

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СРЕДА ИЗ ПРОВОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

*М. В. Давидович**

*Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 24 июля 2016 г.,
после переработки 21 февраля 2018 г.

Рассмотрена искусственная среда в виде кубического одноосного фотонного кристалла (ФК) с периодически расположенными в диэлектрической основе проводящими проволочными цилиндрами, ориентированными вдоль оси ФК. Диэлектрическая проницаемость (ДП) основы $\hat{\epsilon}$ считается постоянной, а ДП цилиндров описывается моделью Друде–Лоренца. Рассмотрены гомогенизация такой среды, методы ее описания, роль диссипации и пространственной дисперсии (ПД), а также возможность получения гиперболического закона дисперсии. Показаны неоднозначность описания ФК эффективными материальными параметрами и введение последних, а также влияние диссипации и ПД на исследуемое свойство гиперболичности.

DOI: 10.1134/S0044451018070015

1. ВВЕДЕНИЕ

Гиперболические метаматериалы (ГММ) — искусственные среды (ИС) с изочастотной поверхностью в виде гиперboloида вращения. Они обладают большими (без диссипации неограниченными) по модулю значениями компонент волновых векторов, существенно превышающих волновое число k_0 , и поэтому весьма перспективны для различных применений [1, 2]. ГММ теоретически достижимы и технологически изготавливаемы в отличие от изотропных левых метаматериалов со скалярными эффективными диэлектрической проницаемостью (ДП) $\epsilon^{ef} < 0$ и магнитной проницаемостью (МП) $\mu^{ef} < 0$. Предположение о возможности существования таких «левых» ИС привело к появлению большого количества работ. Несмотря на огромное число публикаций, изотропные левые ИС до сих пор не созданы не только в оптическом, но даже и в микроволновом диапазонах (см. [3–6]), хотя в большом числе имеющихся публикаций демонстрируется отрицательная рефракция. Правда, эта отрицательная рефракция получена в анизотропных электромагнитных или фотонных кристаллах (ФК), которые также часто называют левыми метаматериалами. От-

рицательная рефракция обычно ассоциируется с отрицательным показателем преломления [6–11], хотя в анизотропных ИС нельзя ввести один, тем более скалярный и отрицательный показатель преломления [6–8]. При этом отрицательная рефракция возможна в ФК для длин волн $\lambda \sim a$ и зависит от направления волнового вектора \mathbf{k} к поверхности изочастот [3–6]. Это также соответствует тому, что МП вообще можно не вводить, а описывать ФК тензором ДП $\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})$ с учетом пространственной дисперсии (ПД) [3–8, 11–14]. Обычно введение МП основано на решении уравнений прецессии магнитных моментов или вычислении наведенных токов под действием переменного магнитного поля волны. Для феррита в постоянном магнитном поле в малосигнальном приближении это приводит к известному тензору $\hat{\mu}$, действительные части компонент которого могут быть отрицательными. Однако в случае сплошной среды магнетика на его атомы действует не поле \mathbf{H} , а поле \mathbf{V} . Оно же генерирует кольцевые токи и в мета-атомах ФК, т.е. является внутренним полем. Поэтому получаемые результаты дают не тензор $\hat{\mu}$, а тензор $\hat{\mu}^{-1}$. В тонкой пленке с медленной МСВ поле практически в нее не проникает, существует около поверхности, и использовать тензор МП, определенный через поле \mathbf{H} , оправдано. Для получения отрицательной величины $\mu'^{ef} = \text{Re}(\mu^{ef})$ частота должна превысить резонансные частоты частиц или мета-атомов (раз-

* E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

мером d), включенных в кристаллическую решетку ФК с постоянной решетки a , который, в свою очередь, должен быть разреженным ($d \ll a$) и кубическим (далее штрих означает действительную часть величины, двойной штрих — отрицательную мнимую часть). Для изотропных ИС постоянная решетки a по крайней мере более чем на один или два порядка должна быть больше, чем размер мета-атома d , а длина волны в ФК примерно во столько же раз больше a (в оптике изотропных диэлектриков длина волны примерно в 10^4 раз больше размеров атомов и молекул). На низких частотах, где ε^{ef} и μ^{ef} имеют смысл, металлические структуры мета-атомов с кольцевыми токами имеют наведенный диамагнетизм, т.е. $0 < \mu'^{ef} < 1$. Наиболее хорошо этот результат демонстрируют формулы работ [15,16], дающие для ФК из металлических шариков радиуса r на низких частотах значение $\mu = 1 - 3\delta/(2 + \delta)$, где $\delta = 4\pi r^3/3a^3 \ll 1$. Приведенный в [14] вывод об отсутствии сколько-нибудь заметных магнитных свойств в оптическом диапазоне оспаривается во многих современных работах по искусственному магнетизму метаматериалов. Однако введение такого магнетизма есть прием описания (гомогенизации), и если его не вводить, то вполне можно описать ФК как только диэлектрическую ИС.

ГММ же являются анизотропными одноосными ФК, и условие indefinitной метрики $\varepsilon'^{ef}_\perp \varepsilon'^{ef}_\parallel < 0$ или $\mu'^{ef}_\perp \mu'^{ef}_\parallel < 0$ для них достаточно легко достигается (например, в слоистых ФК или в магнетонных кристаллах). Это обуславливает практическую значимость исследования ГММ. Им также посвящена весьма обширная литература (см., например, обзор работ в [1, 2]), в которой обычно диссипацию не рассматривают, и в результате вводится условие $\varepsilon'^{ef}_\perp \varepsilon'^{ef}_\parallel < 0$, определяющее гиперболическую дисперсию $k''^2_\parallel/\varepsilon'^{ef}_\perp + k''^2_\perp/\varepsilon'^{ef}_\parallel = k_0^2$ (уравнение Френеля для необыкновенной волны [14]) с неограниченными значениями компонент волновых векторов. Потери приводят к их ограниченности и к вырождению изочастотного гиперboloида вращения в замкнутую поверхность [17]. Под ГММ далее будем понимать одноосный ФК, в котором имеет место условие $\varepsilon'^{ef}_\perp \varepsilon'^{ef}_\parallel < 0$ для действительных частей диагональных компонент тензора эффективной ДП. Наиболее просто технологически это достигается в ИС с чередующимися проводящими и диэлектрическими слоями [17]. Для металлических ФК из бесконечных проволок (wire media) гиперболичность доказана в ряде работ (см., например, [18–21]).

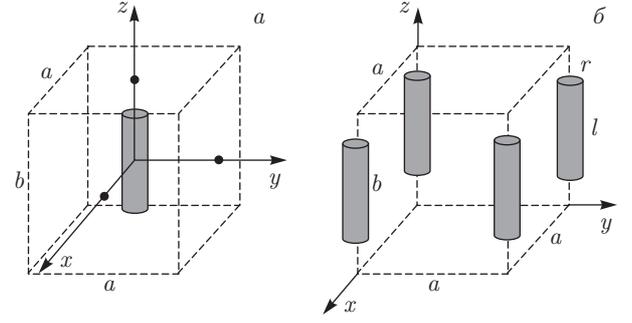


Рис. 1. Структура ГММ в виде одноосного ФК из металлических цилиндров радиуса r и длины l

Возможность получения условия $\varepsilon'^{ef}_\perp \varepsilon'^{ef}_\parallel < 0$, т.е. ГММ в виде ФК из нанопроволочек конечной длины, и является целью данной работы. При этом целью также является исследование влияния потерь и ПД на гиперболичность. Поскольку в такой структуре появляется дополнительный параметр — длина проволок l , необходима оценка, при каких соотношениях между размерами a, b, l (рис. 1) и длиной волны λ реализуется гиперболичность и как эти соотношения влияют на нее и на диссипацию. Для этого необходимо строгое электродинамическое решение задачи с представлением результатов в аналитической форме, что представлено ниже.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Записывая уравнение Френеля для комплексных поперечных и продольных волновых чисел $k_\perp = k'_\perp - ik''_\perp$, $k_\parallel = k'_\parallel - ik''_\parallel$ необыкновенной волны, комплексных эффективных ДП $\varepsilon_\perp = \varepsilon'_\perp - i\varepsilon''_\perp$, $\varepsilon_\parallel = \varepsilon'_\parallel - i\varepsilon''_\parallel$ и разделяя действительные и мнимые части, получаем

$$\frac{\varepsilon'_\parallel(k'^2_\perp - k''^2_\perp) + 2k'_\perp k''_\perp \varepsilon''_\parallel}{\varepsilon'^2_\parallel + \varepsilon''^2_\parallel} + \frac{\varepsilon'_\perp(k'^2_\parallel - k''^2_\parallel) + 2k'_\parallel k''_\parallel \varepsilon''_\perp}{\varepsilon'^2_\perp + \varepsilon''^2_\perp} = k_0^2, \quad (1)$$

$$\frac{\varepsilon''_\parallel(k'^2_\perp - k''^2_\perp) - 2\varepsilon'_\parallel k'_\perp k''_\perp}{\varepsilon'^2_\parallel + \varepsilon''^2_\parallel} + \frac{\varepsilon''_\perp(k'^2_\parallel - k''^2_\parallel) - 2\varepsilon'_\perp k'_\parallel k''_\parallel}{\varepsilon'^2_\perp + \varepsilon''^2_\perp} = 0. \quad (2)$$

Уравнение Френеля для ФК уже есть результат го-могенизации без конкретизации величин ε_\perp и ε_\parallel , по-

сколькx оно описывает для такой гомогенной среды движение плоской волны. Далее также будем рассматривать такие плоские волны типа $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ в бесконечном (т. е. полностью периодическом) ФК (рис. 1). ДП $\hat{\varepsilon}$ основы (или матрицы) для простоты считаем действительной константой, т. е. ее дисперсией и диссипацией пренебрегаем. ДП цилиндрического включения берем в виде модели Друде – Лоренца:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_L(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\omega_c}. \quad (3)$$

Для проводящих металлических или полупроводниковых цилиндров ω_p – плазменная частота их материала, ω_c – частота релаксации (столкновений), $\varepsilon_L(\omega)$ описывает лоренцеву ДП кристаллической решетки, связанную с собственными колебаниями (частотами) атомов внутренних оболочек и межзонными переходами [22, 23]. Для серебра в оптическом диапазоне и ниже можно взять $\omega_p = 1.9 \cdot 10^{16}$ Гц, $\omega_c = 5 \cdot 10^{13}$ Гц, $\varepsilon_L = 9.0$. В нашем случае рис. 1 движение плоской волны в ФК сопровождается генерацией пространственных гармоник, а при гомогенизации имеем $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{zz}$, $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$, $k_{\parallel} = k_{zz}$, $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Учет только диэлектрических свойств ($\varepsilon = \varepsilon_L$) будет иметь место, если положить $\omega_p = 0$.

Для построения поверхности изочастот в трехмерном \mathbf{k}' -пространстве двух действительных уравнений (1) и (2) недостаточно (имеем шесть действительных параметров для $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$ и четыре действительных параметра для $\hat{\varepsilon}^{ef}$). Еще одним уравнением может служить дисперсионное уравнение (ДУ), определяющее блоховские волны. Запишем его в форме, разрешенной относительно частоты $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Это ДУ можно получить как условие резонанса при заданных (вообще говоря, комплексных) фазовых сдвигах на гранях ФК. При диссипации это два действительных уравнения. Второе имеет вид $\text{Im}(\omega(\mathbf{k})) = 0$. Если же задавать действительные фазовые сдвиги, то резонансная частота в случае диссипации будет комплексной. В общем случае ДУ получается в форме нелинейного уравнения с комплексной функцией $\Omega(\mathbf{k}, k_0) = 0$. Выражая из него и из уравнения (2) величины k''_{\parallel} , k''_{\perp} и подставляя их в (1), получим искомую поверхность изочастот. В случае плоскостойкого ГММ его ДУ получается в форме, разрешенной относительно \mathbf{k} [17]. Однако (1) и (2) связывают k_0 и \mathbf{k} гомогенного метаматериала, тогда как ДУ имеет место для периодического ФК, поэтому там такая связь имеет место для \mathbf{k} с точностью до вектора обратной решетки с произвольными целыми коэффициентами.

