

# ОРИЕНТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ФЕРРОНЕМАТИЧЕСКОМ ЖИДКОМ КРИСТАЛЛЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Д. В. Макаров, М. А. Уткин, А. Н. Захлевных\**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 18 декабря 2017 г.

В рамках континуальной теории изучена индуцированная магнитным полем ориентационная структура в слое ферронематического жидкого кристалла. Проведен расчет углов поворота директора и намагниченности, концентрации магнитной примеси, отвечающих сверхзакрученной ориентационной структуре суспензии. Показано, что зависимость угла отклонения директора от направления ориентации внешнего поля имеет гистерезисную область, в которой происходит скачкообразное изменение ориентационной структуры ферронематика из состояния с положительным кручением директора в состояние с отрицательным кручением. Найдена напряженность магнитного поля, превышение которой приводит к появлению областей ориентационной бистабильности. Показано, что наиболее отчетливо эффект ориентационной неустойчивости при повороте поля проявляется в ферронематиках с сильным сцеплением частиц с жидкокристаллической матрицей. Установлено, что эффект магнитной сегрегации, вызывающий перераспределение магнитных частиц в слое, приводит к расширению гистерезисной области и уменьшению поля, при котором появляется ориентационная бистабильность. Показано, что в ферронематиках с мягким сцеплением между магнитной и жидкокристаллической подсистемами имеется несколько режимов отклика на квазистатический поворот магнитного поля.

DOI: 10.7868/S0044451018060172

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается большой интерес к композитным средам на основе жидких кристаллов (ЖК) [1, 2]. Это обусловлено высокой чувствительностью ЖК к внешним механическим, электромагнитным, акустическим и температурным полям. Наличие спонтанного ориентационного порядка в расположении молекул ЖК позволяет ориентировать внедренные в них анизотричные частицы. Особый интерес представляют ЖК-композиты с сегнетоэлектрическими или ферромагнитными частицами [1].

Суспензии анизотричных ферромагнитных частиц, в которых роль несущей среды играет нематический жидкий кристалл (НЖК), называют ферронематиками (ФН) [3]. В таких системах за счет сцепления молекулы ЖК с поверхностью магнитных частиц имеется возможность

создать ориентационную связь между магнитной и ЖК-подсистемами, вследствие чего начальная магнитная восприимчивость суспензии повышается на несколько порядков по сравнению с чистым нематиком [4–9].

Для теоретического описания равновесных искажений ориентационной структуры ФН в работе [3] был предложен континуальный подход для случая сильного сцепления между феррочастицами и ЖК-матрицей, который был впоследствии обобщен на случай мягкого (конечного) сцепления в работах [5, 10].

В ЖК ориентация директора в магнитном поле обусловлена анизотропией диамагнитной восприимчивости (квадрупольный механизм). В ФН магнитное поле действует не только на ЖК-матрицу, но и на магнитные моменты феррочастиц (дипольный механизм), что, благодаря ориентационному сцеплению феррочастиц с молекулами ЖК, приводит к деформации ориентационной структуры ФН [3, 4, 6, 11]. Дипольный механизм линеен по полю и обуславливает поведение ФН в слабых полях.

\* E-mail: anz@psu.ru

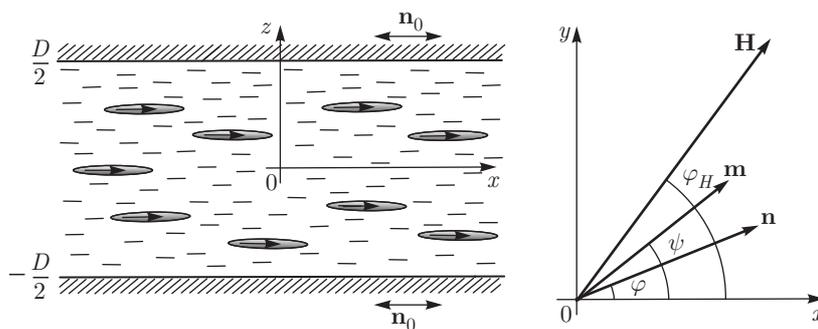


Рис. 1. Слой ФН в магнитном поле

Значительный интерес представляют исследования индуцированной внешними полями ориентационной бистабильности ЖК и ЖК-композитов. Речь идет о явлениях перехода между различными состояниями, сопровождающихся скачкообразными изменениями ориентации директора. Поскольку в ЖК-среде директор задает направление оптической оси, такая ориентационная неустойчивость проявляется как оптическая бистабильность.

Ориентационная неустойчивость в НЖК и магнитных суспензиях в магнитном поле может быть вызвана бистабильным сцеплением директора с границами слоя, при котором энергия сцепления ЖК с поверхностью допускает наличие двух (или нескольких) минимумов с различными ориентацией директора [12–18], сверхкручением граничных поверхностей и вращением магнитного поля [19–24].

Диспергирование магнитных частиц в ЖК добавляет другие причины бистабильных явлений. Одна из них обусловлена специфическим для ФН эффектом сегрегации [9, 25–28], другая связана с конкуренцией ориентационных механизмов влияния поля на ФН [26, 29], а также бистабильным сцеплением магнитных частиц с ЖК-матрицей [10, 30, 31].

В настоящей работе исследуются индуцированные поворотом магнитного поля ориентационные явления в ФН с планарными условиями сцепления между директором нематика и намагниченностью суспензии. Внимание уделено теоретическому описанию ориентационных неустойчивостей закрученной магнитным полем ориентационной структуры ФН и выяснению роли магнитной примеси в создании ориентационной бистабильности.

## 2. УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим слой ферронематического ЖК толщиной  $D$ . Поместим начало системы координат в се-

редину слоя, ось  $x$  направим вдоль ограничивающих пластин, а ось  $z$  — ортогонально слою (рис. 1). Приложим к ФН внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{H} = H(\cos \varphi_H, \sin \varphi_H, 0)$  в плоскости слоя под углом  $\varphi_H$  к оси легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$ .

Будем полагать, что на границах слоя имеется жесткое планарное сцепление директора  $\mathbf{n}$  и ось легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$  направлена вдоль оси  $x$ . Сцепление магнитных частиц с ЖК будем считать мягким и планарным, т.е. в отсутствие поля  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$ . Здесь единичный вектор  $\mathbf{n}$ , называемый директором, характеризует направление преимущественной ориентации молекул ЖК,  $\mathbf{m}$  — единичный вектор намагниченности суспензии.

