энергиями $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$. Эти решения представляют собой вырожденные стационарные связанные состояния заряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями и с областями определения $\rho \in [\rho_+, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_-]$. Волновые функции слабо зависят от j, l и обращаются в нуль на горизонтах событий. Фермионы в связанных состояниях с подавляющей вероятностью расположены вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонтов событий на доли комптоновской длины волны фермионов.

2. Для экстремального поля RN с единственным горизонтом событий $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ доказано отсут-

ствие стационарных связанных состояний фермионов с $|\varepsilon| < 1$.

3. Для поля голой сингулярности RN ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$) при определенных значениях физических параметров анализ эффективных потенциалов и прямые численные решения самоспряженного уравнения второго порядка показали существование стационарных связанных состояний заряженных фермионов поля RN. Связанные состояния существуют также для электрически незаряженных фермионов; эти состояния реализуются только за счет сил гравитационного взаимодействия.

4. Для любой квантовомеханической частицы со спином 1/2 независимо от наличия и знака электрического заряда голая сингулярность RN отделена бесконечно большим потенциальным барьером $\sim 3/8\rho^2$, что согласуется с выводами [6] применительно к движению бесспиновых частиц. Наличие отталкивающего барьера, прикрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре.

Для уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией в поле Райсснера – Нордстрёма регулярные стационарные решения отсутствуют по следующим причинам:

— при наличии горизонтов событий из-за квадратичной неинтегрируемости волновых функций (см. также [2]);

— для экстремального поля RN в области вне единственного горизонта событий из-за невыполнения одного из условий существования связанных состояний фермионов, доказанного в [3];

— для экстремального поля RN в области под горизонтом событий и для случая голой сингулярности RN из-за существования двух решений с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями в окрестности начала координат $\rho = 0$ [4].

Электрически нейтральные атомные системы с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях с $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$, могут рассматриваться в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи. Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом.

Таким образом, наше рассмотрение показывает, что использование уравнения второго порядка (30) расширяет возможности получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином 1/2 во внешних гравитационных полях.

Авторы благодарят М. В. Горбатенко, Е. Ю. Попова за плодотворные дискуссии и А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма

Введем в гамильтониане (9) безразмерные переменные и обозначение

$$H_\eta = H_1 + V(\rho), \tag{A.1}$$

где $V(\rho) = \alpha_{em}/\rho$. С учетом (10) и (A.1) уравнение (5) имеет вид

$$(\varepsilon - V(\rho) - H_1) \Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = 0. \tag{A.2}$$

Умножим слева уравнение (A.2) на оператор $\varepsilon - V(\rho) + H_1$. Тогда

$$(\varepsilon - V(\rho) + H_1)(\varepsilon - V(\rho) - H_1) \Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = 0, \tag{A.3}$$

$$\left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \times \right. \\ \times \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \frac{f_{R-N}}{\rho^2} \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ \left. + i \Sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + i \gamma^0 \gamma^3 f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} - \\ - i \gamma^0 \gamma^3 f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \right) + f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) \times \\ \left. \times \left[i \Sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - i \Sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \times \\ \times \Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = 0. \tag{A.4}$$

В выражении (A.4), как и ранее, проведена эквивалентная замена матриц (12),

$$\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.$$

Уравнения Дирака для верхних и нижних компонент биспинора

$$\Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} U(\rho, \theta, \varphi) \\ W(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} \tag{A.5}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon - V - \sqrt{f_{R-N}}) U = & \\ = \left(-i\sigma^3 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - \right. & \\ - i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - & \\ - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left. \right) W, & \\ (\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}) W = & \\ = \left(-i\sigma^3 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - \right. & \\ - i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - & \\ - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left. \right) U. & \end{aligned} \tag{A.6}$$

В результате с учетом (A.6) уравнение (A.4) можно записать для одного из спиноров $U(\rho, \theta, \varphi)$ или $W(\rho, \theta, \varphi)$. Для спинора $U(\rho, \theta, \varphi)$ уравнение (A.4) имеет вид

$$\left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 + \right. \\ + \frac{f_{R-N}}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left. \right] + f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) \times \\ \times \left[i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - i\sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \\ + \left(f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \right) - f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} \right) \times \\ \times \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \left[-f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2} - \right. \\ - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) + \\ \left. + i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left. \right\} U(\rho, \theta, \varphi) = 0. \tag{A.7}$$