В одноосном ФК удобно записать $\Omega(k_{\parallel}, k_{\perp}, k_0) = 0$. В недиссипативном ФК групповая скорость $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k})$ определяет направление движения энергии, и если $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g < 0$, то имеет место отрицательная рефракция (отрицательное преломление), а волна обратная. Заметим, что отрицательная рефракция и обратная волна могут иметь место при падении плоской волны на границу ограниченного ФК после ее прохождения, а обратная волна – также и при движении волны в бесконечном ФК. Собственно, для решения первой задачи дифракции на конечном в одном, двух или трех направлениях ФК и нужно получать эффективные проницаемости $\hat{\varepsilon}^{ef}(\omega)$ и $\hat{\mu}^{ef}(\omega)$. В нашей задаче в случае $r \ll l$ магнитными свойствами можно пренебречь: $\hat{\mu}^{ef} = \hat{I}$ (азимутальные токи вдоль тонких цилиндров не создают заметный магнитный момент в направлении z , а поперечным наведенным магнитным моментом вообще можно пренебречь). В общем случае следует учитывать ПД, т. е. определять $\hat{\varepsilon}^{ef}(\omega, \mathbf{k})$. Также можно пренебречь кросс-поляризацией (бианизотропией), т. е. считать, что ФК описывается только $\hat{\varepsilon}^{ef}$. В диссипативном ФК \mathbf{k} -пространство является шестимерным (диссипация по разным направлениям может быть различной). Градиент, вообще говоря, комплексный в его трехмерном подпространстве $\nabla_{\mathbf{k}'}\omega(\mathbf{k})$ (и даже его действительная часть) не определяет направление движения энергии. Указанное направление в каждой точке пространства дает вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*/2$, для определения которого нужно знать микроскопические поля ФК. Для гомогенизированного метаматериала этот вектор следует усреднить по ячейке, что будем обозначать скобкой Дирака $\langle \mathbf{S} \rangle$. Направление движения энергии в гомогенизированном метаматериале также дает вектор \mathbf{k}'' , определяющий движение диссипации. Поэтому $\mathbf{s}_0 = \langle \mathbf{S} \rangle / |\langle \mathbf{S} \rangle| = \mathbf{k}'' / |\mathbf{k}''|$. Это дополнительное уравнение позволяет определять только один параметр диссипации $k'' = |\mathbf{k}''|$ (вместо трех параметров \mathbf{k}''). В ФК без диссипации компоненты \mathbf{k} задаются произвольно и определяют направление движения фазы. Тогда одно действительное ДУ позволяет найти k_0 . Задавая \mathbf{k}' в диссипативном ФК, из действительных уравнений $\text{Re}(\Omega(\mathbf{k}, k_0)) = 0$, $\text{Im}(\Omega(\mathbf{k}, k_0)) = 0$ и условия $\mathbf{k}'' = k''\mathbf{s}_0$ определяем \mathbf{s}_0 , k'' и k_0 . Это позволяет выполнить гомогенизацию, определив $\varepsilon_{\perp}(k_0, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{\parallel}(k_0, \mathbf{k})$, что далее можно использовать в (1), (2). Здесь параметры не произвольные, а связаны ДУ. Подстановка этих величин в (1) определяет поверхность изочастот в шестимерном \mathbf{k} -пространстве, а подстановка в (2) – некую другую поверхность в этом же пространстве. Вообще го-

вора, это гиперповерхность, поскольку все параметры удовлетворяют ДУ. Для построения поверхности изочастот в трехмерном \mathbf{k}' -пространстве следует исключить k''_{\parallel} и k''_{\perp} из двух уравнений: из (2) и, например, из уравнения $\text{Im}(\omega(\mathbf{k})) = 0$, а затем подставить в (1). Подставив эти величины в ДУ, получаем его в форме $\omega(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) = 0$. Если это ДУ не использовать, получаем поверхность изочастот в форме (1). Этот подход характерен для примитивной гомогенизации, когда ε_{\perp} и ε_{\parallel} задаются константами с условием $\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel} < 0$ [1, 2]. Если же его использовать, то искомая область в \mathbf{k}' -пространстве есть пересечение этих двух поверхностей. При этом следует учитывать периодичность функции $\omega = \omega(\mathbf{k})$ по \mathbf{k}' . Вместо введения \mathbf{s}_0 в качестве дополнительных соотношений можно использовать связи усредненных компонент электрических и магнитных полей, аналогичные волновым сопротивлениям в средах. Однако в анизотропном ФК может быть несколько волновых сопротивлений, а их введение не однозначно. Ниже для гомогенизации также будем использовать формулы смешения и уравнения Френеля. Первое предполагает работу в нерезонансных областях (при малых k_0 и $|\mathbf{k}|$), а второе — в резонансных (частотной и пространственной) областях, где k_0 и $|\mathbf{k}|$ нельзя считать малыми.

Для корректного описания ФК как ГММ осталось сформулировать ДУ, построить зоны Бриллюэна (дисперсионные диаграммы) и решить задачу гомогенизации, т. е. определить компоненты эффективной ДП. Поскольку цилиндры тонкие, компонента ε''_{\perp} в нерезонансной области близка к $\tilde{\varepsilon}$. Величины k'_{\parallel} и k'_{\perp} определяют угол θ , под которым волна движется относительно проволочек и оси z : $\theta = \arctg\left(\sqrt{k_x'^2 + k_y'^2}/k_z'\right)$. Из (2) имеем

$$k_{\perp}''^2 + 2\frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon''_{\parallel}}k'_{\perp}k'_{\parallel} - k_{\perp}'^2 = \chi^2,$$

где

$$\chi^2 = \frac{(\varepsilon'_{\parallel} + \varepsilon''_{\parallel}) \left[\varepsilon''_{\parallel}(k_{\parallel}'^2 - k_{\parallel}''^2) - 2\varepsilon'_{\perp}k'_{\parallel}k''_{\parallel} \right]}{\varepsilon''_{\parallel}(\varepsilon'_{\perp} + \varepsilon''_{\perp})}. \quad (4)$$

Считаем, что $\varepsilon''_{\perp}/\varepsilon'_{\perp} > 2k''_{\parallel}/k'_{\parallel}$. Поскольку $k'_{\perp} > 0$, следует брать положительный корень квадратного уравнения

$$k''_{\perp} = \sqrt{k_{\perp}'^2 \left(1 + \left(\frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon''_{\parallel}} \right)^2 \right) + \chi^2 - \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon''_{\parallel}} k'_{\perp}}. \quad (5)$$

В результате этих подстановок уравнение (1) приобретает вид

$$\sqrt{k_{\perp}'^4 (\varepsilon_{\parallel}'^2 + \varepsilon_{\parallel}''^2) + k_{\perp}'^2 \varepsilon_{\parallel}''^2 \chi^2} = \varepsilon_{\parallel}''^2 f(k_0, k'_{\parallel}, k''_{\parallel}) + \varepsilon'_{\parallel} k_{\perp}'^2, \quad (6)$$

где обозначена функция

$$f(k_0, k'_{\parallel}, k''_{\parallel}) = \frac{1}{2} \left[k_0^2 + \frac{\chi^2 \varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}'^2 + \varepsilon_{\parallel}''^2} - \frac{\varepsilon'_{\perp}(k_{\parallel}'^2 - k_{\parallel}''^2) + 2k'_{\parallel}k''_{\parallel}\varepsilon'_{\perp}}{\varepsilon_{\perp}'^2 + \varepsilon_{\perp}''^2} \right].$$

При больших k'_{\perp} из (6) получаем

$$\frac{k_{\perp}'^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\parallel}''^2 \chi^2}{k_{\perp}'^2} \right) = \varepsilon_{\parallel}'^2 f(k_0, k'_{\parallel}, k''_{\parallel}),$$

откуда видна возможность ограниченности k'_{\perp} , если ограничена функция f . Для нее при малой диссипации получаем

$$2f(k_0, k'_{\parallel}) \approx k_0^2 + \varepsilon_{\perp}'^{-2} \left[k_{\parallel}'^2 \left(\frac{\varepsilon_{\perp}''}{\varepsilon_{\parallel}''} - \varepsilon'_{\perp} \right) - 2k'_{\parallel}k''_{\parallel} \frac{\varepsilon'_{\perp}\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}''} \right],$$

поэтому должно быть ограничено выражение в квадратных скобках. Левая часть (6) есть квадратичная функция по k'_{\perp} . Если пренебречь диссипацией при движении вдоль оси ($k''_{\parallel} = 0$), то она также квадратичная и по k'_{\parallel} , как и функция $f(k_0, k'_{\parallel}, 0)$. В этом случае, возводя (6) в квадрат, получаем биквадратное по k'_{\perp} уравнение

$$k_{\perp}'^4 + \frac{k_{\perp}'^2 \varepsilon_{\parallel}'' \varepsilon'_{\perp} k_{\parallel}'^2}{\varepsilon_{\perp}'^2 + \varepsilon_{\perp}''^2} = \frac{[\varepsilon_{\parallel}''^2 f(k_0, k'_{\parallel}, 0) + \varepsilon'_{\parallel} k_{\perp}'^2]^2}{\varepsilon_{\parallel}'^2 + \varepsilon_{\parallel}''^2},$$

позволяющее построить поверхность изочастот. Если $k_x = 0$, т. е. волна идет вдоль проволочек, то ее распространение аналогично волне в диссипативной многопроводной линии с квази-Т-волной. Для такой проволочной ИС $k''_{\parallel} \approx -\text{Im}\left(k_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp}^{ef}}\right)$. Указанное значение будем использовать как начальное для итераций. Определяя из (6) k'_{\perp} , имеем $k''_{\parallel} = -\text{Im}\left(k_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp}^{ef}}\right) \cos \theta$ и повторно осуществляем итерации (6), что позволяет строить поверхность изочастот.

Итак, явно поверхность изочастот можно построить, только если задать k''_{\parallel} , не зависящее от угла.

Другой подход к ее построению состоит в выражении из уравнения Френеля $k_{\perp}^2 = \alpha + i\beta$. Тогда $k'_{\perp} = \pm \sqrt{2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)}$. Для ответа на вопрос о замкнутости этой поверхности в \mathbf{k}' -пространстве следует решить задачу гомогенизации, т.е. получить функции $\varepsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, k_0)$, $\varepsilon''_{\parallel}(\mathbf{k}, k_0)$, $\varepsilon'_{\perp}(\mathbf{k}, k_0)$, $\varepsilon''_{\perp}(\mathbf{k}, k_0)$, исключить из них мнимые части векторов и подставить результат в (6). Такую поверхность вращения лучше строить численно. В приближении отсутствия ПД эффективная ДП зависит только от частоты, и задача упрощается. В первом приближении ПД имеем

$$\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, k_0) = \varepsilon_{\perp}(k_0) + \alpha_{\perp jl}(k_0)k_j k_l,$$

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, k_0) = \varepsilon_{\parallel}(k_0) + \alpha_{\parallel jl}(k_0)k_j k_l$$

[13], где по повторяющимся индексам идет суммирование. В нашем случае j и l принимают значения \perp и \parallel . В частности, в ряде работ [18–21] для ГММ для тонких проволочек получены результаты гомогенизации $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, k_0) \approx \tilde{\varepsilon} - \tilde{k}_p^2/(k_0^2 \tilde{\varepsilon} - k_z^2)$, $\varepsilon_{\perp} \approx \tilde{\varepsilon}$, что при малых k_z^2 дает $\varepsilon_{\parallel} \approx 1 - \tilde{k}_p^2/k^2 + k_z^2/k^2$, где $k^2 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}$, \tilde{k}_p^2 — квадрат некоего «плазменного» волнового числа, определяемого конфигурацией проволочной «плазмы». Ясно, что ПД ограничивает величину $|\mathbf{k}|$, поскольку величины $k_{\parallel}^2/\varepsilon_{\parallel}$ и $k_{\perp}^2/\varepsilon_{\perp}$ не могут принимать неограниченных значений. В этом случае уравнение Френеля приводится к виду $k_{\perp}^2 + k_z^2 = k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \tilde{k}_p^2$, т.е. $|\mathbf{k}|$ ограничено более сильно, чем в среде с ДП $\tilde{\varepsilon}$. В общем случае для построения поверхности изочастот удобно использовать итерационный подход, который применен ниже. Из физических соображений также ясно, что при диссипации бесконечных значений быть не может: в плазмоне диссипация ограничивает вектор \mathbf{k}' [24], т.е. замедление. Поэтому диссипация и ПД ограничивают гиперболичность.

В литературе задачу о ГММ обычно решают, используя пакеты прикладных программ или приближенные аналитические методы гомогенизации [1–6]. В первом случае, как правило, решается задача дифракции, например, плоской волны на конечном образце ГММ, или задача о распространении волны в волноведущей структуре, содержащей ГММ. Часто параметры ε_{\parallel} и ε_{\perp} задаются как константы. Наша цель состоит в получении этих параметров, причем следует решать самосогласованную обратную задачу. Дисперсионные диаграммы также можно построить на основе указанных пакетов программ, но для гомогенизации нужны аналитические выражения для полей в ячейке ФК для

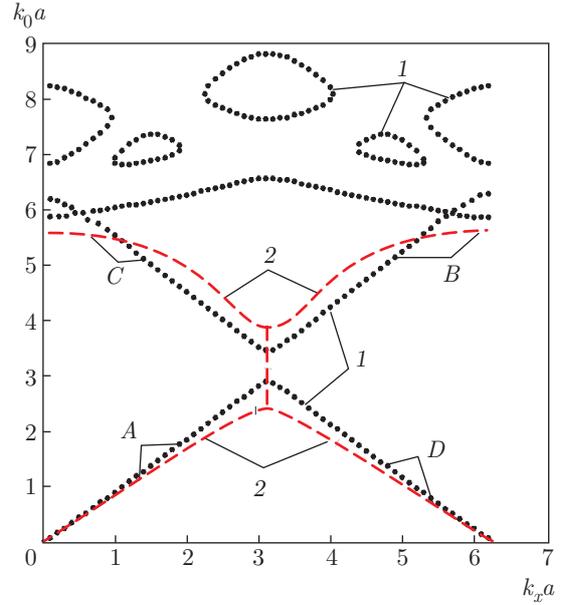


Рис. 2. Несколько дисперсионных ветвей (зонная структура Γ -X) для волны вдоль оси x в недиссипативном ($\omega_c = 0$) ФК с расположением медных металлических цилиндров радиуса $r_0 = 0.1a$ и длины $l = 0.5a$ (кривая 1) и первые две смыкающиеся ветви в диссипативном ФК ($\omega_c = 10^{14}$ Гц) с $r_0 = 0.2a$, $l = 0.9a$ (кривая 2), $\omega_p a/c = 10.0$, $\tilde{\varepsilon} = 1$

данной точки дисперсионной поверхности. Наиболее удобным для этих целей инструментом исследования ГММ является метод объемных интегральных уравнений (ОИУ). Он рассмотрен в ряде работ (например, [25–31]) и весьма успешно использовался для моделирования диэлектрических резонаторов [29–31], ФК [28, 30], дифракции на диэлектрических телах [25–27], для фотоники и плазмоники [30]. Точные решения ОИУ известны для сферического и сфероидального диэлектрических резонаторов [32]. Термином ОИУ будем называть и интегродифференциальные уравнения (ИДУ), в которых имеются производные искомой функции под интегралами или вне интегралов. В работах [28–31] рассмотрены методы преобразования ИУ в ИДУ и наоборот. Возобновление интереса к ОИУ связано с наноплазмоникой, фотоникой и ФК [30].

