ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 6, стр. 908–922 

# НЕЙТРИНО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ИХ КРОССИНГ-СИММЕТРИЯ

***А. А. Добрынина*[*], *Н. О. Мораре*, *И. С. Огнев*[**]**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*
*150003, Ярославль, Россия*

Поступила в редакцию 13 декабря 2017 г.

Исследуются нейтрино-электронные процессы в среде с внешним магнитным полем произвольной напряженности. С использованием техники, основанной на использовании матрицы плотности частицы, распространяющейся во внешнем магнитном поле, для данных реакций получены инвариантные квадраты $S$-матричных элементов, справедливые в произвольной системе отсчета, движущейся вдоль линий напряженности магнитного поля. Полученные вероятности переходов можно легко обобщить на процессы взаимодействия нейтрино с другими заряженными лептонами и протонами. На примерах скоростей нейтрино-электронных реакций, а также энергии и импульса, передаваемых в них от среды к нейтрино, проведено интегрирование вероятностей процессов по поперечным импульсам заряженных частиц. Полученные выражения представлены в унифицированной для всех нейтрино-электронных процессов форме.

**DOI:** 10.7868/S0044451018060068

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение взаимодействия нейтрино с веществом имеет долгую и богатую историю. Слабая интенсивность данного взаимодействия и малая масса нейтрино приводят к существенным трудностям в экспериментальных исследованиях этих частиц, однако эта же особенность позволяет нейтрино практически свободно проходить через подавляющее большинство известных нам астрофизических объектов [1]. Исключение составляют лишь центральные области сверхновых, которые остаются непрозрачными даже для таких слабовзаимодействующих частиц как нейтрино [2]. Таким образом, их взаимодействие со средой становится существенным лишь при больших плотностях и температурах, которые недоступны в наземных экспериментах, но реализуются в астрофизических объектах. Как только этот факт был осознан, астрофизические приложения реакций с участием нейтрино стали предметом детального теоретического изучения. Подробный обзор первоисточников по данной тематике может быть найден, например, в работе [3].

В контексте астрофизических приложений взаимодействие нейтрино с веществом обычно разделяют на процессы с участием ядер, свободных нуклонов, электронов, а также позитронов в случае достаточно большой температуры среды. Среди обусловленных электронами и позитронами реакций, называемых обычно нейтрино-электронными, наиболее важной считается аннигиляция электрон-позитронной пары в пару нейтрино. Однако в случае плотной и горячей среды существенным становится также процесс рассеяния нейтрино на электронах и позитронах. Предполагая, что для процессов рассеяния прямая и обратная реакции совпадают, для каждого аромата нейтрино можно выделить следующие шесть нейтрино-электронных процессов (см., например, [4]):

$$\nu_{i(k)} + e^-_{(p,n)} \to \nu_{i(k')} + e^-_{(p',n')}, \qquad (1)$$

$$\bar{\nu}_{i(k')} + e^-_{(p,n)} \to \bar{\nu}_{i(k)} + e^-_{(p',n')}, \qquad (2)$$

$$\nu_{i(k)} + e^+_{(p',n')} \to \nu_{i(k')} + e^+_{(p,n)}, \qquad (3)$$

$$\bar{\nu}_{i(k')} + e^+_{(p',n')} \to \bar{\nu}_{i(k)} + e^+_{(p,n)}, \qquad (4)$$

$$e^-_{(p,n)} + e^+_{(p',n')} \rightleftarrows \nu_{i(k')} + \bar{\nu}_{i(k)}, \qquad (5)$$

где $e^-$ и $e^+$ — электрон и позитрон, $\nu_i(\bar{\nu}_i) = \nu_e(\bar{\nu}_e), \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu), \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau)$ — электронное, мюонное и таонное нейтрино (антинейтрино), в скобках для

[*] E-mail: dobrynina@uniyar.ac.ru
[**] E-mail: ognev@uniyar.ac.ru

всех частиц указаны их квантовые числа, используемые в дальнейшем.