Будем полагать ФН намагниченным, т.е. полученным путем охлаждения из изотропной фазы в упорядоченную в подмагничивающем поле, ориентирующим магнитные частицы в ЖК-матрице. Эта ориентация анизометричных магнитных частиц сохраняется в ЖК-матрице после выключения поля [11, 28], поэтому в отсутствие поля директор и магнитные частицы однородно ориентированы в направлении  $\mathbf{n}_0$ . Включение магнитного поля под углом  $\varphi_H$  к направлению легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$  вызывает поворот магнитных частиц в направлении поля. Вследствие ориентационной связи между длинными осями вытянутых частиц и директором возникают ориентационные искажения в слое ФН. В рамках континуальной теории равновесная ориентационная структура ФН определяется из условия минимума полной свободной энергии  $\mathcal{F} = \int F dV$ , где объемная плотность свободной энергии  $F$  содержит следующие вклады [3, 5]:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5,$$

$$F_1 = \frac{1}{2} [K_{11}(\text{div } \mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})^2 + K_{33}(\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2],$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= -\frac{\chi_a}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2, \\
F_3 &= -M_S f \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}, \\
F_4 &= -\frac{w}{d} f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2, \\
F_5 &= \frac{k_B T}{v} f \ln f.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$  — модули ориентационной упругости (константы Франка),  $\chi_a$  — анизотропия диамагнитной восприимчивости НЖК, которую будем считать положительной,  $M_S$  — намагниченность насыщения материала феррочастиц,  $f$  — локальная объемная доля магнитных частиц в суспензии,  $d$  — поперечный диаметр феррочастицы,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $v$  — объем феррочастицы,  $w > 0$  — поверхностная плотность энергии сцепления молекул НЖК с поверхностью магнитных частиц (в отсутствие внешних полей минимуму свободной энергии отвечает ориентация, при которой директор параллелен намагниченности). Слагаемое  $F_1$  в выражении (1) представляет собой объемную плотность энергии ориентационно-упругих деформаций директора, известную как потенциал Озеена–Франка. Диамагнитный вклад  $F_2$  отвечает взаимодействию магнитного поля с НЖК. Будем полагать  $\chi_a > 0$ , в этом случае директор  $\mathbf{n}$  стремится ориентироваться вдоль приложенного магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Слагаемое  $F_3$  — объемная плотность энергии взаимодействия магнитного поля с магнитными моментами феррочастиц (дипольный вклад); слагаемое  $F_4$  — плотность энергии ориентационного сцепления магнитных частиц с ЖК [5]. Поверхностную плотность энергии сцепления  $w$  будем считать положительной, так что в отсутствие внешнего поля минимуму свободной энергии (1) отвечает однородная ориентационная структура ФН с  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \parallel \mathbf{n}_0$ . Объемную долю частиц в суспензии  $f$  полагаем малой, что позволяет пренебречь магнитными диполь-дипольными взаимодействиями частиц. Слагаемое  $F_5$  отвечает вкладу энтропии смешения «идеального газа» феррочастиц в суспензии.

Для рассматриваемой геометрии (рис. 1) директор  $\mathbf{n}$  и единичный вектор намагниченности  $\mathbf{m}$  будем искать в виде

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z), \sin \varphi(z), 0], \tag{2}$$

$$\mathbf{m} = [\cos \psi(z), \sin \psi(z), 0]. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$\begin{aligned}
F &= \frac{K_{22}}{2} \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{\chi_a}{2} H^2 \cos^2(\varphi - \varphi_H) - \\
&\quad - M_S f H \cos(\psi - \varphi_H) - \frac{w}{d} f \cos^2(\varphi - \psi) + \\
&\quad \quad \quad + \frac{k_B T}{v} f \ln f.
\end{aligned} \tag{4}$$

Выбирая в качестве единицы длины толщину слоя  $D$ , представим безразмерную плотность свободной энергии  $\tilde{F} = FD^2/K_{22}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 - \frac{h^2}{2} \cos^2(\varphi - \varphi_H) - \\
&\quad - bhg(\zeta) \cos(\psi - \varphi_H) - \sigma \cos^2(\varphi - \psi) + \\
&\quad \quad \quad + \kappa g(\zeta) \ln g(\zeta),
\end{aligned} \tag{5}$$

где введены безразмерные величины

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{z}{D}, \quad h = HD \sqrt{\frac{\chi_a}{K_{22}}}, \quad b = \frac{D\bar{f}M_S}{\sqrt{K_{22}\chi_a}}, \\
\sigma &= \frac{w\bar{f}D^2}{K_{22}d}, \quad \kappa = \frac{k_B T \bar{f} D^2}{vK_{22}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $\zeta$  — безразмерная координата,  $h$  — безразмерная напряженность магнитного поля, в качестве единицы измерения которого выбрана величина  $H_q = D^{-1} \sqrt{K_{22}/\chi_a}$  (при  $H \approx H_q$  упругий  $F_1$  и диамагнитный  $F_2$  вклады в свободную энергию становятся одного порядка). Это характерное поле имеет порядок поля перехода Фредерикса в чистом ЖК [32]. Сопоставление упругого  $F_1$  и дипольного магнитного  $F_3$  вкладов приводит к другому характерному полю  $H_d = K_{22}/D^2 M_S \bar{f}$ . Параметр  $b = H_q/H_d$  характеризует механизм воздействия магнитного поля на ФН [26]. При  $b > 1$  искажения ориентационной структуры осуществляются преимущественно дипольным механизмом (воздействие поля на феррочастицы), при  $b < 1$  — квадрупольным механизмом (воздействие поля на ЖК-матрицу). Параметр  $\sigma$  является безразмерной энергией сцепления магнитных частиц с ЖК-матрицей,  $\kappa$  — сегрегационный параметр [3], определяемый квадратом отношения толщины слоя и сегрегационной длины  $\sqrt{vK_{22}/k_B T \bar{f}}$ , задающей характерный масштаб расслоения суспензии. Кроме того, в выражении (5) введена приведенная объемная доля магнитных частиц  $g(\zeta) = f(\zeta)/\bar{f}$ , где  $\bar{f} = Nv/V$  — средняя объемная доля магнитных частиц в ферронематике,  $N$  — число феррочастиц,  $V$  — объем образца ФН. Заметим, что при однородном распределении частиц по слою  $f(\zeta) = \bar{f}$ .

Равновесное состояние ФН определяется из условий минимума его полной свободной энергии  $\mathcal{F} =$

=  $\int F dV$ , которая в безразмерной форме принимает вид

$$\tilde{F} = \mathcal{F} \frac{D^2}{VK_{22}} = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{F}[\varphi(\zeta), \psi(\zeta), g(\zeta)] d\zeta. \quad (7)$$

Минимизируя функционал (7) по углам  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , получаем

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} - \frac{1}{2}h^2 \sin 2(\varphi - \varphi_H) - \sigma g(\zeta) \sin 2(\varphi - \psi) = 0, \quad (8)$$

$$bh \sin(\psi - \varphi_H) - \sigma \sin 2(\varphi - \psi) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9), называемое уравнением связи [11], определяет взаимную ориентацию директора и намагниченности в ФН.

Принимая во внимание условие постоянства числа магнитных частиц в слое,  $\int f dV = Nv$ , или

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(\zeta) d\zeta = 1, \quad (10)$$

после минимизации свободной энергии (7) по  $g(\zeta)$  получаем концентрационное распределение магнитных частиц в слое ФН:

$$g(\zeta) = Q \exp \left\{ \frac{bh}{\kappa} \cos(\psi - \varphi_H) + \frac{\sigma}{\kappa} \cos^2(\varphi - \psi) \right\}, \quad (11)$$

где

$$Q^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ \frac{bh}{\kappa} \cos(\psi - \varphi_H) + \frac{\sigma}{\kappa} \cos^2(\varphi - \psi) \right\} d\zeta.$$

Выражение (11) описывает известный в физике ФН эффект сегрегации магнитной примеси [3]: в однородном магнитном поле феррочастицы аккумулируются в тех местах образца, где минимальна сумма их магнитной энергии  $F_3$  и ориентационной энергии  $F_4$  в ЖК-матрице.