Далее можно провести разделение переменных. Из представления (10) следует

$$U(r, \theta, \varphi) = F(\rho) \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi}. \tag{A.8}$$

Используя уравнение Брилла – Уилера (11) и его квадрированное представление [16]

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi} = -\kappa^2 \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi}, \quad (\text{A.9})$$

можно получить уравнение второго порядка для радиальной функции $F(\rho)$:

$$\left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 - \frac{f_{R-N} \kappa^2}{\rho^2} + f_{R-N} \kappa \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) - \left(f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \right) - f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} \right) \times \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \frac{\kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \left(f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \right) - f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} \right) \times \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \right\} \times F(\rho) = 0. \quad (\text{A.10})$$

В уравнении (A.10) третья и последнее слагаемые не являются самосопряженными. Для самосопряженности (A.10) проведем неунитарное преобразование подобия

$$F(\rho) = g_F^{-1}(\rho) \psi_F(\rho). \quad (\text{A.11})$$

Если обозначить в уравнении (15)

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (\text{A.13})$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (\text{A.14})$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \quad (\text{A.15})$$

и, кроме того, ввести обозначения

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D, \quad (\text{A.16})$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D, \quad (\text{A.17})$$

то искомое преобразование запишется как

$$g_F(\rho) = \exp \left(\frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho' \right). \quad (\text{A.18})$$

В результате, если мы запишем уравнение (A.10) в виде

$$\hat{M}F(\rho) = 0,$$

то преобразованное самосопряженное уравнение будет иметь вид

$$g_F \hat{M} g_F^{-1} \psi_F(\rho) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Уравнение (A.19) можно записать в виде уравнения второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом $U_{eff}^F(\rho)$:

$$\frac{d^2 \psi_F}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \psi_F = 0, \quad (\text{A.20})$$

где

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (\text{A.21})$$

$$U_{eff}^F = -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} (A - D) \frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC + E_{Schr}. \quad (\text{A.22})$$

В уравнении (A.20) выделено и одновременно добавлено в (A.22) слагаемое E_{Schr} (A.21). Это сделано, с одной стороны, для придания уравнению (A.20) вида уравнения типа Шредингера, а с другой стороны — для обеспечения классической асимптотики эффективного потенциала при $\rho \rightarrow \infty$.

Для нижнего спинора $W(\rho, \theta, \varphi)$ с радиальной функцией $G(\rho)$ соответствующие формулы имеют вид

$$G(\rho) = g_G^{-1} \psi_G(\rho), \quad (\text{A.23})$$

$$g_G(\rho) = \exp \left(\frac{1}{2} \int A_G(\rho') d\rho' \right), \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d^2 \psi_G}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G) \psi_G = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$U_{eff}^G = -\frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{A - D}{C} \frac{dC}{d\rho} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC + E_{Schr}. \quad (\text{A.26})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Эффективный потенциал поля
Райсснера – Нордстрёма в уравнении типа
Шредингера

В соответствии с формулами (A.12)–(A.15), (A.22) можно получить

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{f_{R-N}}{\omega + \sqrt{f_{R-N}}} \times \right. \\ \left. \times \left[-\frac{1}{f_{R-N}^2} f'_{R-N} \left(\omega + \sqrt{f_{R-N}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{f_{R-N}} \left(\omega' + \frac{f'_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} \right) \right] \right\}^2, \quad (B.1)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} = -\frac{1}{4} \frac{f_{R-N}}{\omega + \sqrt{f_{R-N}}} \times \\ \times \left[\frac{2}{f_{R-N}^3} (f'_{R-N})^2 \left(\omega + \sqrt{f_{R-N}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{f_{R-N}^2} f''_{R-N} \left(\omega + \sqrt{f_{R-N}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{f_{R-N}^2} f'_{R-N} \left(\omega' + \frac{f'_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{f_{R-N}} \left(\omega'' + \frac{f''_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} - \frac{(f'_{R-N})^2}{4f_{R-N}^{3/2}} \right) \right], \quad (B.2)$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{f'_{R-N}}{\rho f_{R-N}^{3/2}} + \frac{1}{\rho^2 f_{R-N}^{1/2}} \right], \quad (B.3)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{A - D}{B} \frac{dB}{d\rho} = \frac{\kappa}{2\rho f_{R-N}^{1/2}} \left(-\frac{f'_{R-N}}{f_{R-N}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega + \sqrt{f_{R-N}}} \left(\omega' + \frac{f'_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} \right) \right), \quad (B.4)$$

$$\frac{1}{8} (A - D)^2 = \frac{\kappa^2}{2f_{R-N}\rho^2}, \quad (B.5)$$

$$\frac{1}{2} BC = -\frac{1}{2f_{R-N}^2} (\omega^2 - f_{R-N}). \quad (B.6)$$

В (B.1)–(B.6)