Малая диссипация для ДП (3) возможна при условиях $\omega \gg \omega_c$ и $\omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + 1}$, т.е. ниже плазмонного резонанса при малых потерях. Идеальный бесконечный ФК без диссипации имеет запрещенные зоны: число фотонов сохраняется, и имеется полная аналогия с обычным кристаллом, в котором число электронов также сохраняется (в приближении отсутствия рождения/уничтожения электрон-

но-дырочных пар). Диссипация приводит к пересечению и слиянию дисперсионных ветвей (рис. 2), фотоны поглощаются, в запрещенных зонах возможно распространение с большим затуханием. В конечных образцах ФК еще имеет место радиационное затухание, связанное с квазипериодичностью. Для них можно ставить задачу о дифракции, например, плоской волны и на ее основе проводить гомогенизацию [16, 28]. Радиационным затуханием можно пренебречь, если по каждому из направлений число периодов велико (численные расчеты дают примерно 40 периодов по каждому из направлений). В противном случае теорема погашения неприменима, и надо учитывать все рассеиватели. В бесконечных ФК единственной краевой задачей является задача на собственные значения, а точнее — задача получения ДУ. Рассмотрим такую задачу для одноосного ФК из тонких цилиндров конечной длины l , периодически с периодом a расположенных по осям x , y и с периодом b по оси z в диэлектрической основе с ДП $\tilde{\varepsilon}$ (рис. 1). Ось z является осью поворотной симметрии четвертого порядка C_4 . Рассмотренная задача для идеально проводящих штырей решалась в работах [20, 21] методом поверхностного интегрального уравнения в приближении Поклингтона (осевого тока). В работе [33] методом ОИУ рассмотрен ФК из проволок бесконечной длины с диссипацией и ДП (3). Наша задача — получить ДУ для проволок конечной длины и провести гомогенизацию для определения $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$.

В безграничном однородном свободном пространстве с ДП $\tilde{\varepsilon}$ решение уравнений Максвелла для заданных источников (распределения плотности электрического тока \mathbf{J}) записывается с помощью функции Грина $G(\mathbf{r}) = (4\pi r)^{-1} \exp(-ikr)$, где $k = k_0\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$, $r = |\mathbf{r}|$ [34]. В ФК следует использовать периодическую функцию Грина \tilde{G} (функцию Грина периодически расположенных источников со сдвигами фаз) [28]. Она удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')),$$

и для дельта-источника в точке \mathbf{r}' определяет в точке \mathbf{r} вектор-потенциал со сдвигом фазы $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Это позволяет получать отклик в виде полей на объемную плотность тока \mathbf{J} (в том числе и для тока поляризации). Формально \tilde{G} получается периодическим продолжением G с фазовыми множителями. Для ФК в качестве источников выступает плотность электрического тока поляризации $\mathbf{J} = \mathbf{J}_p^e = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\mathbf{E}$. Это дополнительная плотность по сравнению с током смещения в диэлектрике $\tilde{\varepsilon}$. В на-

шем случае вектор примитивных трансляций есть $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0a + \mathbf{y}_0a + \mathbf{z}_0b$, поэтому [28]

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, k_0, \mathbf{k}) = \frac{1}{a^2b} \times \sum_{n,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i[k_{xn}x + k_{yl}y + k_{zm}z])}{k_{xn}^2 + k_{yl}^2 + k_{zm}^2 - k_0^2\tilde{\varepsilon}}. \quad (7)$$

Здесь $k_{xn} = k_x + 2n\pi/a$, $k_{yl} = k_y + 2l\pi/a$, $\tilde{k}_{zm} = k_z + 2m\pi/b$, что и определяет периодичность по \mathbf{k}' . Функцию Грина (7) также можно получить периодическим продолжением функции Грина G для источников со сдвигами фаз. ИУ достаточно решить только в одной (нулевой) ячейке рис. 1б. Возьмем начало координат в центре цилиндра. Электрический вектор-потенциал удовлетворяет уравнению $(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mathbf{J}_p^e$, а поля имеют представление

$$\mathbf{E} = -iZ_0(k + k^{-1}\nabla \otimes \nabla)\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A},$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', k_0, \mathbf{k}) \mathbf{J}_p^e(\mathbf{r}') d^3r', \quad (8)$$

$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $\nabla \otimes \nabla \equiv \text{grad}(\text{div})$, d^3r' — элемент объема (интегрирование ведется по объему штыря). Интегральное представление (8) для краткости запишем как $\mathbf{A} = \tilde{G}(\mathbf{J}_p^e)$, где \tilde{G} — интегральный оператор в (8). Тогда электрическое поле имеет вид $\mathbf{E} = (k^2 + \nabla \otimes \nabla)\tilde{G}(\chi\mathbf{E})$. Здесь $\chi(\mathbf{r}') = (\varepsilon(\mathbf{r}')/\tilde{\varepsilon} - 1)$. Это гиперсингулярное объемное ИУ может быть преобразовано к ряду форм, которые нагружены поверхностными интегралами [30]. Они не очень удобны в случае сложных границ. Далее будем полагать, что стержни однородные, т. е. ε и χ не зависят от координат, и использовать ненагруженное ОИУ для электрического поля:

$$\mathbf{E} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right)^{-1} (k^2 + \nabla \otimes \nabla)\tilde{G}^{pv}(\chi\mathbf{E}), \quad (9)$$

а также ИДУ для магнитного поля. ОИУ (9) получается из приведенного ОИУ путем выделения шаровой δ -окрестности точки истока \mathbf{r}' и аналитического вычисления интеграла в ней при $\delta \rightarrow 0$ [30]. В результате выделяется внеинтегральный член $-\chi\mathbf{E}/3$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, что отмечено индексом « pv » (principal value) у интегрального оператора. В случае магнитного поля имеем $\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\nabla \times \tilde{G}((\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\mathbf{E})$. Внутри стержня в силу уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$, поэтому ИДУ имеет вид

$$\mathbf{H} = \nabla \times \tilde{G} \left(\left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \nabla \times \mathbf{H} \right). \quad (10)$$

Уравнение (9) не может быть разрешено при $\varepsilon = -2\tilde{\varepsilon}$. Это условие при $\tilde{\varepsilon} = 1$ определяет точку сгущения частот локализованных плазмонов [22]: $\varepsilon = \varepsilon_L - \omega_p^2/\omega^2 = -2$, откуда получаем частоту сгущения $\omega = \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + 2}$. Поэтому ОИУ (9) из уравнения Фредгольма второго рода превращается в уравнение Фредгольма первого рода для частот локализованных плазмонов. В этом случае лучше использовать ИДУ (10) или ИУ в другой форме. Электрическое поле можно представить в форме (8) с заменами

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_p^e \rightarrow \mathbf{M}^e = -i\omega\mu_0\mathbf{J}_p^e + (i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon})^{-1}\nabla\nabla \cdot \mathbf{J}_p^e$$

[34], но такие ИДУ приводят к возникновению поверхностных интегралов в силу скачка ДП на границе тела от значения ε внутри до значения $\tilde{\varepsilon}$ вне. Имеем

$$\nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} - 1 \right) \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\delta(\nu) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right) \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Здесь \mathbf{v} — внешняя нормаль, а ν — координата вдоль нее, отсчитываемая от поверхности.

Разложение поля \mathbf{E} в (9) или поля \mathbf{H} в (10) по N базисным функциям и использование метода Галеркина приводят к решению задачи. Именно, возникает однородная линейная система алгебраических уравнений (СЛАУ) $\hat{A}E = 0$, где матрица $\hat{A} = \hat{I} - \hat{G}$ определена согласно (9), \hat{I} — единичная матрица, матрица \hat{G} определяется правой частью (9), а E — столбец коэффициентов разложения поля. Матрицы имеют блочный вид с блоками $\hat{A}_{nn'}$. Верхние индексы принимают значения x, y, z , нижние — $1, 2, \dots, N$. Определитель в силу (7) зависит от \mathbf{k} и $k = k_0\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$, поэтому $\Omega(\mathbf{k}, k_0) = \det(\hat{A}(\mathbf{k}, k_0)) = 0$. В ОИУ (9) можно использовать кусочно-постоянные конечные элементы, приводящие к квадратурным формулам для матричных элементов. В ИДУ (10) необходимо использовать дифференцируемые конечные элементы, которые позволяют вычислять и электрическое поле. Задача определения полей связана с задачей определения дисперсии. После решения последней произвольно задается значение поля в какой-либо точке (или задается одна из компонент вектора E), удаляется одно из уравнений СЛАУ и с использованием полученной матрицы определяется поле. Такой подход не очень удобен для аналитических исследований. Рассмотрим подход, основанный на получении ДУ в виде функционалов, умножив скалярно ОИУ (9) в форме $\mathbf{E} = \hat{L}\mathbf{E}$ на векторную функцию \mathbf{F}^* и проинтегрировав по объему:

$$\Lambda(\mathbf{F}, \mathbf{E}) = (\mathbf{F}, \mathbf{E}) - (\mathbf{F}, \hat{L}\mathbf{E}) = 0.$$

На решении ОИУ (9) величина $\Lambda(\mathbf{F}, \mathbf{E})$, т. е. стационарное значение билинейного функционала, определяет ДУ задачи в виде $\Phi(k_0, \mathbf{k}) = \Lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = 0$. Выражая отсюда k_0 , получаем ДУ в искомой ранее форме. Мы не расписываем явно входящие в ДУ интегралы и не приводим другие виды ДУ, основанные на ИДУ для магнитного поля и на комбинированных ИДУ. Из (9) можно выразить k^2 , однако эта величина нелинейно входит в интегральный оператор, и тогда при $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ ДУ имеет вид

$$k^2 = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{E})(\chi^{-1} + 1/3) - (\mathbf{E}, \nabla \otimes \nabla \tilde{G}^{pv} \mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \tilde{G}\mathbf{E})}. \quad (11)$$

Здесь скалярные произведения векторных функций (\mathbf{F}, \mathbf{E}) означают интегрирование по объему цилиндра от обычных скалярных произведений $\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{E}$. Очевидно, оператор ∇ в (11) можно перенести на \mathbf{E} . Поскольку внутри цилиндра $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, объемный интеграл сводится к поверхностному.

3. ГОМОГЕНИЗАЦИЯ

Гомогенизация — это процедура, определяющая материальные параметры однородной (гомогенной) среды на основе решения строгой электродинамической задачи. Соответственно волны в гомогенной среде и в структурированном ФК должны в некотором роде быть эквивалентными. Известно несколько способов введения материальных параметров [9–14]. Мы будем придерживаться обобщенного подхода Казимира [11], описывая гомогенную ИС тензорами эффективных проницаемостей $\hat{\varepsilon}(k_0, \mathbf{k})$ и $\hat{\mu}(k_0, \mathbf{k})$, определяя их путем вычисления усредненных поляризацій и пренебрегая бианизотропией, т. е. влиянием электрического поля на магнитную поляризацию и магнитного поля на электрическую поляризацию. Последнее оправдано в силу исследуемой конфигурации. Поскольку ФК одноосный, указанные эффективные ДП и МП имеют вид

$$\hat{\varepsilon}(k_0, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\hat{\mu}(k_0, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$, $\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{\perp}$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$, $\mu_{zz} = \mu_{\parallel}$. Имеют место уравнения Френеля

$$\begin{aligned} \det \left[\hat{\varepsilon}^{-1} \hat{k} \hat{\mu}^{-1} \hat{k} - \hat{I} k_0^2 \tilde{\varepsilon} \right] &= 0, \\ \det \left[\hat{\mu}^{-1} \hat{k} \hat{\varepsilon}^{-1} \hat{k} - \hat{I} k_0^2 \tilde{\varepsilon} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

в которых введен тензор \hat{k} , действующий на векторы плоской волны так же, как ротор. Если один из тензоров (12) диагональный, то в (13) возникает тензор \hat{k}^2 . Эти тензоры имеют вид

$$\hat{k} = -i \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{k}^2 = \begin{bmatrix} k_y^2 + k_z^2 & -k_x k_y & -k_x k_z \\ -k_x k_y & k_x^2 + k_z^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_y & -k_y k_z & k_x^2 + k_y^2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения Френеля распадаются на уравнения для необыкновенной и обыкновенной волн, если один из тензоров (12) является единичным или диагональным. Пусть $\hat{\mu} = \mu \hat{I}$. Тогда при $\varepsilon'_{zz} < 0$, $\varepsilon'_{xx} > 0$ можно говорить о ГММ, если $\mu' > 0$. В общем случае (12) волны в ФК являются гибридными, а если $\varepsilon'_{zz} < 0$ и $\mu'_{zz} < 0$, то возможны обратные волны. Для исследования возможности достижения отрицательных компонент МП необходимо рассматривать толстые металлические цилиндры, поскольку μ_{zz} связано с азимутальными токами. В первом приближении при $r \ll l$ в цилиндрической системе координат, связанной с цилиндром, можно пренебречь компонентами E_ρ , E_φ . Тогда $\hat{\mu} = \hat{I}$. Во втором приближении следует учесть E_z и E_φ , что нарушает гиперболичность в форме (1). Для толстого цилиндра необходимо еще учитывать E_ρ . На низких частотах $\mu_{xx} = 1$, $0 < \mu_{zz} < 1$.

Для гомогенизации будем использовать усредненные по ячейке величины, которые используем для эффективной ИС, что обозначаем скобками Дирака, например,

$$\langle \mathbf{E} \rangle = a^{-3} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r.$$

Ток электрической поляризации $\mathbf{J}_p^e = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\mathbf{E}$ связан с самой поляризацией $\mathbf{P}^e = \mathbf{J}_p^e/(i\omega)$, которую для ИС можно определить как дипольный момент единицы объема $\langle \mathbf{P}^e \rangle$, вычисляемый через плотность заряда $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}_p^e/(i\omega) = -\nabla \cdot \mathbf{P}^e$:

$$\langle \mathbf{P}^e \rangle = a^{-2} b^{-1} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3 r. \quad (14)$$

Магнитный момент единицы объема $\langle \mathbf{M} \rangle$ и пропорциональную ему магнитную поляризацию $\langle \mathbf{P}^m \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{M} \rangle$ определяем как

$$\langle \mathbf{M} \rangle = a^{-2} b \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}_p^e(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (15)$$

Уравнения гомогенизации методом вычисления поляризации имеют вид

$$\begin{aligned} \langle D_\alpha \rangle &= \varepsilon_0 \varepsilon_{\alpha\beta} \langle E_\beta \rangle = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \langle E_\alpha \rangle + \langle P_\alpha^e \rangle, \\ \langle B_\alpha \rangle &= \mu_0 \mu_{\alpha\beta} \langle E_\beta \rangle = \mu_0 \langle E_\alpha \rangle + \langle P_\alpha^m \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь индексы α , β принимают значения x , y и z , а по повторяющимся индексам идет суммирование. Вычисляя усредненные поля и поляризации, из СЛАУ (16) определяем компоненты эффективных тензоров проницаемостей.