Выделим в уравнении (8) полный дифференциал:

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_H) + 2\kappa g \right] = 0. \quad (12)$$

В силу симметричных граничных условий угол отклонения директора в середине слоя максимален, т. е.  $(d\varphi/d\zeta)|_{\zeta=0} = 0$ . Это позволяет найти константу интегрирования и записать первый интеграл уравнения (12):

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \pm \sqrt{A(\varphi, \psi)}, \quad (13)$$

$$A(\varphi, \psi) = \frac{h^2}{2} [\cos 2(\varphi_0 - \varphi_H) - \cos 2(\varphi - \varphi_H)] + 2\kappa(g_0 - g).$$

Здесь введены обозначения  $g_0 \equiv g(\varphi_0, \psi_0)$ ,  $\varphi_0 \equiv \varphi(0)$ ,  $\psi_0 \equiv \psi(0)$  для объемной доли и углов ориентации ФН в центре слоя. В уравнении (13) верхний знак отвечает отрицательному кручению ( $\varphi_0 < 0$ ) директора, т. е. вращению по часовой стрелке, а нижний знак — положительному ( $\varphi_0 > 0$ ) кручению директора (вращению против часовой стрелки) для верхней половины слоя ( $\zeta > 0$ ).

Интегрируя уравнение (13) для  $\zeta > 0$  с условиями жесткого планарного сцепления директора с границами слоя,

$$\varphi(1/2) = \varphi(-1/2) = 0,$$

получаем

$$\pm \int_0^{\varphi(\zeta)} \frac{d\varphi}{\sqrt{A(\varphi, \psi)}} = \frac{1}{2} - \zeta. \quad (14)$$

Верхний знак в этом уравнении отвечает теперь положительному кручению ( $\varphi_0 > 0$ ) директора, нижний знак — отрицательному ( $\varphi_0 < 0$ ) кручению директора. Полагая  $\zeta = 0$  в выражении (14), получаем уравнение для угла  $\varphi_0$  в центре слоя ФН:

$$\pm \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{A(\varphi, \psi)}} = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Из соотношений (11), (12) находим интегральное уравнение для  $g(\zeta)$ :

$$\pm \int_0^{\varphi_0} \frac{g d\varphi}{\sqrt{A(\varphi)}} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Система интегральных уравнений (14)–(16) совместно с уравнением связи (9) определяет зависимости углов поворота директора и намагниченности,  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , а также объемной доли  $g(\zeta)$  магнитных частиц в слое ФН от напряженности  $h$  внешнего магнитного поля, угла  $\varphi_H$  его ориентации, параметра  $b$  воздействия поля, энергии  $\sigma$  сцепления магнитных частиц с нематиком и параметра сегрегации  $\kappa$ .

### 3. НЕМАТИК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим предельный случай чистого НЖК. В отсутствие магнитной примеси объемная доля магнитной фазы  $\bar{f} = 0$ , следовательно,  $\sigma = b = 0$ . Тогда уравнение связи (9) выполняется тождественно, а система уравнений (14)–(16) значительно упрощается. В этом случае угол ориентации директора находится из уравнения

$$\pm \int_0^{\varphi(\zeta)} \frac{d\varphi}{\sqrt{B(\varphi)}} = \frac{1}{2} - \zeta, \quad (17)$$

где

$$B(\varphi) = \frac{h^2}{2} [\cos 2(\varphi_0 - \varphi_H) - \cos 2(\varphi - \varphi_H)],$$

а угол  $\varphi_0 = \varphi(0)$  в центре слоя нематика определяется уравнением (17) при  $\zeta = 0$ .

Уравнение равновесия (17) определяет зависимость угла поворота директора в слое нематика от напряженности  $h$  магнитного поля и угла  $\varphi_H$  его ориентации в плоскости слоя. Это уравнение решалось численно. Расчеты показали, что в поле, ортогональном оси легкого ориентирования ( $\varphi_H = \pi/2$ ), переход Фредерикса происходит при  $h = \pi$  [32]. Если магнитное поле направлено под углом  $\varphi_H \neq \pi/2$  к оси легкого ориентирования, то отклонение директора от исходной ориентации происходит при сколь угодно малой напряженности  $h$  беспороговым образом, т. е. магнитный ориентационный переход «размывается». С ростом напряженности поля  $h$  угол  $\varphi_0 > 0$  монотонно увеличивается, асимптотически стремясь к  $\varphi_H$ .

На рис. 2 показаны зависимости угла поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя НЖК от направления магнитного поля для различных значений напряженности поля  $h$ . Видно, что при фиксированном значении  $h \leq \pi$  (кривые 1 и 2) с ростом  $\varphi_H$  сначала происходит монотонное увеличение угла  $\varphi_0$ , отвечающее росту ориентационных искажений директора в слое, которое затем сменяется его уменьшением. Однако при  $h > \pi$  (кривая 3) характер кривых меняется качественно. При больших углах поворота поля на кривой  $\varphi_0(h)$  появляются области неоднозначности, которые свидетельствуют о возникновении ориентационной неустойчивости, т. е. ориентационных переходов первого рода. Поведение угла  $\varphi_0$  при больших углах отклонения магнитного поля вблизи  $\pi/2$  описывается формулой

$$\varphi_0 \simeq \left( \varphi_H - \frac{\pi}{2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{\cos(h/2)} \right]. \quad (18)$$

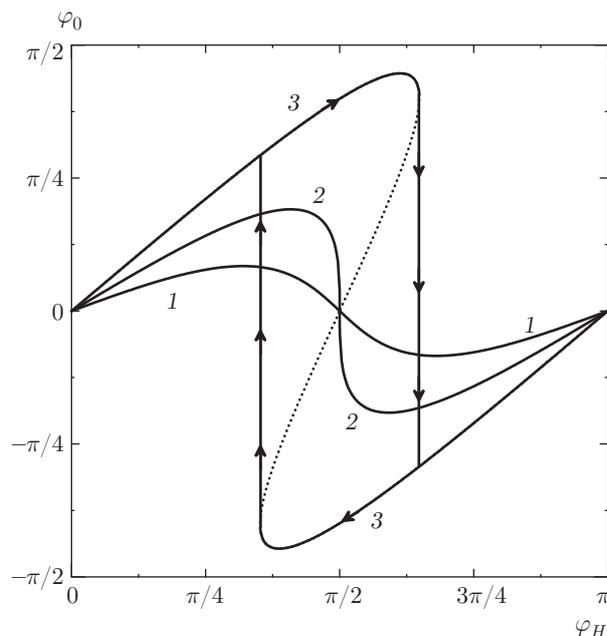


Рис. 2. Зависимости угла поворота директора в центре слоя НЖК от направления магнитного поля для различных значений  $h$ : кривая 1 —  $h = 2$ ; кривая 2 —  $h = h_* = \pi$ ; кривая 3 —  $h = 5$ . Устойчивые и метастабильные решения показаны сплошными линиями, неустойчивые — пунктирными линиями

Как видно из формулы (18), при  $h < h_* = \pi$  угловой коэффициент  $d\varphi_0/d\varphi_H$  отрицателен (кривая 1 на рис. 2), и угол  $\varphi_0$  является однозначной функцией  $\varphi_H$ . При  $h > h_*$  (кривая 3) угловой коэффициент становится положительным и на кривой  $\varphi_0(\varphi_H)$  появляется симметричная гистерезисная петля, отвечающая ориентационной бистабильности. С ростом угла поворота поля равновесный ориентационный переход, сопровождающийся скачком ориентации директора из состояния с положительным кручением (рис. 2, верхняя ветвь кривой 3) в состояние с отрицательным кручением (рис. 2, нижняя ветвь кривой 3), происходит при  $\varphi_H = \pi/2$ . Переход системы в этом случае в состояние с противоположным кручением объясняется тем, что направления директора  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  физически эквивалентны, а граничные условия симметричны, поэтому свободные энергии состояний с ориентацией магнитного поля  $\varphi_H = \pi/2$  для положительного ( $\varphi_0 > 0$ ) и отрицательного ( $\varphi_0 < 0$ ) кручений директора одинаковы. Рост угла поворота поля  $\varphi_H > \pi/2$ , отвечающий движению вдоль верхней (метастабильной) кривой 3 на рис. 2, т. е. увеличению угла ориентации директора в центре слоя, приводит к повышению упругой энергии (вклад  $F_1$  в выражении (1)) слоя нематика

и росту диамагнитной энергии (вклад  $F_2$  в выражении (1)) из-за увеличения угла между директором и полем. Движение вдоль нижней кривой 3 на рис. 2 при  $\varphi_H > \pi/2$  приводит к уменьшению как упругой энергии (угол  $\varphi_0$  по абсолютной величине становится меньше), так и диамагнитной энергии, поскольку угол между директором и направлением магнитного поля уменьшается.