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2};$$

$$f'_{R-N} \equiv \frac{df_{R-N}}{d\rho} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3};$$

$$f''_{R-N} \equiv \frac{df_{R-N}^2}{d\rho^2} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4};$$

$$\omega = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho}, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2},$$

$$\omega'' \equiv \frac{d^2\omega}{d\rho^2} = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

Сумма выражений E_{Schr} и (B.1)–(B.6) приводит к выражению для эффективного потенциала U_{eff}^F (A.22).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, ЖЭТФ **154**, 761 (2018).
2. F. Finster, J. Smoller, and S.-T. Yau, J. Math. Phys. **41**, 2173 (2000).
3. H. Schmid, Mathematische Nachrichten **274–275**, 117 (2004); arXiv:math-ph/0207039v2.
4. C. L. Pekeris and K. Frankowski, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83**, 1978 (1986).
5. М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов, Е. Ю. Попов, Grav. Cosmol. **23**, 245 (2017), DOI:10.1134/S0202289317030057; J. Phys.: Conf. Ser. **678**, 012037 (2016), DOI:10.1088/1742-6596/678/1/012037; arXiv:1511.05058 [gr-qc].
6. G. T. Horowitz and D. Marolf, Phys. Rev. D **52**, 5670 (1995).
7. H. Pruefer, Math. Ann. **95**, 499 (1926).
8. I. Ulehla and M. Havlíček, Appl. Math. **25**, 358 (1980).
9. I. Ulehla, M. Havlíček, and J. Hořejší, Phys. Lett. A **82**, 64 (1981).
10. I. Ulehla, Rutherford Laboratory preprint RL-82-095 (1982).
11. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, Phys. Rev. D **82**, 104056 (2010); arXiv:1007.4631 [gr-qc].
12. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, Phys. Rev. D **83**, 105002 (2011); arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
13. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, J. Mod. Phys. **6**, 303 (2015); arXiv:1107.0844 [gr-qc].
14. J. Schwinger, Phys. Rev. **130**, 800 (1963).

15. D. R. Brill and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 465 (1957).
16. S. R. Dolan, Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Lab., Dissertation (2006).
17. A. Lasenby, C. Doran, J. Pritchard, A. Caceres, and S. Dolan, *Phys. Rev. D* **72**, 105014 (2005).
18. S. Dolan and D. Dempsey, *Class. Quant. Grav.* **32**, 184001 (2015).
19. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950); В. П. Незнамов, *ЭЧАЯ* **37**(1), 152 (2006) [*Part. Nucl.* **37**(1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov and A. J. Silenko, *J. Math. Phys.* **50**, 122301 (2009).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (1963) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)].
21. J. Dittrich and P. Exner, *J. Math. Phys.* **26**, 2000 (1985).
22. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag (1991, 1996); Э. Хайпер, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*, Мир, Москва (1999).
23. W. Pieper and W. Griener, *Zs. Phys.* **218**, 327 (1969).
24. M.-T. Wang, arXiv:1605.04968.
25. R. Penrose, *Rivista del Nuovo Cimento, Serie I*, **1**, Numero Speciale: 252 (1969).
26. R. S. Virbhadra, D. Narasimba, and S. M. Chitre, *Astron. Astrophys.* **337**, 1 (1998).
27. K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **65**, 103004 (2002).
28. K. S. Virbhadra and C. R. Keeton, *Phys. Rev. D* **77**, 124014 (2008).
29. D. Dey, K. Bhattacharya, and N. Sarkar, *Phys. Rev. D* **88**, 083532 (2013).
30. P. S. Joshi, D. Malafaxina, and Maragan, *Class. Quant. Grav.* **31**, 015002 (2014).
31. A. Goel, R. Maity, P. Roy, and T. Sarkar, *Phys. Rev. D* **91**, 104029 (2015); arXiv:1504.01302 [gr-qc].