Итак, в первом приближении берем ток поляризации в виде $\mathbf{J}_p^e = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\mathbf{z}_0 E_z(\rho, \varphi, z)$. В общем случае следует взять разложение

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M E_{znm} J_n(\rho\kappa_m) \times \\ &\times \cos(k_{mz} z) \exp(-in\varphi), \end{aligned} \quad (17)$$

в котором $k_{mz} = m\pi/l$, $\kappa_m = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_{mz}^2}$, поскольку компонента поля (17) удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Для тонкого цилиндра мы пренебрежем азимутальной зависимостью ($N = 0$), а для радиальной зависимости берем два члена:

$$E_z(\rho, z) = E_0 J_0(\rho\kappa_0) + E_1 J_0(\rho\kappa_1) \cos(k_{1z} z).$$

Конечно, это приближение тем лучше, чем ниже частота. В низкочастотном пределе ток поляризации определяется только током проводимости, который исчезает на концах проволоочки. В модели идеально проводящих проволоочек поверхностную плотность тока можно заменить осевым током, а граничные условия накладывать на поверхности: $E_z(r, z) = 0$ [20, 21], что эквивалентно приближению Поплингтона в теории антенн. Однако для реальных металлов на низких частотах $\varepsilon \approx -i\sigma/(\omega\varepsilon_0)$, глубина проникновения $\delta > r$ и поле распределено по закону $J_0((1-i)\rho/\delta)$, где $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)}$, т. е. практически не зависит от ρ . На частотах, где $\varepsilon \approx \varepsilon' < 0$, распределение имеет вид $I_0\left(\rho\sqrt{k_0^2|\varepsilon'| + k_{1z}^2}\right)$. И в этих случаях объемную плотность тока поляризации можно считать постоянной и аппроксимировать линейным осевым током. ИУ для определения компоненты $E_z(\rho, z)$ имеет вид

$$E_z(\rho, z) = \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \times \int_V \tilde{G}(\rho, z, \varphi|\rho', z') E_z(\rho', z', \varphi') d^3 r'. \quad (18)$$

Здесь элемент объема обозначен как $d^3 r' = \rho' d\rho' d\varphi' dz'$. Функцию \tilde{G} , полученную из (7) переходом в цилиндрическую систему координат, можно представить как [34]

$$\tilde{G}(\rho, z|\rho', z') = \frac{1}{a^2 b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_{zm}(z-z') - in(\varphi-\varphi')) J_n(\rho\kappa_{jl}) J_n(\rho'\kappa_{jl})}{\kappa_{jl}^2 + k_{zm}^2 - k^2}. \quad (19)$$

Интегрирование по φ' уничтожает зависимость от угла в (18). Поэтому ИУ можно записать в более удобной форме:

$$E_z(\rho, z) = \chi \int_{-l}^l \int_0^\tau \tilde{G}_0(\rho, z|\rho', z') E_z(\rho', z') \rho' d\rho' dz', \quad (20)$$

$$\tilde{G}_0(\rho, z|\rho', z') = \frac{2\pi}{a^2 b} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(k^2 - k_{zm}^2) J_0(\rho\kappa_{nl}) J_0(\rho'\kappa_{nl})}{\kappa_{nl}^2 + k_{zm}^2 - k^2} \times \exp(-ik_{zm}(z-z')).$$

В этих соотношениях $\kappa_{nl} = \sqrt{k_{xn}^2 + k_{yl}^2}$. Используем два условия для получения ДУ. Первое получаем интегрированием (20) по объему цилиндра. Второе получаем, умножив это ИУ на $E_z(\rho, z)$ и проинтегрировав по объему. Определитель полученной СЛАУ второго порядка приравняем нулю, что даст искомое ДУ. Эквивалентное ДУ получается из этих же условий для уравнения (18) интегрированием по частям. Для определения поля в силу однородности полагаем $E_0 = 1$, а E_1 определяем из любого уравнения СЛАУ. Задавая k_0 и k_z , определяем k_x из ДУ. В нашем простейшем случае эффективные параметры имеют вид $\mu^{ef} = 1$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \tilde{\varepsilon}$, $\varepsilon_{zz} = \tilde{\varepsilon} + \varepsilon_0^{-1} \langle P_z^e \rangle / \langle E_z \rangle$. Для вычисления средних значений удобно представление (7) функции Грина. В нее входят функции типа $g(x, k_{xn}) = \exp(-ik_{xn}x)$. Имеем

$$\langle g(k_{xn}) \rangle = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ik_{xn}x) dx = \frac{\sin(k_{xn}a/2)}{k_{xn}a/2} = \text{sinc}(k_{xn}a/2),$$

$$\langle P_z^e \rangle = 4E_1\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})r l a^{-3} J_1(r\kappa_1) / \kappa_1,$$

$$\varepsilon_{zz} = \tilde{\varepsilon} + \frac{4E_1(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})r l J_1 \left(\sqrt{k_0^2 r^2 \varepsilon - (\pi r/l)^2} \right)}{a^2 b \langle E_z \rangle \sqrt{k_0^2 \varepsilon - (\pi/l)^2}}. \quad (21)$$

В области очень низких частот $k_0^2 r^2 \varepsilon \approx -i\sigma Z_0 k_0 r^2 \ll (\pi r/l)^2$ и $|k_0^2 r^2 \varepsilon| \ll (\pi r/l)^2$, если $k_0 l \ll \pi^2 / (\sigma Z_0 l)$. В этом случае

$$J_1 \left(\sqrt{k_0^2 r^2 \varepsilon - \left(\frac{\pi r}{l} \right)^2} \right) = i I_1 \left(\frac{\pi r}{l} \right) \approx i \frac{\pi r}{l}.$$

В области плазмоники $\omega_c \ll \omega < \omega_p / \sqrt{\varepsilon_L + 1}$ при малой диссипации $\varepsilon \approx \varepsilon' < 0$, и при $|k_0^2 r^2 \varepsilon| \ll 1$ функция Бесселя равна $i\sqrt{(\pi r/l)^2 + |k_0^2 r^2 \varepsilon|}$. Это значение можно использовать в широком диапазоне частот $k_0 r \ll 1$. В диапазоне плазмоники имеем $\varepsilon'_{zz} = \tilde{\varepsilon} - 4(E_1 / \langle E_z \rangle)(|\varepsilon'| + \tilde{\varepsilon})r^2 l / (a^2 b)$. Следовательно, гиперболичность возникает при

$$-\varepsilon' > \tilde{\varepsilon} \left[\frac{a^2 b}{4(E_1 / \langle E_z \rangle) r^2 l} - 1 \right] = \tilde{\varepsilon} \gamma. \quad (22)$$

Также имеем $\varepsilon' = \varepsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 + \omega_c^2) \approx \varepsilon_L - \omega_p^2 / \omega^2$, поэтому гиперболичность возникает на низких частотах $\omega^2 < \omega_p^2 / (\tilde{\varepsilon} \gamma + \varepsilon_L)$, поскольку $\gamma \gg 1$. Кроме того, для гиперболичности нужны малые потери, что обычно трудно достижимо при обычных температурах. Поэтому ГММ, строго говоря, реализуются при сверхнизких температурах, когда ω_c можно понизить на несколько порядков. Предельный переход $l \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ при $l \approx b$ в соотношении (22) распространяет его на случай бесконечно длинных проволочек. Увеличение r может ослабить эти требования, но при этом возникает отличие μ_{zz} от единицы. Рассмотрим этот вариант. Для него следует учесть компоненту E_φ , без учета которой $\langle M_z \rangle \equiv 0$. В качестве простейшего приближения берем компоненту $E_\varphi(\rho, z) = E_3 J_1(\rho\kappa_0)$. Ей соответствует $H_z(\rho, z) = i Z_0 \sqrt{\varepsilon} E_3 J_0(\rho\kappa_0)$. Имеем $\mu_{zz} = 1 + \langle M_z \rangle / \langle H_z \rangle$ и усредненную компоненту магнитного момента

$$\langle M_z \rangle = 2\pi i l \omega \varepsilon_0 (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) E_3 A^{-2} b^{-1} \kappa_0^{-3} (r\kappa_0)^2 J_2(r\kappa_0) \approx \approx \pi r^4 l k_0^2 a^{-2} b^{-1} (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \frac{E_3}{Z_0} \frac{\sqrt{-\varepsilon}}{4}.$$

Область гиперболичности (индефинитной метрики) имеет место при $\langle M_z \rangle > \langle H_z \rangle$. В случае $\mu'_{zz} < 0$ и $\varepsilon'_{zz} < 0$ ФК не является ГММ. При этом в нем поддерживаются обратные волны. Возможен и случай больших радиусов: $r \gg l$. Такие проводящие диски создают в основном компоненту μ_{zz} , а $\varepsilon_{zz} \approx \tilde{\varepsilon}$. Более просто моделируются и более точно соответствуют магнитному ГММ кольцевые проволочные структуры [35]. Однако вместо μ_{zz} ФК можно описать тензором ДП $\hat{\varepsilon}^{ef}$ (подход Ландау – Лифшица [11]).

Рассмотренные достаточно простые соотношения, учитывающие при аппроксимации полей несколько членов, могут быть уточнены. В частности, учет E_φ требует решения приближенного ИУ для этой компоненты. Тогда следует учесть все компоненты вектор-потенциала в цилиндрической системе координат [34]:

$$\begin{aligned} A_\rho(\rho, z) &= \int_V \tilde{G}(\rho, z, \varphi|\rho', z', \varphi') J_\varphi(\rho', z') \times \\ &\quad \times \sin(\varphi - \varphi') d^3 r', \\ A_\varphi(\rho, z) &= \int_V \tilde{G}(\rho, z|\rho', z') J_\varphi(\rho', z') \times \\ &\quad \times \cos(\varphi - \varphi') d^3 r', \\ A_z(\rho, z) &= \int_V \tilde{G}(\rho, z, \varphi|\rho', z', \varphi') J_z(\rho', z') d^3 r'. \end{aligned} \quad (23)$$

Выполняя интегрирование по углу, получаем, что в (23) интегрирование идет по меридиональному сечению цилиндра с функциями $\tilde{G}_\rho(\rho, z|\rho', z')$ и $\tilde{G}_\varphi(\rho, z|\rho', z')$ для первых двух соотношений и с функцией $\tilde{G}_z(\rho, z|\rho', z')$ для последнего. Здесь $\tilde{G}_\rho = -i\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_\varphi = \tilde{G}_1$, а функция \tilde{G}_1 отличается от $\tilde{G}_z = \tilde{G}_0$ тем, что вместо функций Бесселя J_0 в нее входят функции Бесселя J_1 . Теперь имеем следующее представление компонент:

$$E_\varphi(\rho, z) = -ik_0 Z_0 A_\varphi,$$

$$\begin{aligned} E_z(\rho, z) &= (ik_0 \tilde{\varepsilon})^{-1} \times \\ &\quad \times Z_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right) + \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z \right]. \end{aligned}$$

Они приводят к связанным ИУ для компонент поля, поскольку $J_z = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})E_z$, $J_\varphi = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})E_\varphi$. В ИУ (20) возникает дополнительный член, а также уравнение для E_φ :

$$\begin{aligned} E_\varphi(\rho, z) &= k^2 \chi \int_{-l}^l \int_0^r \tilde{G}_\varphi(\rho, z|\rho', z') \times \\ &\quad \times E_\varphi(\rho', z') \rho' d\rho' dz'. \end{aligned} \quad (24)$$

Полностью строгая модель соответствует учету угловой зависимости для всех трех компонент электрического поля. Можно также строить модели на основе ИДУ для магнитного поля.

В работах [36,37] и ряде других работ предложено использовать два типа мета-атомов в виде диэлектрических шаров двух радиусов, включенных в две кубические подрешетки радиуса a , сдвинутые по каждой из координат на $a/2$. В этих работах утверждается, что при совпадении частот двух резонансов в шарах двух типов, когда первый тип резонанса электрический дипольный, а второй магнитный дипольный, метаматериал будет проявлять свойства левой среды, т. е. описываться материальными параметрами $\varepsilon^{ef} < 0$ и $\mu^{ef} < 0$. Здесь мы хотим рассмотреть простую модель ФК с включением диэлектрических цилиндров с параметрами $l \ll r$, в котором можно пренебречь всеми компонентами электрического поля, кроме E_φ . В уединенном шаре или цилиндре только эта азимутально независимая компонента (наряду с H_ρ и H_z) присутствует в низшем колебании $H_{01\delta}$, которое является магнитно-дипольным [29–32] и может создавать магнитный момент. Поле такой моды описывается одной компонентой вектор-потенциала $A_\varphi = A_{0\varphi} J_1(\rho\tilde{\kappa}) \cos(k_z z)$, $\tilde{\kappa} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_z^2}$ [31]. В ФК не может быть полной азимутальной симметрии. Но вклад от несимметричных членов мал и может не учитываться. Компонента $A_\rho = A_{0\rho} J_1(\rho\tilde{\kappa}) \sin(k_z z)$ дает при малом отношении l/r меньший вклад, чем компоненты A_φ и $A_z = A_{0z} J_0(\rho\tilde{\kappa}) \cos(k_z z)$. Учесть вклад всех трех компонент или двух компонент можно, при этом в последнем случае для соленоидальности поля необходимо положить $A_{0z} = 0$, а в первом случае можно ввести всего одну амплитуду [33], поскольку имеет место уравнение непрерывности. Действительно, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (A_{0\rho}\tilde{\kappa} - k_z A_{0z}) J_0(\rho\tilde{\kappa}) \sin(k_z z),$$

а также

$$E_\rho = -iZ_0(k_0\tilde{\varepsilon})^{-1} (A_{0\rho}k_z^2 + 2A_{0z}k_z\tilde{\kappa}) J_1(\rho\tilde{\kappa}) \sin(k_z z),$$

$$\begin{aligned} E_z &= -iZ_0(k_0\tilde{\varepsilon})^{-1} [A_{0z}(\tilde{\kappa}^2 - k_z^2) + A_{0\rho}\tilde{\kappa}k_z] \times \\ &\quad \times J_0(\rho\tilde{\kappa}) \cos(k_z z). \end{aligned}$$

Налагая условие $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, находим, что $A_{0\rho}$ может быть любым и $A_{0z}k^2 = 0$, т.е. $A_{0z} = 0$. Если же положить $E_\rho = 0$, т.е. взять $A_{0\rho}k_z + 2A_{0z}\tilde{\kappa} = 0$, то условие соленоидальности $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial E_z/dz = 0$ приводит к требованию $E_z = 0$, т.е. к наличию одной компоненты E_φ . В нашем случае удобно взять произвольные амплитуды у полей: $E_\varphi = E_{0\varphi}J_1(\rho\tilde{\kappa})\cos(k_z z)$, $E_\rho = E_{0\rho}J_1(\rho\tilde{\kappa})\sin(k_z z)$, $E_z = E_{0z}J_0(\rho\tilde{\kappa})\cos(k_z z)$ и наложить условие соленоидальности [33]: $E_{0\rho} = E_{0z}k_z/\tilde{\kappa}$. При этом ИУ (24) модифицируется и дополняется двумя другими. Независимыми будут E_{0z} и $E_{0\varphi}$, определяющие компоненты ε_{zz} и μ_{zz} .