Отличительной особенностью большинства астрофизических объектов является наличие в них сильных, по сравнению с земным, магнитных полей [5]. Существование таких полей приводит не только к модификации протекающих в них нейтринных процессов (1)–(5), идущих без магнитного поля, но и открывает новые каналы реакций [6, 7]:

$$\nu_{i(k)} \overset{B}{\rightleftarrows} \nu_{i(k')} + e^-_{(p',n')} + e^+_{(p,n)}, \tag{6}$$

$$\bar{\nu}_{i(k')} \overset{B}{\rightleftarrows} \bar{\nu}_{i(k)} + e^-_{(p',n')} + e^+_{(p,n)}, \tag{7}$$

$$e^-_{(p,n)} \overset{B}{\rightleftarrows} \nu_{i(k')} + \bar{\nu}_{i(k)} + e^-_{(p',n')}, \tag{8}$$

$$e^+_{(p',n')} \overset{B}{\rightleftarrows} \nu_{i(k')} + \bar{\nu}_{i(k)} + e^+_{(p,n)}, \tag{9}$$

которые запрещены кинематически в отсутствие магнитного поля. Здесь индекс $B$ над стрелками, указывающими направление реакций, обозначает, что они протекают лишь в присутствии внешнего магнитного поля. Таким образом, отличительной особенностью взаимодействия нейтрино с замагниченной средой является прежде всего существенное увеличение количества возможных нейтрино-электронных процессов. Отметим, что здесь не рассматриваются процессы с изменением аромата нейтрино, которые возможны как результат смешивания в нейтринном секторе Стандартной модели [8]. Это связано с тем, что они существенно подавлены, так как передаваемая в реакциях энергия намного превышают массу нейтрино (см., например, [9]). Также отметим, что здесь не приведены процессы с участием мюонов и тауонов, однако полученные в статье результаты достаточно легко могут быть обобщены и на реакции с их участием, что будет обсуждаться ниже.

Исследование влияния магнитного поля на нейтрино-электронные процессы в рамках квантовой теории поля началось с изучения нейтринного синхротронного излучения электрона (8) и не было связано с его астрофизическими приложениями [6]. Позже данный процесс был рассмотрен в приложении к остыванию белых карликов и нейтронных звезд [10]. Дальнейшие исследования синхротронного излучения и аналогичной реакции с участием позитрона (9) проводились на протяжении долгого времени разными авторами [11–31]. Кинематически запрещенный в отсутствие внешнего магнитного поля процесс рождения электрона и позитрона одиночным нейтрино (6) впервые был рассмотрен несколько позже синхротронного излучения в работе [7]. Его исследование совместно с аналогичной реакцией для антинейтрино (7) также имеет долгую и обширную историю [9, 29, 32–41]. Изучение влияния магнитного поля на остальные нейтрино-электронные процессы началось с аннигиляции электрон-позитронной пары в пару нейтрино (5) и впервые было изложено в работе [42]. Позднее данная и обратная к ней реакции в присутствии магнитного поля рассматривались в статьях [15, 22, 25, 29, 30, 41, 43–45]. Исследование процессов рассеяния нейтрино и антинейтрино на электронах в магнитном поле впервые было проведено в работе [46] и получило продолжение в [29, 34–36, 47–55], где были представлены результаты изучения модификаций реакций рассеяния (1)–(4) внешним магнитным полем. Следует также отметить достаточно подробный обзор [56], посвященный нейтринным процессам в приложении к астрофизическим объектам, включая реакции, индуцированные внешним магнитным полем. Столь богатая и длинная история изучения нейтрино-электронных процессов в магнитном поле привела к существенному прогрессу в данном направлении исследований. Во-первых, были развиты различные техники вычисления нейтрино-электронных процессов в среде с внешним магнитным полем. Во-вторых, были детально исследованы все предельные случаи, для которых, как правило, получены достаточно простые аналитические результаты. Однако основной прогресс в приложении к конкретным астрофизическим объектам был связан, преимущественно, с достаточно сложными численными расчетами.

При исследовании нейтрино-электронных процессов в приведенных выше работах применялись не только различные техники вычислений, но и промежуточные расчеты проводились, как правило, с использованием приближений, характерных для конкретных астрофизических объектов. Это способствовало прогрессу в изучении роли нейтринных процессов в условиях, присущих рассматриваемому объекту, однако делало затруднительным перенос результатов таких исследований в другие астрофизические условия. Кроме того, практически во всех приведенных работах исследовались лишь отдельные нейтрино-электронные реакции, а не вся их совокупность (1)–(9) в целом. Это, ввиду разнообразия используемых техник и упрощающих предположений, делало, в свою очередь, затруднительным как сравнительный анализ отдельных нейтринных реакций, так и их совместное влияние на динамику конкретных астрофизических объектов. Необходимо также отметить, что большая часть расчетов нейтринных процессов проводилась в специальной системе отсчета, в которой среда покоится. Однако современные гидродинамические моделирования таких объектов, как сверхновые и аккреционные диски, показывают, что в их динамике существенную роль могут играть эффекты общей теории относительности (см., например, [57, 58]). Следовательно, для включения в релятивистское моделирование данных объектов процессов взаимодействия нейтрино со средой физические величины, характеризующие эти процессы, должны быть представлены в явно ковариантной форме.