#### 4. ФЕРРОНЕМАТИК С ЖЕСТКИМ СЦЕПЛЕНИЕМ И ОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ

Рассмотрим поведение ФН в пределе жесткого планарного сцепления директора и намагниченности ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). В этом случае ориентации магнитной и ЖК-подсистем описываются одним углом ( $\varphi = \psi$ ). Будем считать распределение магнитных частиц в слое однородным, что соответствует бессегрегационному пределу ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), тогда приведенная объемная доля магнитной примеси  $g(\zeta) = 1$  во всем образце ФН. Система уравнений равновесия ФН (14)–(16) в этом случае существенно упрощается. Здесь и далее численные расчеты уравнений ориентационного равновесия проводились для дипольного режима воздействия магнитного поля ( $b = 5$ ), характерного для ФН [11, 26].

На рис. 3 показаны зависимости угла поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН от магнитного поля  $h$  при различных значениях угла  $\varphi_H$ , в том числе приводящих к сильно закрученной ориентационной структуре внутри слоя, называемой супертвистовой [19, 20]. Как видно на рис. 3, в отсутствие поля угол отклонения директора равен нулю, что соответствует исходной невозмущенной структуре директора. При увеличении напряженности поля  $h$  угол поворота  $\varphi_0$  директора в центре слоя возрастает и асимптотически стремится к значению угла  $\varphi_H$ , под которым приложено поле. С ростом  $\varphi_H$  зависимость угла поворота директора в центре слоя ФН,  $\varphi_0(h)$ , претерпевает качественные изменения: на ней сначала появляется точка перегиба, а затем узкая гистерезисная область, в которой происходит резкое возрастание угла  $\varphi_0$  при незначительном увеличении напряженности поля  $h$ .

На рис. 4 показаны зависимости угла поворота  $\varphi_0$  директора в центре слоя ФН от угла ориентации  $\varphi_H$  магнитного поля при различных значениях  $h$ . Видно, что при фиксированном значении  $h$  с ростом угла поворота поля  $\varphi_H$  вначале происходит монотонное увеличение угла поворота  $\varphi_0$  директо-

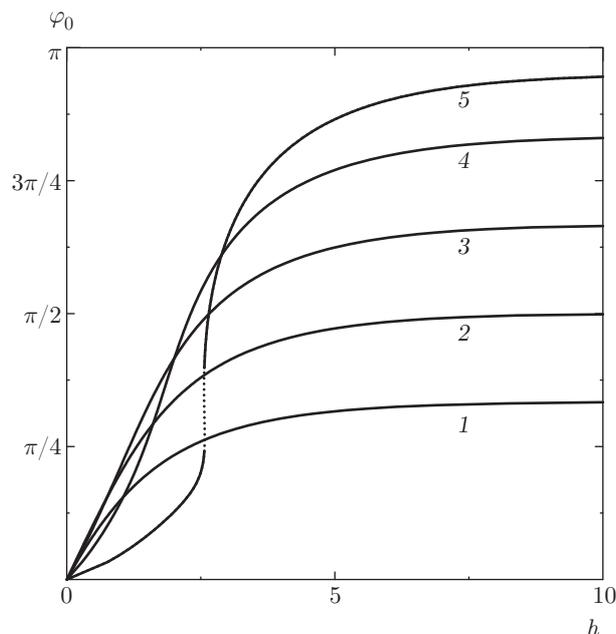


Рис. 3. Угол поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН как функция  $h$  при различных значениях  $\varphi_H$ . Пунктирной линией показаны неустойчивые решения. Кривая 1 —  $\varphi_H = \pi/3$ ; кривая 2 —  $\varphi_H = \pi/2$ ; кривая 3 —  $\varphi_H = 2\pi/3$ ; кривая 4 —  $\varphi_H = 5\pi/6$ ; кривая 5 —  $\varphi_H = 19\pi/20$

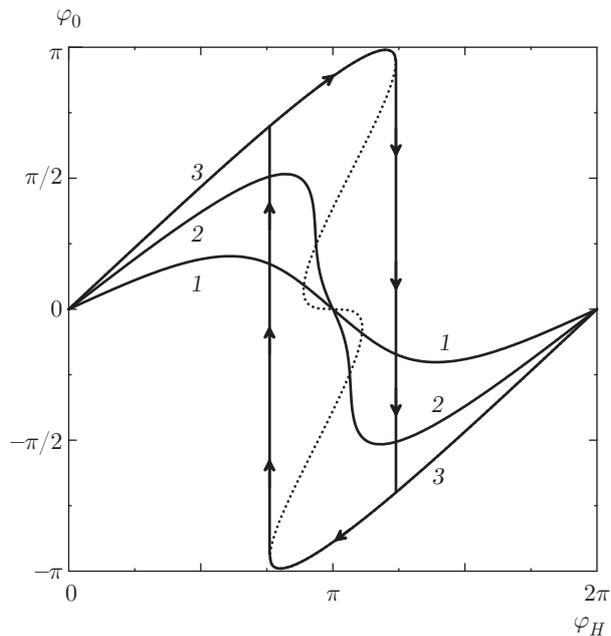


Рис. 4. Зависимости угла поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  при различных значениях  $h$ . Сплошными линиями показаны устойчивые и метастабильные решения, пунктирной — неустойчивые. Кривая 1 —  $h = 1$ ; кривая 2 —  $h = h_* = 2.5$ ; кривая 3 —  $h = 5$

ра, т. е. ориентационная структура ФН искажается при повороте поля, и с ростом напряженности поля  $h$  увеличивается  $\varphi_0$ . При больших углах поворота магнитного поля, соответствующих супертивистовым деформациям директора, на кривой  $\varphi_0(\varphi_H)$  появляются гистерезисные области, отвечающие ориентационной неустойчивости, т. е. ориентационному переходу первого рода. Кривая 2 на рис. 4 отвечает зависимости угла ориентации директора  $\varphi_0(\varphi_H)$  в поле  $h_* = b/2$ , выше которого на диаграмме появляются области неоднозначности. Поведение угла  $\varphi_0$  при больших углах поворота поля  $\varphi_H$  вблизи  $\varphi_H = \pi$  описывается формулой

$$\varphi_0 \simeq (\varphi_H - \pi) \left[ 1 - 1/\cos \left( \sqrt{h(b-h)}/2 \right) \right]. \quad (19)$$

Как видно из этого выражения, зависимость углового коэффициента  $d\varphi_0/d\varphi_H$  от магнитного поля носит немонотонный характер. При  $h \leq h_* = b/2$  с ростом напряженности поля он сначала уменьшается, оставаясь отрицательным (рис. 4, кривые 1, 2, 3); при этом угол  $\varphi_0$  является однозначной функцией угла поворота поля  $\varphi_H$ . В дальнейшем с ростом поля при  $h > h_*$  угловой коэффициент прямой начинает увеличиваться (рис. 4, кривая 3) и функция  $\varphi_0(\varphi_H)$  становится неоднозначной. Равновесный переход первого рода, вызванный изменением угла ориентации поля, происходит при  $\varphi_H = \pi$ .