Теперь мы предполагаем отсутствие диссипации, поэтому задачей будет исследование возможности выполнения условия $\mu_{zz} < 0$. В общем случае $E_\varphi(\rho, z)$ следует разлагать в ряд типа (17):

$$E_\varphi(\rho, z) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\varphi m} J_1(\rho\tilde{\kappa}_m) \begin{pmatrix} \cos(k_{mz}z) \\ \sin(k_{mz}z) \end{pmatrix},$$

и искать его коэффициенты. Здесь косинус соответствует четным по z колебаниям, а синус — нечетным. Собственные частоты нечетных колебаний лежат выше. Мы рассмотрим простую аппроксимацию основного колебания $H_{01\delta}$: $E_\varphi(\rho, z) = E_{\varphi 0}J_1(\rho\tilde{\kappa})\cos(k_z z)$. В работах [29, 31] задача для уединенного цилиндрического диэлектрического резонатора решена численно и показано, что решение хорошо соответствует такой аппроксимации. Компонента $E_\varphi(\rho, z)$ связана с компонентами

$$H_z(\rho, z) = iE_{\varphi 0}\tilde{\kappa}J_0(\rho\tilde{\kappa})\frac{\cos(k_z z)}{k_0 Z_0},$$

$$H_\rho(\rho, z) = -ik_z E_{\varphi 0}J_1(\rho\tilde{\kappa})\frac{\cos(k_z z)}{\tilde{\kappa}Z_0}$$

уравнениями Максвелла. Заметим, что электрическое поле, как и магнитное, является соленоидальным и удовлетворяет ИУ (24). Такое поле не создает электрического дипольного момента. В силу однородности положим $E_{\varphi 0} = 1$. Магнитный дипольный момент есть

$$\langle M_z \rangle = 2\pi i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})lr^2 a^{-2} bJ_2(r\tilde{\kappa})\text{sinc}(k_z l/2).$$

Здесь $\text{sinc}(k_z l/2) \approx 1$, если k_z не слишком велико, т.е. угол θ не слишком мал. Поскольку предполагается $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$, для отрицательной компоненты МП необходимо, чтобы величина $\langle H_z \rangle$ была мнимой и отрицательной. Заметим, что H_z есть полное внутреннее поле, которому соответствует микроскопическая индукция $B_z = \mu_0 H_z$ (магнитных свойств у микрочастиц нет). Индукция $\langle B_z \rangle = \mu_0 \mu_{zz} \langle H_z \rangle$ является

макроскопической, как и поле $\langle H_z \rangle$. Модель воздействия на одиночную частицу плоской волны [36, 37] с последующим суммированием дипольных моментов частиц в ФК, где не учитывается бесконечное число пространственных гармоник, приводит к неверному результату, поскольку используется внешнее поле. Поскольку $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, в нашем случае имеем $H_z = \rho^{-1} \partial(\rho A_\varphi)/\partial\rho$ или согласно (23)

$$H_z(\rho, z) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \times \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^r \left[\rho^{-1} \tilde{G}_1(\rho, z|\rho', z') + \frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{G}_1(\rho, z|\rho', z') \right] \times E_\varphi(\rho', z') d\rho' dz'.$$

Для усреднения мы воспользуемся представлением ФГ (7). Тогда $H_z(x, y, z) = \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y$. Теперь в уравнении (8) следует учесть, что

$$J_{px}^e = J_{p\rho}^e \cos\varphi - J_{p\varphi}^e \sin\varphi, \quad J_{py}^e = J_{p\rho}^e \sin\varphi + J_{p\varphi}^e \cos\varphi.$$

Это соответствует равенствам

$$J_{px}^e = -i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \sin\varphi J_1(\tilde{\kappa}\rho) \cos(k_z z), \\ J_{py}^e = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \cos\varphi J_1(\tilde{\kappa}\rho) \cos(k_z z).$$

Имеем

$$H_z(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \int_V J_1(\tilde{\kappa}\rho') \cos(k_z z') \times \left[\cos(\varphi') \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial x} + \sin(\varphi') \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial y} \right] d^3 r'. \quad (25)$$

Усредненные значения $\langle H_z \rangle$ этой компоненты микроскопического поля получим в следующем разделе.

Выше рассмотрен метод гомогенизации, аналогичный введению материальных параметров путем вычисления поляризации и усреднения микроскопических полей по физически бесконечно малому объему. В качестве такого объема выступает ячейка периодичности, поэтому основное условие здесь $ka \ll 1$. Этот метод может применяться в области $ka \sim 1$ с тем ограничением, что поля типа $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ нельзя использовать на дистанции порядка длины волны, поскольку фактически они соответствуют усредненным величинам $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$, а реальные поля имеют много пространственных гармоник и сильно осциллируют. Однако для задач дифракции в дальней зоне в случае, если образец ФК массивный, т.е. содержит много периодов по каждому измерению, это приближение применимо. В этой связи можно отметить методы гомогенизации, основанные на выделении эффективных материальных параметров на основе решения

обратных задач дифракции [15, 16, 28]. Впервые такой метод применен в [15] для шариков радиуса r в кубической решетке с условием $kr \ll 1$. Это условие в основном использовано для упрощения вычислений, чтобы не рассматривать резонансные поля. Такой метод гомогенизации весьма сложен для реализации. Возможен метод гомогенизации, основанный на решении обратной задачи по минимизации невязки ДУ Френеля типа (1), (2) или (13) и ДУ, получаемого из решения уравнений Максвелла. Этот метод не использует каких-либо соотношений и ограничений, связанных с длиной волны и размерами. Однако в нем следует использовать аппроксимации для величин типа $\hat{\varepsilon}(k_0, \mathbf{k})$ и $\hat{\mu}(k_0, \mathbf{k})$, которые обычно представляют как разложения по k_0 и \mathbf{k} [10–13]. В таких разложениях указанные ограничения существуют. Если же искать непосредственно $\hat{\varepsilon}(k_0, \mathbf{k})$ и $\hat{\mu}(k_0, \mathbf{k})$, то ограничений нет, но зависимость от \mathbf{k} (ПД) требует привязки этих параметров к конкретной дисперсионной ветви. Большие значения k_0 соответствуют высшим дисперсионным ветвям.

Приведенные простые аппроксимации для длинной проволоки дают объемное распределение плотности заряда, пропорциональное $\sin(\pi z/l)$, т. е. на концах при $z = \pm l/2$ плотности противоположны по знаку и максимальны по модулю, что характеризует проволочку как электрический диполь. Строгие соотношения должны учитывать, вообще говоря, бесконечное число членов в разложениях. Можно рассматривать и мультипольные вклады в поля-

ризацию. Для точного поля имеем $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon$, откуда $\nabla \cdot \mathbf{E} = -(\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon)/\varepsilon$. Это соотношение говорит о том, что объемной плотности заряда нет, внутри однородного цилиндра поле соленоидальное, а на его поверхности в силу скачка нормальной компоненты электрического поля возникает поверхностная плотность связанного заряда. Она обуславливает дипольную поляризацию, полный связанный заряд для которой равен нулю. Градиент $\nabla \varepsilon$ пропорционален поверхностной дельта-функции с множителем $\tilde{\varepsilon} - \varepsilon$. При этом максимальная плотность поверхностного заряда будет на торцах цилиндра. Увеличение числа аппроксимирующих функций должно приводить к исчезновению наведенной объемной плотности заряда, хотя для каждой из аппроксимирующих функций он имеет место. Примером может служить аппроксимация поверхностного тока идеально проводящего цилиндра линейным током на его оси в теории антенн. В случае толстого цилиндра для лучшей аппроксимации удобно взять несколько линейных токов как вспомогательные источники, расположенные на внутренней окружности. Поверхностный ток есть предельный случай, как плотность распределения линейных токов по поверхности.

4. УСРЕДНЕНИЕ ПОЛЕЙ

Для примера рассмотрим вычисление $\langle E_z \rangle$. Усредняя (18), имеем

$$\langle E_z \rangle = \frac{\chi}{a^2 b} \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \frac{(k^2 - k_{zl}^2) \text{sinc}(k_{xn}a/2) \text{sinc}(k_{yj}a/2) \text{sinc}(k_{zl}a/2)}{k_{xn}^2 + k_{yj}^2 + k_{zl}^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}} I_{njl}, \quad (26)$$

где

$$I_{njl} = \int_V \exp(i[k_{xn}\rho \cos \varphi + k_{yj}\rho \sin \varphi + k_{zl}z]) \times \\ \times [J_0(\rho\kappa_0) + E_1 J_0(\rho\kappa_1) \cos(k_{1z}z)] d^3r'.$$

Для вычисления I_{njl} воспользуемся формулами [34, 38]

$$\exp(ik_{xn}\rho \cos \varphi) = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(-im\varphi) J_m(k_{xn}\rho), \quad (27)$$

$$\exp(ik_{yj}\rho \sin \varphi) = \\ = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \exp(im'\varphi) J_{m'}(k_{yj}\rho), \quad (28)$$

которые подставляем в (26). В результате интегрирования по углу возникает множитель $2\pi\delta_{mm'}$. Вычисляя интеграл по z , получаем

$$I_{njl} = 2\pi l \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \int_0^r J_m(k_{xn}\rho) J_m(k_{yj}\rho) \eta_l(\rho) \rho d\rho, \quad (29)$$

$$\eta_l(\rho) = \left[\text{sinc}(k_{lz}l/2) J_0(\rho\kappa_0) + E_1 \times \right. \\ \times \frac{\text{sinc}((k_{lz}+k_{1z})l/2) + \text{sinc}((k_{lz}-k_{1z})l/2)}{2} \\ \left. \times J_0(\rho\kappa_1) \right]. \quad (30)$$

Этот одномерный интеграл (29) следует вычислять численно. Однако если $r\kappa_0 \ll 1$ и $r\kappa_1 \ll 1$, то полагая в (30) функции Бесселя единице, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_m(k_{xn}, k_{yj}, r) &= \int_0^r J_m(k_{xn}\rho) J_m(k_{yj}\rho) \rho d\rho = \\ &= r \frac{k_{yj} J_m(k_{xn}r) J_{m-1}(k_{yj}r) - k_{xn} J_{m-1}(k_{xn}r) J_m(k_{yj}r)}{k_{xn}^2 - k_{yj}^2}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} I_{njl} &= 2\pi l \left[\text{sinc}(k_{lz}l/2) + E_1 \times \right. \\ &\times \left. \frac{\text{sinc}((k_{lz}+k_{1z})l/2) + \text{sinc}((k_{lz}-k_{1z})l/2)}{2} \right] \times \\ &\times \left(\tilde{I}_{0nj} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \tilde{I}_{2mnj} \right). \end{aligned}$$

Осталось определить E_1 . Эту величину находим из квадратного ДУ $\Omega(E_z) = 0$ или из линейного уравнения $\partial\Omega(E_z)/\partial E_z = 0$, где

$$\Omega(E_z) = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^r \rho d\rho dz E_z^2(\rho, z) =$$

$$= \chi \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^r \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^r E_z(\rho, z) \tilde{G}_0(\rho, z|\rho', z') \times$$

$$\times E_z(\rho', z') \rho \rho' d\rho dz' d\rho dz. \quad (31)$$

Во втором случае имеем

$$E_1 = \frac{\tilde{I}_0(\kappa_0, \kappa_1, r)/\pi - \pi\chi l \sum_{n,m,l=-\infty}^{\infty} S_m \text{sinc}(k_{zml}/2) \frac{\tilde{I}_0(\kappa_0, \kappa_{nl}, r)(k^2 - k_{zm}^2) \tilde{I}_0(\kappa_1, \kappa_{nl}, r)}{a^2 b(\kappa_{nl}^2 + k_{zm}^2 - k^2)}}{\pi\chi l \sum_{n,m,l=-\infty}^{\infty} S_m^2 \frac{\tilde{I}_0(\kappa_0, \kappa_{nl}, r)(k^2 - k_{zm}^2) \tilde{I}_0(\kappa_1, \kappa_{nl}, r)}{a^2 b(\kappa_{nl}^2 + k_{zm}^2 - k^2)} - \frac{r^2 (J_0^2(r\kappa_1) + J_1^2(r\kappa_1))}{4}}.$$

В наших приближениях оба значения: величину (26) и E_1 , следует подставлять в (21) для гомогенизации по методу усреднения.