Приведенные выше аргументы послужили причиной независимого расчета всей совокупности возможных в присутствии магнитного поля нейтрино-электронных реакций (1)–(9). В разд. 1 на основе техники, базирующейся на использовании матриц плотности частиц, проводится расчет квадратов $S$-матричных элементов исследуемых процессов. Обсуждается лоренцевская инвариантность полученных выражений, а также возможность обобщения результатов на процессы с участием других заряженных лептонов — мюона и тауона, а также протонов. В разд. 2 на основе общего подхода к описанию излучения через кинетическое уравнение Больцмана проведено интегрирование полученных вероятностей переходов в нейтрино-электронных процессах по поперечным импульсам заряженных частиц, появившихся как результат использованной техники вычислений. Показано, что такое интегрирование не приводит к потере исходной кроссинг-инвариантности $S$-матричных элементов исследуемых процессов. Проводится сравнение полученных в работе результатов с известными в литературе.

Далее в работе используется система единиц, в которой $c = \hbar = k_B = 1$, где $c$ — скорость света, $\hbar$ — постоянная Планка, и $k_B$ — постоянная Больцмана.

## 2. ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ В НЕЙТРИНО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЦЕССАХ

Взаимодействие нейтрино с заряженным лептоном в локальном пределе, когда квадрат переданного нейтринной паре 4-импульса $Q^2$ много меньше квадрата массы $W$-бозона ($|Q^2| \ll m_W^2$), задается эффективным ток-токовым лагранжианом (см., например, [4]):

$$\mathcal{L}_{eff}(\mathrm{x}) = -\frac{\widetilde{G}_F}{\sqrt{2}} \left[\overline{\psi}^{(\ell)}(\mathrm{x})\gamma^\mu\left(1+g\gamma_5\right)\psi^{(\ell)}(\mathrm{x})\right] \times \\ \times \left[\overline{\psi}^{(\nu)}(\mathrm{x})\gamma_\mu\left(1+\gamma_5\right)\psi^{(\nu)}(\mathrm{x})\right], \quad (10)$$

где $\psi^{(\ell)}(\mathrm{x})$ и $\psi^{(\nu)}(\mathrm{x})$ — квантованные поля лептона и нейтрино, $\mathrm{x}^\mu = (t, x_1, x_2, x_3)$, $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. В (10) также использованы обозначения $\widetilde{G}_F = G_F\, c_V$ и $g = c_A/c_V$, где $G_F$ — константа Ферми, $c_V = \pm 1/2 + 2\sin^2\theta_W$ и $c_A = \pm 1/2$ — векторная и аксиальная константы заряженного лептонного тока, $\theta_W$ — угол Вайнберга. В $c_V$ и $c_A$ верхние знаки плюс соответствуют электронному нейтрино $\nu_e$, для которого имеются вклады, обусловленные обменом как нейтральным $Z$-, так и заряженным $W$-бозоном, а нижние знаки минус относятся к $\nu_\mu$ и $\nu_\tau$, для которых возможен обмен только $Z$-бозоном [4]. Далее будем предполагать, что вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{B}$ направлен вдоль оси $z$ и не меняется с течением времени, а векторный потенциал этого поля выбран в калибровке Ландау в виде $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$. Решением уравнения Дирака для заряженного лептона в таком поле будет биспинор $\psi^{(\ell)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})$, определяемый следующим набором квантовых чисел: номером уровня Ландау $n$, поляризацией $s$, продольной компонентой импульса $p_3$ и координатой максимума распределения $x_0$ на оси $x$, где $x_0 = p_2/(eB)$.

Квадраты $S$-матричных элементов нейтрино-электронных процессов могут быть представлены в следующем виде:

$$|S_{if}|^2 = \frac{\widetilde{G}_F^2}{2}\int d^4\mathrm{x}\, d^4\mathrm{x}' \times \\ \times \mathrm{Sp}\left[\psi^{(\nu)}_{k'}(\mathrm{x}')\overline{\psi}^{(\nu)}_{k'}(\mathrm{x})\, O_\mu\, \psi^{(\nu)}_{k}(\mathrm{x})\overline{\psi}^{(\nu)}_{k}(\mathrm{x}')\, O_\nu\right] \times \\ \times \mathrm{Sp}\left[\psi^{(\ell)}_{n',p_2',p_3',s'}(\mathrm{x}')\overline{\psi}^{(\ell)}_{n',p_2',p_3',s'}(\mathrm{x}) \times \right. \\ \left. \times\, \widetilde{O}^\mu\, \psi^{(\ell)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})\overline{\psi}^{(\ell)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}')\, \widetilde{O}^\nu\right], \quad (11)$$