В нематике, как показано выше, равновесный переход между структурами с разным направлением кручения происходит при  $\varphi_H = \pi/2$ , а функция  $\varphi_0(\varphi_H)$  имеет период  $\pi$ . На рис. 4 видно, что в ФН функция  $\varphi_0(\varphi_H)$  является  $2\pi$ -периодической. Это обусловлено изменением симметрии при добавлении в нематик магнитной примеси. Физическая эквивалентность состояний  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  в нематике приводит к инвариантности уравнения равновесия (17) по отношению к смене ориентации магнитного поля на противоположную ( $\varphi_H \rightarrow \varphi_H + \pi$ ). В ФН с жестким сцеплением между подсистемами ориентации директора и намагниченности описываются одним вектором  $\mathbf{n}$ , но состояния  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  не являются физически эквивалентными, как в беспримесном нематике, из-за наличия дипольного вклада в энергию (вклад  $F_3$  в выражении (1)). В этом случае инвариантность сохраняется только при замене  $\varphi_H$  на  $\varphi_H + 2\pi$ .

Сравнение поведения директора в нематике (см. рис. 2) и в ФН с жестким сцеплением (см. рис. 4) показывает, что наличие магнитной примеси приводит к большей ориентационной бистабильности при заданном значении напряженности поля. Это связано с тем, что уменьшение упругой энергии, обусловлен-

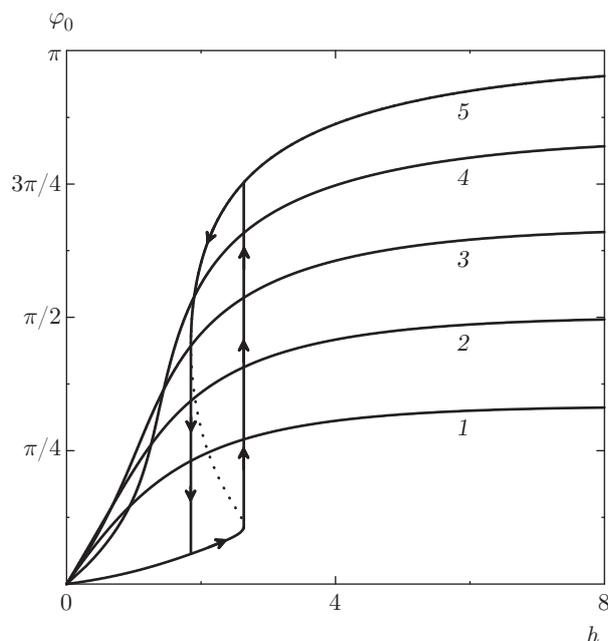


Рис. 5. Угол поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН как функция  $h$  для  $\kappa = 5$  и различных  $\varphi_H$ . Сплошными линиями показаны устойчивые и метастабильные решения, пунктирной — неустойчивые. Кривая 1 —  $\varphi_H = \pi/3$ ; кривая 2 —  $\varphi_H = \pi/2$ ; кривая 3 —  $\varphi_H = 2\pi/3$ ; кривая 4 —  $\varphi_H = 5\pi/6$ ; кривая 5 —  $\varphi_H = 39\pi/40$

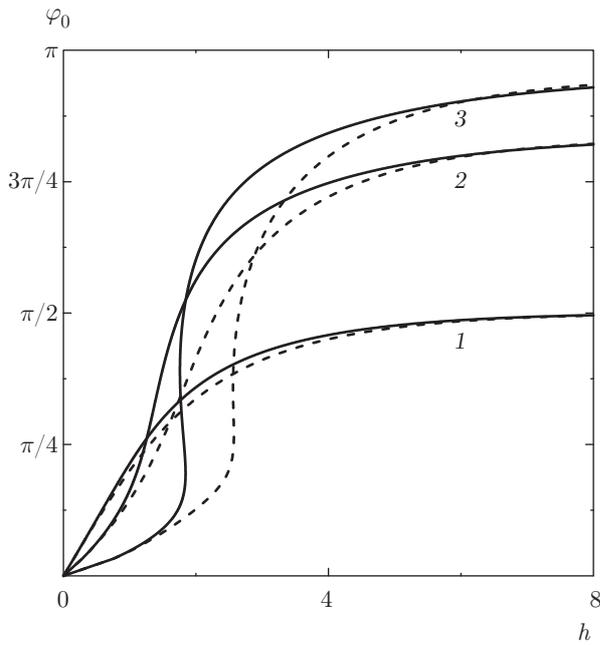
ное изменением кручения директора ФН, не компенсируется возрастанием зеемановской энергии  $F_3$ .

### 5. ФЕРРОНМАТИК С ЖЕСТКИМ СЦЕПЛЕНИЕМ И НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ

Рассмотрим теперь случай жесткого ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) планарного сцепления директора и намагниченности, но учтем перераспределение ( $g(\zeta) \neq 1$ ) магнитных частиц в слое ФН с деформированной ориентационной структурой, т. е. эффект магнитной сегрегации [3]. Для жесткого сцепления ориентации магнитной и ЖК-подсистем описываются с помощью одного угла ( $\varphi = \psi$ ). Результаты численного решения системы уравнений (14)–(16) в этом случае представлены на рис. 5–8.

На рис. 5 показаны зависимости угла поворота директора в центре слоя от внешнего поля. Видно, что с ростом угла  $\varphi_H$  на кривой  $\varphi_0(h)$  появляется гистерезисная область, как и в случае однородного распределения магнитных частиц в слое ФН (см. рис. 3).

Количественное сопоставление зависимостей  $\varphi_0(h)$  для однородного (штриховые кривые) и

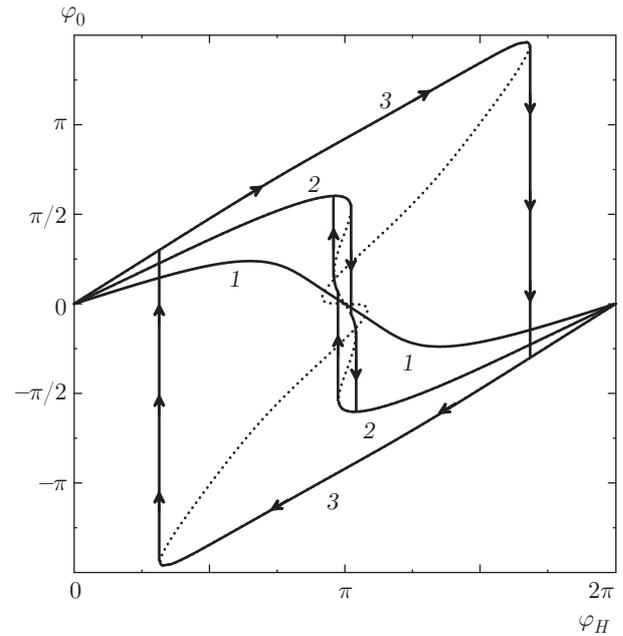


**Рис. 6.** Угол поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН как функция  $h$  для  $\kappa = 5$  и различных  $\varphi_H$ . Сплошными линиями показаны решения, отвечающие неоднородному распределению магнитной примеси в слое ФН ( $g \neq 1$ ), штриховыми — однородному распределению ( $g = 1$ ). Кривая 1 —  $\varphi_H = \pi/2$ ; кривая 2 —  $\varphi_H = 5\pi/6$ ; кривая 3 —  $\varphi_H = 19\pi/20$