Усредняя уравнение (25), получаем

$$\begin{aligned} \langle H_z \rangle &= \frac{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon - \tilde{\varepsilon})}{a^2 b} \int_V J_1(\tilde{\kappa}\rho) \cos(k_z z) \times \\ &\times [k_{xn} \cos \varphi + k_{yj} \sin \varphi] F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\rho, \varphi, z) &= \\ &= \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k_{xn}a/2) \text{sinc}(k_{yj}a/2) \text{sinc}(k_{zl}a/2)}{k_{xn}^2 + k_{yj}^2 + k_{zl}^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}} \times \\ &\times \exp(i[k_{xn}\rho \cos \varphi + k_{yj}\rho \sin \varphi + k_{zl}z]). \end{aligned}$$

Вычисляя в (32) интеграл по z , запишем

$$\begin{aligned} I_{zl} &= \int_{-l/2}^{l/2} \cos(k_z z) \cos(k_{zl} z) dz = \\ &= \frac{l}{2} \left(\text{sinc} \left(\frac{(k_{zm} + k_z)l}{2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{(k_{zm} - k_z)l}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Вычислим интегралы по углу. Используем (27), (28) и введем обозначения

$$I_{cnj} = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \exp(i[k_{xn}\rho \cos \varphi + k_{yj}\rho \sin \varphi]) d\varphi,$$

$$I_{snj} = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \exp(i[k_{xn}\rho \cos \varphi + k_{yj}\rho \sin \varphi]) d\varphi.$$

Теперь имеем интегралы

$$\begin{aligned} I_{cnj} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_{xn}\rho) J_{m'}(k_{yj}\rho) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \cos \varphi [\cos((m'-m)\varphi) + i \sin((m'-m)\varphi)] d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{snj} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_{xn}\rho) J_{m'}(k_{yl}\rho) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \sin \varphi [\cos((m'-m)\varphi) + i \sin((m'-m)\varphi)] d\varphi. \end{aligned}$$

В силу условий ортогональности тригонометрических функций получаем

$$I_{cnj} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mi^m J_m(k_{xn}\rho) J_m(k_{yl}\rho)}{k_{yj}\rho},$$

$$\begin{aligned} I_{snj} &= -2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m+1} J_m(k_{xn}\rho) J'_m(k_{yj}\rho) = \\ &= -2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m+1} J_m(k_{xn}\rho) \times \\ &\quad \times \left[\frac{m J_m(k_{yj}\rho)}{k_{yj}\rho} - J_{m+1}(k_{yj}\rho) \right]. \end{aligned}$$

Эти величины мнимые. Обозначим их как $I_{cnj} = i\alpha_{nj}(\rho)$ и $I_{snj} = i\beta_{nj}(\rho)$, где

$$\begin{aligned} \alpha_{nj}(\rho) &= \frac{4\pi}{k_{yj}\rho} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) J_{2m-1}(k_{xn}\rho) J_{2m-1}(k_{yj}\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{nj}(\rho) &= 2\pi \left[J_0(k_{xn}\rho) J_1(k_{yj}\rho) + \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(k_{xn}\rho) (J_{2m+1}(k_{yj}\rho) - J_{2m-1}(k_{yj}\rho)) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно усредненная компонента представляется как

$$\begin{aligned} \langle H_z \rangle &= \frac{i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})}{a^2 b} \times \\ &\times \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} I_{zl} \frac{\text{sinc}(k_{xn}a/2) \text{sinc}(k_{yj}a/2) \text{sinc}(k_{zl}a/2)}{k_{xn}^2 + k_{yj}^2 + k_{zl}^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}} \times \\ &\quad \times I_{\rho nj}. \end{aligned}$$

В этом выражении следует вычислить интегралы

$$I_{\rho nj} = \int_0^r [k_{xn}\alpha_{nj}(\rho) + k_{yj}\beta_{nj}(\rho)] J_1(\tilde{\kappa}\rho) \rho d\rho.$$

В общем случае $\langle H_z \rangle$ зависит от k_x и k_z (при поляризации с $k_y = 0$), поэтому бессмысленно говорить об отрицательной величине μ_{zz} на определенной частоте, как и вообще бессмысленно говорить об одновременно отрицательных ε^{ef} и μ^{ef} : это свойство для определенной модели ИС при заданной частоте может возникнуть только для некоторой области поверхности изочастот. Удобнее при этом пользоваться понятием отрицательной рефракции, для

доказательства которой следует вычислять величину $p = \mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{S}(k_0, \mathbf{k}) \rangle$. Усредненный вектор Пойнтинга получается согласно приведенной выше методике. Величину p можно назвать показателем прямой волны: волна прямая при $p > 0$ и обратная при $p < 0$. Если взять первое приближение

$$\alpha_{nj}(\rho) \approx 4\pi J_1(k_{xn}\rho) J_1(k_{yj}\rho) / (k_{yj}\rho),$$

$$\beta_{nj}(\rho) \approx 2\pi J_0(k_{xn}\rho) J_1(k_{yj}\rho),$$

то даже в этом случае имеем

$$\begin{aligned} I_{\rho nj} \approx 2\pi \int_0^r J_1(k_{yj}\rho) [k_{xn} (J_2(k_{xn}\rho) + J_0(k_{xn}\rho)) + \\ + k_{yj} J_0(k_{xn}\rho)] J_1(\tilde{\kappa}\rho) \rho d\rho. \quad (33) \end{aligned}$$

Эти интегралы надо вычислять численно. Заметим, что как у ε_{zz} , так и у μ_{zz} зависимость от $\varepsilon - \tilde{\varepsilon}$ исчезает из-за сокращения. Однако в формуле (26) есть величины $k^2 - k_{zl}^2 = k_0^2 \varepsilon - (k_z + 2\pi l/a)^2$, которые могут быть отрицательными. Они отрицательные всегда при $\varepsilon < 0$. Полученные выше ряды сходятся, но выяснение вопроса о знаке μ_{zz} требует больших вычислительных затрат, поскольку следует численно определять много членов в двойных рядах от специальных функций. При этом получить асимптотические оценки при больших индексах n и j трудно, поскольку аргументы у функций Бесселя изменяются в широком пределе от малых до больших величин. Указанная трудность связана с цилиндрической конфигурацией задачи. В случае сферических включений [36] имеет место кубический объемноцентрированный ФК. В центре ячейки расположен шарик одного сорта (размера), а по углам куба — шарики другого размера. Но каждый такой шарик принадлежит восьми соседним ячейкам, а элементарной ячейке принадлежит только восьмая часть каждого из шариков в углах. Получается весьма сложная конфигурация. Эта задача также весьма сложна для аналитического исследования, а численный анализ позволяет ответить только на вопрос о структуре полей или о дифракции на конечной структуре ФК. Намного проще решается задача для стержней квадратного сечения, для которых можно получить асимптотические значения рядов и выполнить их суммирование. Вопрос об отрицательной рефракции в ФК существенно проще выясняется построением дисперсионных поверхностей.

Для процедуры усреднения мы использовали исходный вид ИУ, а не (9). В частности, для (26) он следует при действии оператора $-iZ_0(k + k^{-1}\nabla \otimes \nabla)$

на (8). Это возможно, поскольку усреднение приводит к сглаживанию и понижению сингулярности. Это понижение связано с появлением функций sinc. Однако ряды типа (26) все же сходятся не быстро. Для использования (9) необходимо из области интегрирования по штрихованным координатам (при вычислении интегралов типа I_{njl}) выбрасывать малый шар, что неудобно. В случае модели с идеально проводящими частицами поле в них не проникает. Соответственно модель строится на поверхностных ИУ для поверхностной плотности тока [20,21]. В этом случае при усреднении полей следует выкидывать занятую частицей область при усреднении, т.е. при интегрировании по нештрихованным координатам точки наблюдения. Но если задача решена достаточно точно, то поле внутри таких частиц должно отсутствовать или быть очень малым (оно определяется точностью выполнения нулевых граничных условий на поверхности частиц). Обычно размер частиц мал, а эффект такого выбрасывания мал тем более. Для решения ДУ в случае диссипации необходимо вычислять усредненный вектор Пойнтинга $\langle \mathbf{S} \rangle$. Без диссипации он может быть получен путем вычисления полной запасенной в ячейке плотности энергии и групповой скорости: $\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{v}_g (\varepsilon_0 \varepsilon \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \mu_0 \langle \mathbf{H}^2 \rangle) / 4$. В обоих случаях необходимо усреднять величины $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^*$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$, $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$. В них осциллирующие функции, связанные с пространственными гармониками, взаимно уничтожаются, поэтому изначально важно использовать ИУ, не имеющие неинтегрируемых особенностей. В случае диссипации уничтожение комплексных экспонент происходит не полностью: остается множитель $\exp(-2\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})$, говорящий об убывании потока энергии в сторону затухания.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ СМЕШЕНИЯ

Под формулами смешения в обобщенном смысле понимаем соотношения, основанные на теориях типа протекания или перколяции, методе компактных групп и ряде других и определяющие ДП смеси в низкочастотном пределе [9–11, 39]. Часто используются модели или формулы Максвелла (приближение слабого рассеяния) $\varepsilon^{ef} = \tilde{\varepsilon} (1 + 3\delta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) / (2\tilde{\varepsilon} + \varepsilon))$, Гарнетта

$$\varepsilon^{ef} = \tilde{\varepsilon} \frac{\varepsilon(1+2\delta) + 2\tilde{\varepsilon}(1-\delta)}{\varepsilon(1-\delta) + \tilde{\varepsilon}(2+\delta)} \approx \tilde{\varepsilon} \left(1 + \frac{3(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\delta}{\varepsilon + 2\tilde{\varepsilon}} \right), \quad (34)$$

Бруггемана (модель эффективного поля)

$$\delta \frac{\varepsilon - \varepsilon^{ef}}{2\varepsilon^{ef} + \varepsilon} + (1 - \delta) \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^{ef}}{2\varepsilon^{ef} + \tilde{\varepsilon}} = 0 \quad (35)$$

и ряд других. В нашем случае $\delta = \pi r^2 l / a^3$ — концентрация частиц. Приближенное значение в (34) получено при $\delta \ll 1$. Уравнение (35) имеет два решения. Следует брать значение, обладающее требуемым физическим смыслом [9]. Все формулы строго получены для сферических частиц в низкочастотном пределе, но могут быть распространены на эллипсоиды и цилиндры. Так, формула Гарнетта принимает вид

$$\frac{\varepsilon^{ef} - \tilde{\varepsilon}}{L(\varepsilon^{ef} - \tilde{\varepsilon}) + \tilde{\varepsilon}} = \delta \frac{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + L(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})}, \quad (36)$$

а для формулы Бруггемана имеем

$$\delta \frac{\varepsilon^{ef} - \varepsilon}{\varepsilon^{ef} + L(\varepsilon - \varepsilon^{ef})} + (1 - \delta) \frac{\varepsilon^{ef} - \tilde{\varepsilon}}{\varepsilon^{ef} + L(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^{ef})} = 0. \quad (37)$$

Здесь L — факторы (коэффициенты) деполяризации, которые имеют разные значения при разных направлениях поля. Поэтому формулы (36), (37) определяют тензорные эффективные ДП. Для цилиндра $L_{\parallel} = 0$, $L_{\perp} = 1/2$. В случае сферических частиц $L_x = L_y = L_z = 1/3$, и формулы (36), (37) переходят соответственно в (34), (35). Для формулы Гарнетта

$$\varepsilon^{ef} = \tilde{\varepsilon} \left[1 + \delta \frac{(1-L)\varepsilon - \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + L(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})} \right] \left(1 - L\delta \frac{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + L(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})} \right)^{-1}$$

в случае цилиндров имеем

$$\varepsilon_{zz}^{ef} = \tilde{\varepsilon} + \delta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}), \quad \varepsilon_{xx}^{ef} = \tilde{\varepsilon} \left(1 + 2\delta \frac{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}}{\varepsilon + \tilde{\varepsilon}} \right).$$

Для формулы Бруггемана для длинных цилиндров при $L_{\parallel} = 0$ имеем $\varepsilon_{\parallel}^{ef} = \tilde{\varepsilon} + \delta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})$, а при другой поляризации $L_{\perp} = 1/2$ —

$$\varepsilon_{\perp}^{ef} = \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon}{2} (1 - 2\delta) + \sqrt{\frac{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)^2 (1 - 2\delta)^2}{4} + \tilde{\varepsilon}\varepsilon}.$$

При $\delta = 0$ отсюда следует результат $\varepsilon_{\perp}^{ef} = \tilde{\varepsilon}$, соответствующий отсутствию включений, а при малой концентрации δ имеем $\varepsilon_{\perp}^{ef} = \tilde{\varepsilon} [1 + 2\delta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) / (\varepsilon + \tilde{\varepsilon})]$. Таким образом, обе формулы при малом δ дают одинаковые значения ДП. Получаемые на основе гомогенизации результаты в низкочастотном пределе должны правильно соответствовать приведенным формулам смешения. Из них видно, что ДП получает отрицательную добавку, обусловленную влиянием цилиндров, если $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, при этом условием отрицательной $\varepsilon_{\parallel}^{ef}$ является $\varepsilon < -\tilde{\varepsilon}(1 - \delta) / \delta$,

а условием отрицательной ε_{\perp}^{ef} — соответственно $2\delta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})/(\varepsilon + \tilde{\varepsilon}) < -1$. Если $\varepsilon + \tilde{\varepsilon} > 0$, это условие означает, что $\varepsilon < -\tilde{\varepsilon}(1 - 2\delta)/(1 + 2\delta) \approx -\tilde{\varepsilon} + 4\delta\tilde{\varepsilon}$. Если же $\varepsilon + \tilde{\varepsilon} < 0$, то оно означает условие $\varepsilon > -\tilde{\varepsilon}$, которое не может быть выполнено. Таким образом, $\varepsilon_{\parallel}^{ef}$ отрицательна, если отрицательная ДП ε имеет порядок $-\tilde{\varepsilon}/\delta$ и менее. В этом случае $\varepsilon_{\perp}^{ef} > 0$, т. е. имеет место свойство гиперболичности. Для модели Друде – Лоренца без диссипации этому соответствует область низких частот $\omega_c \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + \tilde{\varepsilon}/\delta}$. Для хорошего ГММ должно выполняться условие $\omega_c \ll \omega$, поэтому левая граница неравенства отвечает за то, что ДП можно считать отрицательной, а ее мнимой величиной пренебречь. В области значений $-\tilde{\varepsilon}/\delta < \varepsilon < -\tilde{\varepsilon}(1 - 4\delta)$ возможен другой тип ГММ с $\varepsilon_{\parallel}^{ef} > 0$ и $\varepsilon_{\perp}^{ef} < 0$. Ему соответствует область частот

$$-\frac{\tilde{\varepsilon}}{\delta} < \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < -\tilde{\varepsilon}(1 - 4\delta),$$

т. е.

$$\frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_L + \tilde{\varepsilon}/\delta}} < \omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_L + \tilde{\varepsilon}(1 - 4\delta)}}.$$

Можно уточнить эти области существования ГММ при учете потерь, исходя из соотношений $\varepsilon_{\parallel}^{ef}\varepsilon_{\perp}^{ef} < 0$. Результаты верны при $r \ll l$, а также и для двумерно-периодического ГММ в виде бесконечно длинных проволочек. В этом случае $\delta = \pi r^2/a^2 \ll 1$.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные результаты получим с учетом и без учета диссипации. Не составляет особого труда вычислить $\langle \mathbf{S} \rangle$. Чтобы этого не делать, положим сначала $k_z'' = 0$ (т. е. пренебрежем диссипацией волны в направлении вдоль z), что вполне оправдано. Тогда задаем k'_{\perp} , θ и определяем $k_z = k'_z = k'_{\perp}/\text{tg}\theta$. Из ИУ (20) получаем квадратичный функционал $\Omega(E_z)$ (31), в котором в силу однородности положено $E_0 = 1$. Выше из условия стационарности мы нашли E_1 . Подставляя его в $\Omega(E_z)$, получаем ДУ в виде $\Omega(\mathbf{k}, k_0) = 0$. Полагая $k_y = 0$, найдем связь между k_x , k_z и k_0 . Имеем $k_{xn} = k'_x - ik''_x + 2n\pi/a$, $k_{yl} = 2l\pi/a$, $k_{zm} = k'_z/\text{tg}\theta + 2m\pi/a$. Полагая $k''_x = 0$ и двигаясь по линии Γ -X, из уравнения $\text{Re}(\Omega(\mathbf{k}', k_0)) = 0$ определяем k_0 . Затем из уравнения $\text{Im}(\Omega(\mathbf{k}, k_0)) = 0$ определяем k''_x . После этого из уравнения $\text{Re}(\Omega(\mathbf{k}, k_0)) = 0$ определяем уточненное значение k_0 . Теперь из уравнения $\text{Im}(\Omega(\mathbf{k}, k_0)) = 0$ можно определить k''_z . Итерационный процесс можно продолжать. Как показали расчеты, при малой

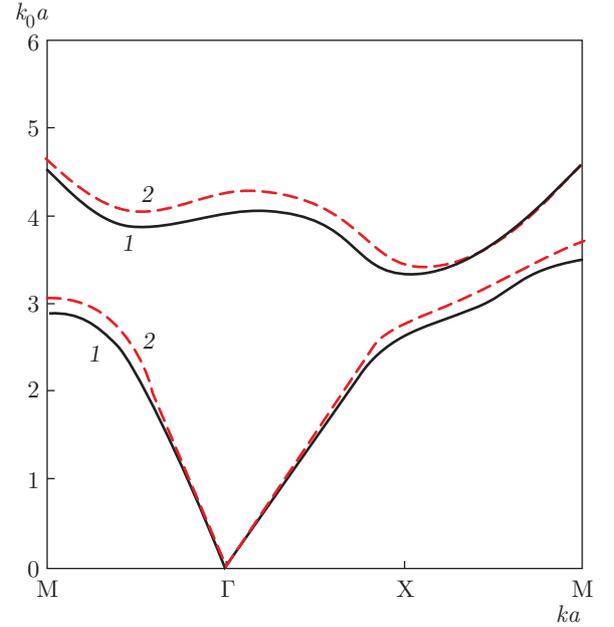


Рис. 3. Зонная диаграмма ФК из металлических стержней с $\omega_p = 2.8 \cdot 10^{16}$ Гц, $\varepsilon_L = 10$, $\tilde{\varepsilon} = 1$, $l/a = 0.7$, $r/a = 0.05$, $a = b = 500$ нм без диссипации ($\omega_c = 0$) при разных числах базисных функций $2M + 1$, $N = 0$ в (17) и разных значениях учтенных членов $2K + 1$ в каждой из сумм ядер ИУ (20). Кривой 1 соответствует $M = 7$, $K = 20$, кривой 2 — $M = 1$, $K = 10$

диссипации достаточно одной итерации, а при существенной диссипации — двух или трех. Вместо поиска k''_z можно положить $k''_z = -\text{Im}\left(k_0\sqrt{\varepsilon_{\perp}^{ef}}\right)$, где ε_{\perp}^{ef} получена гомогенизацией по Гарнетту. При движении по линии X–M поступаем так же: фиксируем k_x , полагаем $k''_y = 0$, находим k_0 , k_y , k''_z . Указанная процедура возможна при любых углах θ , что позволило перейти от зонной структуры трехмерного ФК к структуре двумерного ФК.

На рис. 2 и 3 представлены результаты решения ДУ. Все интегралы берутся аналитически, поэтому ДУ можно представить в виде быстро сходящегося тройного ряда, который можно асимптотически просуммировать по двум индексам. Дисперсия представлена в области (Γ , X) (рис. 2) для кубической решетки ($b = a$) без диссипации ($\omega_c = 0$) и при $\omega_c = 10^{14}$ Гц. В начале находились действительные корни, которые затем уточнялись путем итераций при включении потерь [31]. Заметим, что при этом условии в области $\omega \ll \omega_p$ поле внутри штырей затухает по направлению к их центру. На сверхнизких частотах в реальном металле выполнено условие $\omega \ll \omega_c$, и ДП уже не отрицательная, а мнимая и большая по модулю. При нормальном скин-эффекте

глубина проникновения δ большая ($\delta \sim \sqrt{\lambda}$), но в силу условия $|\varepsilon| \gg 1$ электрическим полем внутри штгря при усреднении можно пренебречь. Если $\delta \ll r_0$, то можно использовать поверхностное импедансное ИУ, однако при глубине проникновения порядка r оно может иметь большую погрешность. Сложность моделирования наноразмерных объектов связана и с тем, что в результате баллистического транспорта носителей изменяются частоты ω_c и ω_p . Последняя связана с числом мод проводимости и для квантовой нити является ступенчатой функцией r_0 . В области $\omega \ll \omega_c$ можно также использовать поверхностное ИУ с условием идеально проводящей границы.

Учет большого числа членов в соотношениях (17) и в аналогичных соотношениях для других компонент позволяет получать более точные ИУ и результаты. Однако на дисперсию на низких частотах это влияет слабо (рис. 3), как и на дипольные моменты. В основном это влияет на высшие дисперсионные ветви. В качестве алгоритма удобнее всего вместо представлений типа (17) и аналитического вычисления функций Бесселя использовать универсальное вычисление интегралов по квадратурным формулам. На рис. 3 приведены результаты сходимости алгоритма при использовании разложения (17), построенные в зоне Бриллюэна М–Г–Х–М.

На рис. 4 приведены результаты гомогенизации по формулам смещения Гарнетта. Эти результаты являются точными при $k_0 a \ll 1$, но их точность ухудшается с ростом параметра $k_0 a$ (заметим, что для $b > a$ точность определяется только этим параметром). При определении тензора эффективной ДП при произвольных частотах и волновых векторах его следует связывать с конкретной точкой дисперсионной поверхности, т. е. с k_0 и \mathbf{k}' , что соответствует частотной дисперсии и ПД.

Рассмотрим основную низшую по частоте дисперсионную ветвь в первой зоне Бриллюэна и получим условия, при которых возникает ГММ из ФК, если модель основана на уравнении Френеля и ДУ. Для простоты рассмотрим ФК без диссипации. При $k_x = 0$ или $\theta = 0$ имеем $k_z^2/\varepsilon_{xx} = k_0^2 \tilde{\varepsilon}$. Ясно, что для действительных k_z всегда $\varepsilon_{xx} > 0$. При $k_z = 0$ или $\theta = \pm\pi/2$ имеем $k_x^2/\varepsilon_{zz} = k_0^2 \tilde{\varepsilon}$. Здесь также $\varepsilon_{zz} > 0$, если $k_x^2 > 0$. Но может быть и $k_x^2 < 0$. Это условие возникает в запрещенных зонах (band gap) ФК, где действительных решений нет, а k_x мнимые (волны затухают). Этот случай неинтересен, поскольку не позволяет получать большие по модулю значения компонент \mathbf{k} . В общем случае $k_x = k_z \operatorname{tg} \theta$ и $k_z^2[\varepsilon_{zz}^{-1} \operatorname{tg}^2 \theta + \varepsilon_{xx}^{-1}] = k_0^2 \tilde{\varepsilon}$. Пусть $\varepsilon_{xx} > 0$. Найдем усло-

вие, когда $\varepsilon_{zz} < 0$:

$$\varepsilon_{zz}^{-1} = (k_0^2 \tilde{\varepsilon}/k_z^2 - \varepsilon_{xx}^{-1}) / \operatorname{tg}^2 \theta < 0.$$

Оно заключается в том, что $n_z^{-2} = k_0^2 \tilde{\varepsilon}/k_z^2 < \varepsilon_{xx}^{-1}$, где $n_z > \sqrt{\varepsilon_{xx}}$ — коэффициент замедления вдоль оси, и может выполняться в некотором диапазоне углов. Это значит, что идущий вдоль оси плазмон-поляритон должен быть достаточно медленным. Для получения точных границ гиперболичности нужно знать $\varepsilon_{xx}(k_0, k_z, \theta)$. Если пренебречь ПД, то $k_z^2 > k_0^2 \tilde{\varepsilon}/\varepsilon_{xx}(k_0)$. В любом случае ДУ вида $k_0^2 = c^{-2} \omega^2(k_z \operatorname{tg} \theta, k_z)$ при подстановке в это условие позволяет определить область углов, для которых имеет место ГММ. Соответствующие результаты приведены на рис. 5. При $\theta = \pi/2$ на ветви Г–Х всегда $\varepsilon'_{zz} > 0$. В области углов $\pi/4 < \theta < \pi/2$ возможны узкие резонансные частотные интервалы с $\varepsilon'_{zz} < 0$ и $|\varepsilon'_{zz}| \gg 1$. Нерезонансные отрицательные значения возникают при $0 < \theta < \pi/4$.

На рис. 6 приведена гомогенизация на основе уравнения Френеля и получения $\varepsilon_{xx}(k_0)$ и $\varepsilon_{zz}(k_0)$ по формуле Гарнетта. Принципиально результаты при малых $k_0 a$ и $|\mathbf{k}a|$ почти не различаются, если ε_{zz} получена на основе гомогенизации методом усреднения (21), однако это требует существенных вычислительных затрат. В области $k_0 a < 1$ для $\varepsilon_{zz}(k_0, \mathbf{k})$ метод усреднения дает отрицательные значения, тогда как гомогенизация для μ_{zz} в области $k_0 a < 1$ на основе ИУ (24) и усреднения компоненты (25) приводит к значениям, близким к единице. На рис. 7 построены поверхности изочастот при малых $k_0 a$ при гомогенизации по Гарнетту.

7. ВЫВОДЫ

На основе решения объемных ИУ и гомогенизации исследована дисперсия в одноосном ФК из длинных цилиндрических включений в диэлектрическую основу и возможность наблюдения гиперболической дисперсии в соответствующем гомогенизованном метаматериале. Акцентировано внимание на неоднозначности гомогенизации в резонансной области при ПД. Рассмотрены как металлические цилиндры (проволочки), так и диэлектрические цилиндры. Показано, что такой металлический ГММ возможен в низкочастотном пределе без учета ПД ($k_0 \ll |\mathbf{k}| \rightarrow 0$), при этом, однако, нельзя получить неограниченные значения $|\mathbf{k}|$. Указанный предел предполагает выполнение условия малости диссипации $\omega_c \ll \omega$, что может быть достигнуто при сверхнизких температурах. В резонансной области при ПД условие гиперболичности $\varepsilon'_{\parallel} \varepsilon'_{\perp} < 0$ и

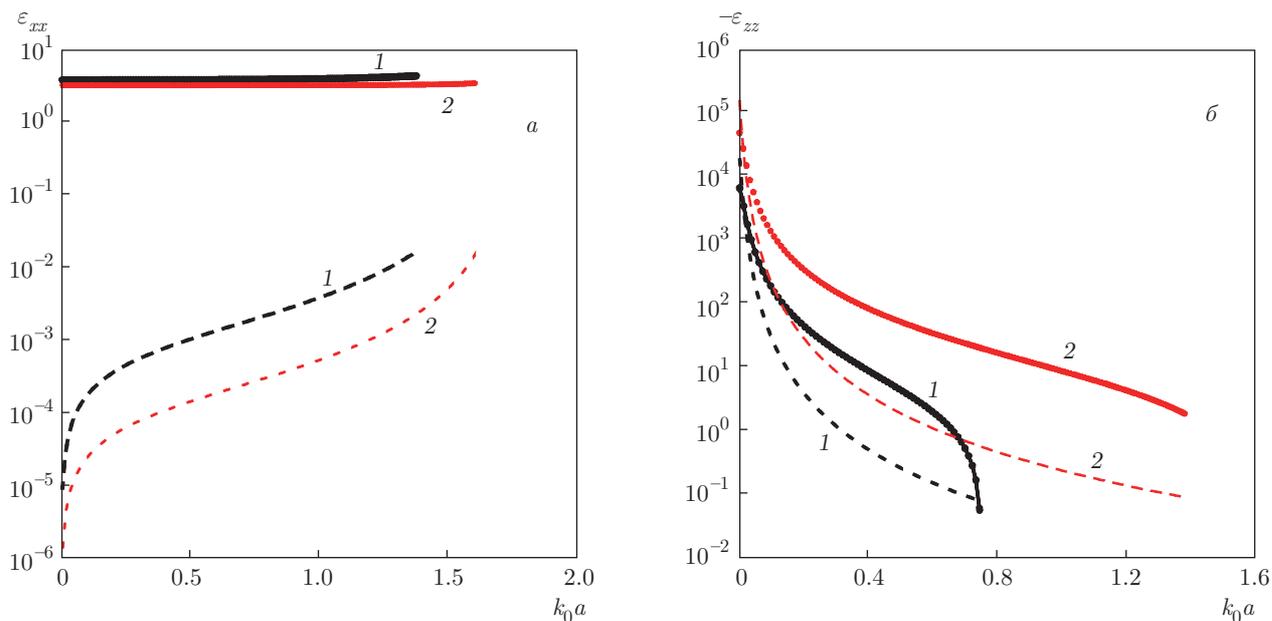


Рис. 4. Действительные значения ϵ'_{xx} и $-\epsilon'_{zz}$ (сплошные кривые) и отрицательные мнимые части ϵ''_{xx} , ϵ''_{zz} (штриховые кривые) для ϵ_{xx} (а) и ϵ_{zz} (б) при гомогенизации на основе формулы Гарнетта: $r/a = 0.1$, $l/b = 0.5$ (кривые 1); $r/a = 0.2$, $l/b = 0.9$ (кривые 2). Использованы параметры $a = b = 100$ нм, $\omega_p = 1.9 \cdot 10^{16}$, $\omega_c = 5 \cdot 10^{13}$ Гц, $\epsilon_L = 10$, $\tilde{\epsilon} = 3$