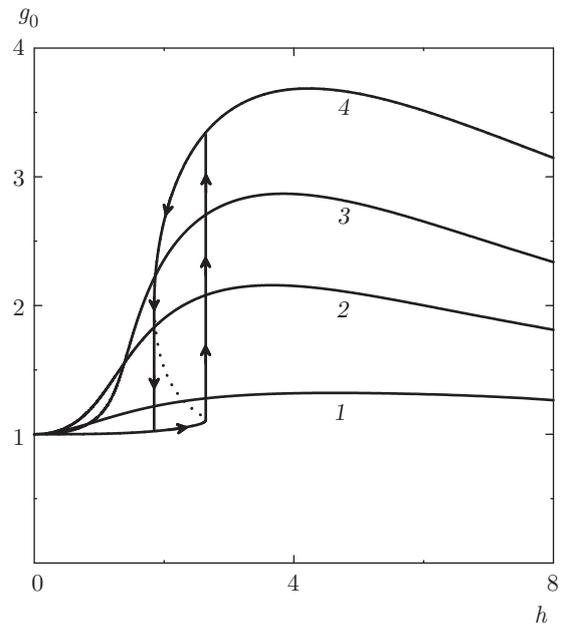
неоднородного (сплошные кривые) распределений магнитных частиц в ФН показано на рис. 6 при нескольких значениях угла ориентации поля  $\varphi_H$ . Видно, что эффект магнитной сегрегации приводит к смещению гистерезисной области в сторону более слабых магнитных полей.

На рис. 7 показаны зависимости угла поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  для  $\kappa = 5$  и различных значений напряженности поля  $h$ . Видно, что эффект магнитной сегрегации, вызывающий перераспределение магнитных частиц в слое, приводит к расширению гистерезисной области и уменьшению поля, при котором появляется неоднозначность зависимости  $\varphi_0(\varphi_H)$ . С ростом угла отклонения поля равновесный переход первого рода между двумя возможными ориентациями происходит при  $\varphi_H = \pi$ .

На рис. 8 показана зависимость приведенной объемной доли магнитных частиц от внешнего магнитного поля. В отсутствие поля частицы равномерно распределены по объему образца ( $g_0 = 1$ ). С ростом поля  $h$  концентрация частиц в центре слоя растет, достигая максимума, а затем, начиная с некоторого значения  $h$ , убывает. При фиксированной на-



**Рис. 7.** Зависимости угла поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  для  $\kappa = 5$  и различных значений  $h$ . Сплошными линиями показаны устойчивые решения, пунктирными — неустойчивые. Кривая 1 —  $h = 1$ ; кривая 2 —  $h = 2$ ; кривая 3 —  $h = 5$



**Рис. 8.** Приведенная объемная доля  $g_0$  магнитных частиц в центре слоя ФН как функция поля  $h$  для  $\kappa = 5$  и различных значений угла  $\varphi_H$ . Пунктирной линией показаны неустойчивые решения. Кривая 1 —  $\varphi_H = \pi/3$ ; кривая 2 —  $\varphi_H = 2\pi/3$ ; кривая 3 —  $\varphi_H = 5\pi/6$ ; кривая 4 —  $\varphi_H = 39\pi/40$

пряженности магнитного поля объемная доля частиц в центре слоя тем больше, чем больше угол, под которым прикладывается внешнее поле. Как видно на рис. 8, с ростом угла поворота поля зависимость  $g_0(h)$  становится неоднозначной и при больших значениях  $\varphi_H$ , отвечающих сверхзакрученной структуре директора, с ростом напряженности  $h$  объемная доля  $g_0$  примесных частиц меняется скачком. Это приводит к резкому возрастанию концентрации магнитных частиц в центре слоя ФН.

Расчеты показывают, что с увеличением  $\varphi_H$  растет отклонение директора от исходной ориентации во всем слое ФН с максимумом в центре слоя при заданном значении  $h$ . По мере увеличения  $\varphi_H$  концентрация магнитных частиц вблизи границ слоя ФН уменьшается и центральная его часть отделяется от границ практически беспримесным нематиком. Другими словами, эффект сегрегации приводит к расслоению ФН, причем чем больше угол  $\varphi_H$ , тем сильнее проявляется этот эффект.

### 6. ФЕРРОНЕМАТИК С МЯГКИМ СЦЕПЛЕНИЕМ И НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ

Ниже приводятся результаты численного решения полной системы уравнений равновесия (9), (14)–(16), которая определяет зависимости углов поворота директора  $\varphi$  и вектора намагниченности  $\psi$  внутри слоя ФН от магнитного поля  $h$ , угла его ориентации  $\varphi_H$ , параметра воздействия поля на систему  $b$ , параметра сегрегации  $\kappa$  и энергии сцепления магнитных частиц  $\sigma$  с ЖК-матрицей.

На рис. 9 показаны зависимости углов поворота директора  $\varphi_0$  и вектора намагниченности  $\psi_0$  в центре слоя ФН от внешнего поля  $h$ . Расчеты показывают, что в отсутствие поля углы отклонения директора и намагниченности равны нулю, что отвечает исходной невозмущенной структуре. При увеличении напряженности поля  $h$  углы поворота  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  в центре слоя возрастают и асимптотически стремятся к направлению внешнего поля  $\varphi_H$ . Видно, что зависимость  $\psi_0(h)$  достигает насыщения при меньших полях, чем зависимость  $\varphi_0(h)$ ; при этом чем меньше энергия сцепления  $\sigma$ , тем больше проявляется различие между кривыми для  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ , поскольку магнитная подсистема более податлива действию поля, чем ЖК-подсистема.

Сравнение полевых зависимостей угла поворота директора  $\varphi_0$  при жестком и мягком сцеплениях показывает, что ослабление сцепления между магнит-

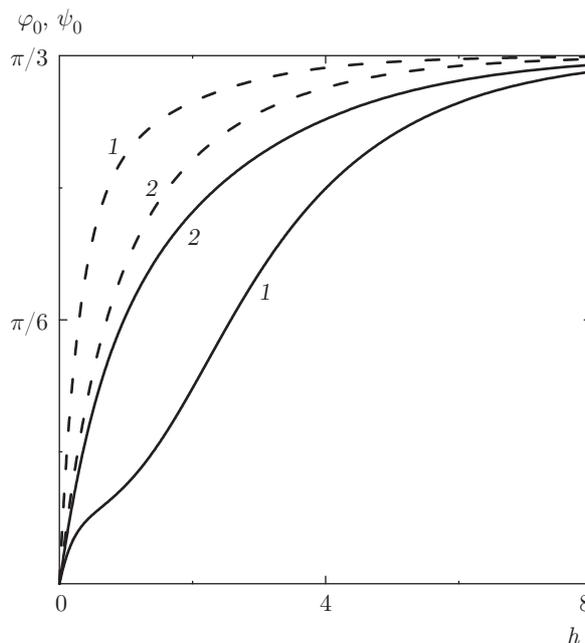


Рис. 9. Углы поворота директора  $\varphi_0$  (сплошные линии) и намагниченности  $\psi_0$  (штриховые линии) в центре слоя ФН как функции  $h$  для  $\kappa = 5$ ,  $\varphi_H = \pi/3$ . Кривые 1 —  $\sigma = 1$ ; кривые 2 —  $\sigma = 10$

ными частицами и ЖК-подсистемой, т. е. уменьшение  $\sigma$ , приводит к более слабым деформациям директора в слое ФН.