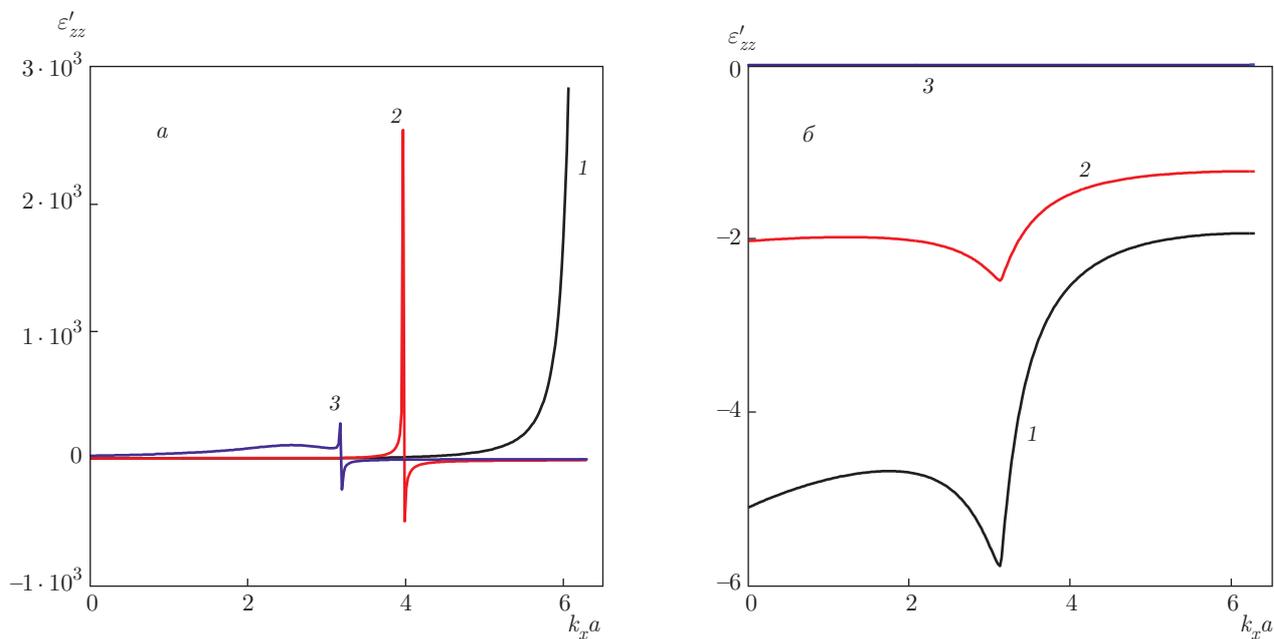


Рис. 5. Гомогенизация ϵ'_{zz} на основе уравнения Френеля и ДУ при движении вдоль нижней дисперсионной ветви по кривым А–D (рис. 2) при больших (а) и малых (б) углах. Величина ϵ_{\perp} получена гомогенизацией по Гарнетту. На рис. 5а $\theta = \pi/2$ (1), $\pi/3$ (2), $\pi/4$ (3). На рис. 5б $\theta = \pi/5$ (1), $\pi/6$ (2), $\pi/100$ (3)

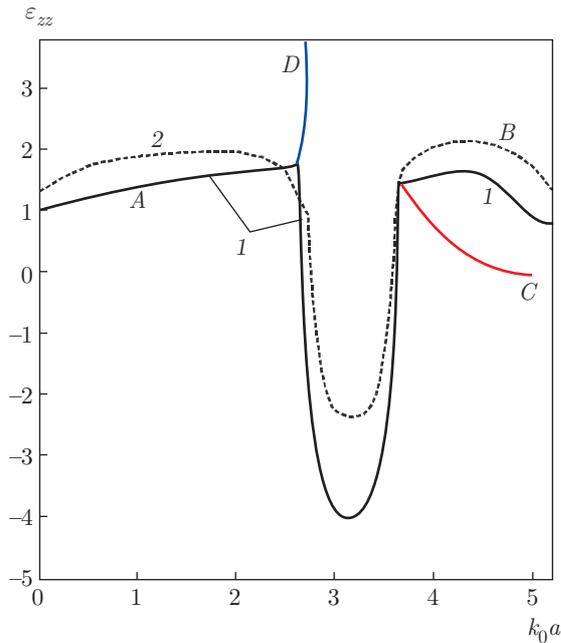


Рис. 6. Гомогенизация ε_{zz} на основе уравнения Френеля при $\theta = \pi/2$ для $a = b = 100$ нм, $l/a = 0.7$, $r/a = 0.1$ без диссипации (кривая 1) и с диссипацией $\omega_c = 10^{14}$ Гц (кривая 2) при движении по ветвям A–B (рис. 2) через запрещенную зону. Кривая C соответствует переходу через запрещенную зону на ветвь C, кривая D соответствует движению по нижней ветви A–B без перехода через запрещенную зону, $\omega_p = 2 \cdot 10^{16}$ Гц

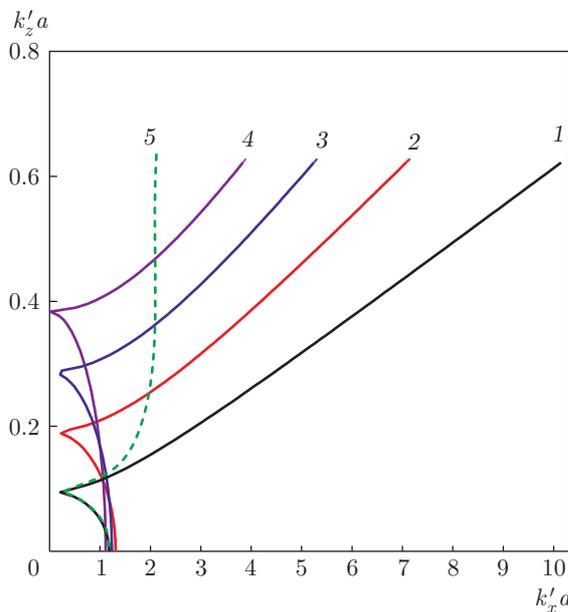


Рис. 7. Сечение поверхностей изочастот (первый октант) для гомогенизации по Гарнетту (кривые 1–4) и на основе усреднения (5): $k_0 a = 0.05$ (1, 5), 0.1 (2), 0.15 (3), 0.2 (4)

условие $k_0 \ll |\mathbf{k}|$ также достижимы, но первое зависит от метода гомогенизации, а поверхность изочастот не является гиперboloидом вращения. Поэтому ГММ следует рассматривать как ИС с выполнением условия $k_0 \ll |\mathbf{k}|$. Диссипация и ПД ограничивают $|\mathbf{k}|$. Полностью диэлектрический ГММ возможен в резонансной области, при этом нужна высокая ДП со слабой диссипацией. ГММ лучше определять по условию $k_0 \ll |\mathbf{k}|$, чем по условию $\varepsilon'_{\parallel} \varepsilon'_{\perp} < 0$, поскольку последнее не однозначно. В ФК имеют место медленные блоховские волны ($k_0 \ll |\mathbf{k}|$), определяемые ДУ, что обуславливает гиперболичность. Однако важно получение этого условия в первой зоне Бриллюэна. Одноосный диэлектрический ФК с наведенным магнетизмом (магнитный ГММ), в принципе, возможен в резонансной области при включениях в виде тонких диэлектрических торов и дисков (цилиндров). Он описывается как μ_{zz} , так и ε_{zz} . Однако он с успехом может быть описан одним тензором эффективной ДП. Для увеличения магнитной поляризации P_z^m по сравнению с электрической P_z^e следует брать $b \ll a$ и $l \ll r$, а для диэлектрических торов налагать условие $r \ll R$ на их радиусы. Такие включения создают кольцевые токи поляризации и эквивалентны магнитным диполям. В этом смысле диэлектрические шары не являются удачными метатоматами. Даже при кубической решетке в области ПД такой метаматериал из шаров не является изотропным.

Показано также, что возникновение гиперболичности при гомогенизации на основе уравнения Френеля обусловлено распространением медленного в направлении оси плазмон-поляритона, при этом это свойство у ФК возникает в некоторой области углов распространения волны относительно оси и зависит как от частоты, так и от компонент волнового вектора, т. е. определяется частотной дисперсией и ПД. Это свойство также зависит от других уравнений, использованных при гомогенизации. Если при этом используется ДУ, то без диссипации в запрещенной зоне при мнимом значении k_{\perp} возникает условие $\varepsilon_{\parallel} < 0$, не приводящее к большим значениям $|\mathbf{k}|$.

Исследовано влияние диссипации и ПД на свойства ГММ. Диссипация в ФК приводит к смыканию прямых верхних и нижних и обратных верхних и нижних дисперсионных ветвей, показанных на рис. 2. Потери ограничивают гиперболичность и приводят к замкнутой поверхности изочастот у гомогенизированного метаматериала. ПД также ограничивает максимальные значения $|\mathbf{k}|$ в уравнении Френеля. Тем не менее принципиально возможно получение ГММ с большими

по модулю компонентами волновых векторов по сравнению с k_0 . Для этого, в частности, следует использовать сверхнизкие температуры, или ГММ из диэлектрических структур, углеродных нанотрубок, графеновых листов или полосок, что может составить предмет отдельного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности № 3.1155.2014/К, а также Российского научного фонда (проект № 16-19-10033).

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Guo, W. Newman, C. L. Cortes et al., *Adv. Optoelectron.* **2012**, ID452502 (2012).
2. P. Shekhar, J. Atkinson, and J. Zubin, *Nano Convergence* **1**, 14 (2014).
3. П. А. Белов, К. Р. Симовский, С. А. Третьяков, *Радиотехн. и электрон.* **49**, 1285 (2004).
4. C. R. Simovski and B. Sauviac, *Radio Sci.* **39**, RS2014 (2004).
5. К. Р. Симовский, *Опт. и спектр.* **107**, 766 (2009).
6. C. R. Simovski, *J. Opt.* **13**, 013001 (2011).
7. М. В. Давидович, *Изв. Саратовского ун-в., сер. физика* **11**(1), 42 (2011).
8. A. L. Pokrovsky and A. L. Efros, *Sol. St. Comm.* **125**, 283 (2002).
9. А. П. Виноградов, А. В. Дорофеенко, С. Зухди, *УФН* **178**, 511 (2008).
10. А. П. Виноградов, *Электродинамика композитных материалов*, Эдиториал УРСС, Москва (2001).
11. А. П. Виноградов, *УФН* **172**, 363 (2002).
12. В. М. Агранович, *УФН* **174**, 683 (2004).
13. В. М. Агранович, Ю. Н. Гартштейн, *УФН* **176**, 1051 (2006).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
15. L. Lewin, *Proc. Inst. Electr. Eng.* **94**, Part III, 65 (1947).
16. Л. Левин, *Современная теория волноводов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954).
17. М. В. Давидович, *ЖЭТФ* **160**, 1069 (2016).
18. P. Belov, S. Tretyakov, and A. Vitanen, *Electromagn. Waves Appl.* **16**, 1153 (2002).
19. C. R. Simovski, P. A. Belov, A. V. Atrashchenko, and Y. S. Kivshar, *Adv. Mater.* **24**, 4229 (2012).
20. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, *ЖТФ* **82**(12), 79 (2012).
21. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, П. А. Шиловский, *ЖТФ* **82**(3), 7 (2012).
22. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, Физматлит, Москва (2009).
23. Л. Новотный, Б. Херхт, *Основы нанооптики*, Физматлит, Москва (2009).
24. М. В. Давидович, *КЭ* **47**, 567 (2017).
25. C. Müller, *Foundation of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer-Verlag, Berlin (1969).
26. Н. А. Хижняк, *Интегральные уравнения макроскопической электродинамики*, Наукова думка, Киев (1986).
27. *Вычислительные методы в электродинамике*, под ред. Р. Митры, Мир, Москва (1977).
28. М. В. Давидович, *Изв. вузов, радиофизика* **49**, 150 (2006).
29. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, *Изв. вузов, радиофизика* **53**, 296 (2010).
30. М. В. Давидович, *Наукоемкие технологии* **17**(5), 8 (2016).
31. М. В. Давидович, *Итерационные методы решения задач электродинамики*, Изд-во Сарат. ун-в., Саратов (2014).
32. M. Gastine, L. Courtois, and J. L. Dormann, *IEEE Trans. MTT*-**15**(12), 694 (1967).
33. М. В. Давидович, И. С. Нефедов, *ЖЭТФ* **145**, 771 (2014).
34. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, *Возбуждение электромагнитных волн*, Радио и связь, Москва (1983).

35. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, Гетеромагнитная электроника **13**, 45 (2012).
36. И. Б. Вендик, О. Г. Вендик, М. С. Гашинова, Письма в ЖТФ **32**(10), 30 (2006).
37. I. Vendik, O. Vendik, I. Kolmakov, and M. Odit, *Ortho-Electron. Rev.* **14**(3), 179 (2006).
38. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1962).
39. А. И. Ефимова, Л. А. Головань, П. К. Кашкаров, В. М. Сенявин, В. Ю. Тимошенко, *Инфракрасная спектроскопия систем пониженной размерности*, Лань, Санкт-Петербург (2016).