На рис. 10 представлены зависимости углов поворота директора  $\varphi_0$  и намагниченности  $\psi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  для мягкого (конечного) сцепления между подсистемами в слабом магнитном поле. Как видно из рис. 10а, в случае достаточно сильного сцепления ( $\sigma = 5$ ) между магнитной и ЖК-подсистемами при повороте магнитного поля, т. е. при увеличении  $\varphi_H$ , директор и намагниченность ориентируются вслед за полем, и угол отклонения намагниченности всегда больше угла отклонения директора. Эта зависимость носит немонокотный характер: с ростом  $\varphi_H$  углы  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  сначала увеличиваются, а затем уменьшаются, возвращаясь при  $\varphi_H = \pi$  к исходным значениям, но вектор намагниченности ФН оказывается направленным против магнитного поля. В этом случае увеличение зеемановской энергии (слагаемое  $F_3$  в выражении (1)) компенсируется убылью энергии ориентационного сцепления (вклад  $F_4$  в выражении (1)). При слабом сцеплении ( $\sigma = 0.5$ ) между директором и намагниченностью ориентационный отклик системы становится другим (рис. 10б). При повороте магнитного поля вектор намагниченности также

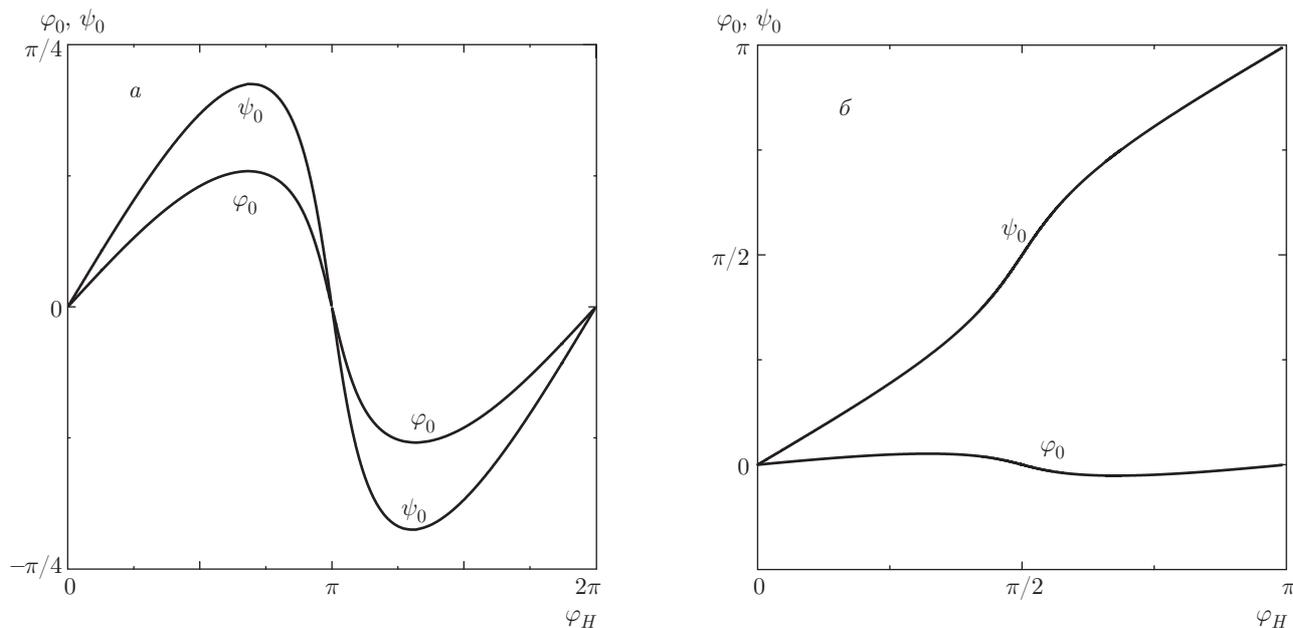


Рис. 10. Зависимости углов поворота директора  $\varphi_0$  и намагниченности  $\psi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  для  $\kappa = 5$ ,  $h = 0.5$  при сильном (а,  $\sigma = 5$ ) и слабом (б,  $\sigma = 0.5$ ) сцеплениях

следует за полем, а директор испытывает малоамплитудные отклонения от исходного положения, так как слабое сцепление между подсистемами не может обеспечить их совместное синхронное движение вслед за магнитным полем. Подобные режимы ориентационного отклика были найдены в работе [33] для неограниченного ФН во вращающемся магнитном поле.

На рис. 11 показаны зависимости углов поворота директора  $\varphi_0$  и намагниченности  $\psi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  для  $\kappa = 5$  при сильном сцеплении ( $\sigma = 5$ ) между подсистемами в сильном ( $h = 3$ ) магнитном поле. Видно, что при  $\varphi_H < \pi/2$  директор и намагниченность поворачиваются вслед за полем, отставая от него на некоторый угол. При  $\varphi_H \approx \pi/2$  происходит равновесный ориентационный переход первого рода, при котором  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  меняются скачком. В этом случае угол ориентации намагниченности  $\psi_0$  начинает превосходить угол ориентации поля  $\varphi_H$ , а угол поворота директора  $\varphi_0$  становится отрицательным, что соответствует состоянию ориентационной структуры внутри слоя ФН с противоположным кручением директора. В интервале значений  $\pi/2 < \varphi_H \leq \pi$  угол ориентации намагниченности  $\psi_0$  монотонно возрастает, а угол поворота директора  $\varphi_0$  убывает, при этом искажения поля директора уменьшаются и ориентационная структура воз-

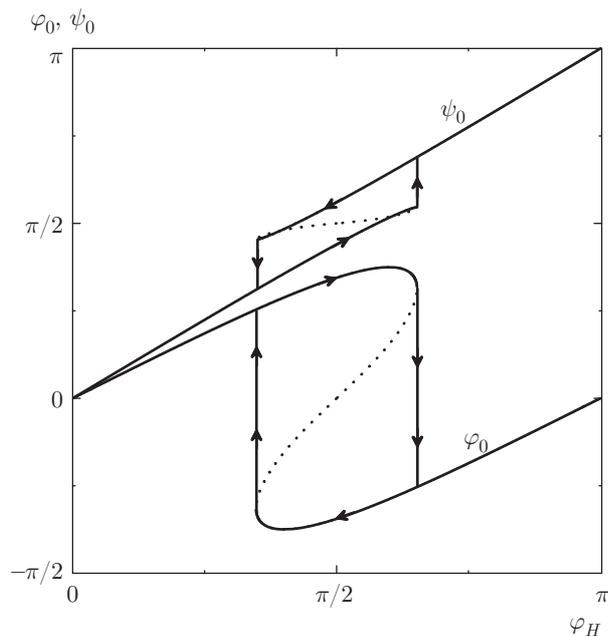


Рис. 11. Зависимости углов поворота директора  $\varphi_0$  и намагниченности  $\psi_0$  в центре слоя ФН от угла ориентации магнитного поля  $\varphi_H$  для  $\kappa = 5$  при сильном сцеплении ( $\sigma = 5$ ) в сильном ( $h = 3$ ) магнитном поле. Сплошными линиями показаны устойчивые решения, пунктирными — неустойчивые

вращается в однородное состояние. При дальнейшем росте угла  $\varphi_H$  последовательность переходов повторяется.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках континуальной теории изучена супер-твистовая ориентационная структура слоя ФН, к которому приложено магнитное поле под произвольным углом в плоскости ориентирующих поверхностей. Сцепление магнитных частиц с ЖК-подсистемой считалось планарным.

Показано, что в частном случае беспримесного НЖК отклонение директора от исходной ориентации растет по мере увеличения угла, под которым прикладывается магнитное поле, с максимумом в центре слоя. При ориентации магнитного поля перпендикулярно невозмущенной структуре имеет место пороговый переход Фредерикса. Другие значения угла ориентации поля приводят к беспороговым деформациям ориентационной структуры.

Показано, что имеются два режима отклика директора НЖК при квазистатическом повороте магнитного поля в зависимости от его напряженности. Ниже порога Фредерикса по мере увеличения угла поворота поля происходит монотонный рост ориентационных искажений директора в слое, который затем сменяется их уменьшением. Выше порога Фредерикса характер ориентационных искажений директора качественно меняется: при больших углах поворота поля происходит скачок ориентации директора с положительным кручением в состояние с отрицательным кручением.

Для ФН с жестким планарным сцеплением директора и намагниченности зависимость угла отклонения директора от угла ориентации поля имеет гистерезисный характер, приводящий к ориентационной бистабильности, т. е. к ориентационному переходу первого рода. Получено выражение для критического магнитного поля, выше которого появляются области неоднозначности. Показано, что при одном и том же значении напряженности поля ориентационные искажения поля директора в ФН сильнее, чем в беспримесном НЖК.

Проанализирован случай жесткого планарного сцепления директора и намагниченности и неоднородного распределения магнитных частиц в слое. Построены ориентационные распределения, определяющие поле директора и намагниченности в ФН. Установлено, что эффект сегрегации проявляется тем сильнее, чем больше отклонение угла ориен-

тации магнитного поля от направления легкой оси ориентирования директора на границах слоя. Кроме того, эффект магнитной сегрегации приводит к расширению гистерезисной области и уменьшению поля, при котором появляется ориентационная бистабильность.

Учет конечной величины сцепления между магнитной и ЖК-подсистемами показывает, что есть несколько режимов отклика ФН на поворот поля. В слабом магнитном поле для достаточно сильного сцепления с ростом угла ориентации магнитного поля директор и намагниченность поворачиваются вслед за полем, и угол отклонения намагниченности больше угла отклонения директора. При слабом сцеплении ориентационный отклик системы становится другим. В этом случае при повороте магнитного поля намагниченность следует за полем, а директор испытывает малоамплитудные отклонения относительно исходного положения, так как слабое сцепление между подсистемами обеспечивает их совместное синхронное движение вслед за полем. В сильном поле и при сильном сцеплении между магнитной и ЖК-подсистемами оказывается возможным ориентационный переход первого рода, сопровождающийся изменением направления кручения ориентационной структуры ФН.

Показано, что наиболее отчетливо эффект ориентационной неустойчивости при повороте поля проявляется в ФН с сильным сцеплением частиц с ЖК-матрицей. Согласно работам [34, 35], сильное сцепление характерно для достаточно длинных частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 16-42-590539, 16-02-00196).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. Reznikov, A. Glushchenko, and Yu. Garbovskiy, in *Liquid Crystals with Nano and Microparticles*, ed. by J. P. F. Lagerwall and G. Scalia, World Sci. Publ., Singapore (2016), p. 657.
2. A. Mertelj and D. Lisjak, *Liq. Cryst. Rev.* **5**, 1 (2017).
3. F. Brochard and P. G. de Gennes, *J. de Phys.* **31**, 691 (1970).
4. Ю. Л. Райхер, С. В. Бурыйлов, А. Н. Захлевных, *ЖЭТФ* **91**, 542 (1986).
5. S. V. Burylov and Y. L. Raikher, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **258**, 107 (1995).

6. A. N. Zakhlevnykh, *J. Magn. Magn. Mater.* **269**, 238 (2004).
7. S. V. Burylov, V. I. Zadorozhnii, I. P. Pinkevich, V. Yu. Reshetnyak, and T. J. Sluckin, *J. Magn. Magn. Mater.* **252**, 153 (2002).
8. O. Buluy, E. Ouskova, Yu. Reznikov, A. Glushchenko, J. West, and V. Reshetnyak, *J. Magn. Magn. Mater.* **252**, 159 (2002).
9. V. I. Zadorozhnii, T. J. Sluckin, V. Yu. Reshetnyak, and K. S. Thomas, *SIAM J. Appl. Math.* **68**, 1688 (2008).
10. S. V. Burylov and A. N. Zakhlevnykh, *Phys. Rev. E* **88**, 012511 (2013).
11. S. V. Burylov and Y. L. Raikher, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **258**, 123 (1995).
12. A. J. Davidson and N. J. Mottram, *Phys. Rev. E* **65**, 051710 (2002).
13. G.-C. Yang and S.-H. Zhang, *Liq. Cryst.* **29**, 641 (2002).
14. L. J. Cummings and G. Richardson, *Euro. J. Appl. Math.* **17**, 435 (2006).
15. A. N. Zakhlevnykh and O. R. Semenova, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **540**, 219 (2011).
16. S. Aya, K. V. Le, Y. Sasaki, F. Araoka, K. Ishikawa, and H. Takezoe, *Phys. Rev. E* **86**, 010701 (2012).
17. L. J. Cummings, C. Cai, and L. Kondic, *Phys. Rev. E* **88**, 012509 (2013).
18. А. Н. Захлевных, О. Р. Семенова, *ЖТФ* **82(2)**, 1 (2012).
19. S. V. Pasechnik, V. G. Chigrinov, and D. V. Shmeliova, *Liquid Crystals: Viscous and Elastic Properties*, Wiley-VCH, Weinheim (2009).
20. E. P. Raynes, *Mol. Cryst. Liq. Cryst. Lett.* **4**, 1 (1986).
21. M. Schmidt and H. Schmiedel, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **167**, 89 (1989).
22. A. J. Karn, Y. R. Shen, and E. Santamato, *Phys. Rev. A* **41**, 4510 (1990).
23. C. K. Karwin and K. L. Livesey, *Liq. Cryst.* **41**, 707 (2014).
24. G. I. Sfyris, K. Danas, G. Wen, and N. Triantafyllidis, *Phys. Rev. E* **94**, 012704 (2016).
25. V. I. Zadorozhnii, A. N. Vasilev, V. Yu. Reshetnyak, K. S. Thomas, and T. J. Sluckin, *Europhys. Lett.* **73**, 408 (2006).
26. D. V. Makarov and A. N. Zakhlevnykh, *Soft Matter* **8**, 6493 (2012).
27. A. N. Zakhlevnykh and D. A. Petrov, *J. Mol. Liq.* **198**, 223 (2014).
28. A. N. Zakhlevnykh and D. A. Petrov, *J. Magn. Magn. Mater.* **401**, 188 (2016).
29. А. Н. Захлевных, Д. В. Макаров, *ЖТФ* **84**, 7 (2014).
30. S. V. Burylov and A. N. Zakhlevnykh, *Phys. Rev. E* **88**, 052503 (2013).
31. А. Н. Захлевных, Д. А. Петров, *ЖЭТФ* **150**, 793 (2016).
32. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
33. A. N. Boychuk, D. V. Makarov, and A. N. Zakhlevnykh, *Eur. Phys. J. E* **39**, 101 (2016).
34. M. V. Gorkunov and M. A. Osipov, *Soft Matter* **7**, 4348 (2011).
35. А. Н. Захлевных, М. С. Лубнин, Д. А. Петров, *ЖЭТФ* **150**, 1041 (2016).