где $O_\mu = \gamma_\mu\left(1+\gamma_5\right)$, $\widetilde{O}_\mu = \gamma_\mu\left(1+g\gamma_5\right)$, и интегрирование ведется по четырехмерному нормировочному объему $\Omega = \mathcal{T}V = \mathcal{T}L_xL_yL_z$. Для определенности, рассмотрим процесс рассеяния нейтрино на электроне (1). Для этой реакции квантовые числа $k^\mu = (\omega, k_1, k_2, k_3)$, $k'^\mu = (\omega', k_1', k_2', k_3')$ соответствуют 4-импульсам начального и конечного нейтрино, и, аналогично, начальный и конечный электроны различаются отсутствием или наличием штриха у их набора квантовых чисел.

Приведенное выражение (11) для квадрата $S$-матричного элемента содержит произведения волновых функций вида $\psi(\mathrm{x})\overline{\psi}(\mathrm{x}')$. Для безмассового нейтрино левой спиральности это произведение может быть записано как

$$\psi_k^{(\nu)}(\mathrm{x})\,\overline{\psi}_k^{(\nu)}(\mathrm{x}') = \frac{e^{-ik(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}}{2\,\omega V}\,\rho^{(\nu)}(k),\qquad \rho^{(\nu)}(k) = \frac{\widehat{k}}{2}\,(1-\gamma_5)\,, \tag{12}$$

где $\rho^{(\nu)}(k)$ — матрица плотности нейтрино и $\widehat{k} = k^\mu\gamma_\mu$. Для электронов соответствующее произведение зависит от выбора оператора спина. В частности, этот оператор можно выбрать как $\widehat{\Sigma}_3 = i\gamma_1\gamma_2$. В этом случае просуммированное по поляризациям произведение волновых функций фермионов с электрическим зарядом $\varrho e$ ($\varrho = \pm1$, $e > 0$ — модуль заряда) и массой $m$ может быть записано в следующем интегральном представлении [59]:

$$\sum_{s=\pm1}\psi^{(\ell)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})\,\overline{\psi}^{(\ell)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}') = \frac{e^{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')}}{2\,\varepsilon_n L_y L_z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}\,\rho_n^{(\ell)}(p)\,\frac{dp_1}{2\pi},$$
$$\rho_n^{(\ell)}(p) = (-1)^n\,2\,e^{-u/2}\left\{\left(\widehat{p}_\parallel + m\right)\times\left[\Pi_\varrho\,L_n(u) - \Pi_{-\varrho}\,L_{n-1}(u)\right] + 2\,\widehat{p}_\perp\,L^1_{n-1}(u)\right\}, \tag{13}$$

где

$$u = \frac{2(p_1^2+p_2^2)}{eB},\quad \widehat{p}_\parallel = \varepsilon_n\gamma_0 - p_3\gamma_3,\quad \widehat{p}_\perp = p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2;$$

$\Pi_\varrho = \left(1 + i\varrho\gamma_1\gamma_2\right)/2 = \left(1 + \varrho\hat{\Sigma}_3\right)/2$ — проекционный оператор, $L_n^k(u)$ — обобщенные полиномы Лагерра [60], причем $L_n^0(u) \equiv L_n(u)$. Отметим, что в данном подходе знак заряда как для положительно частотного решения (например, электрон), так и для отрицательно частотного (например, позитрон) один и тот же и равен знаку заряда частицы. Использование такого представления удобно тем, что зависимость от координат $\mathrm{x}^\mu$ и $\mathrm{x}'^\mu$ удалось собрать в форме двух экспоненциальных множителей. Первый из них, $\exp\{-ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\}$, совпадает с вакуумным, а второй, $\exp\{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')\}$, содержит фазу

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \frac{eB}{2}\,(x_1 + x_1')\,(x_2 - x_2')\,, \tag{14}$$

антисимметричную относительно перестановки аргументов: $\Phi(\mathrm{x}',\mathrm{x}) = -\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')$. Наличие свойства антисимметрии у фазы приводит к сокращению соответствующих множителей в выражении для квадрата $S$-матричного элемента любого процесса. Отметим, что в четырехмерном импульсе заряженного фермиона $p^\mu = (\varepsilon_n, p_1, p_2, p_3)$ в формуле (13) энергия определяется только третьей компонентой, $\varepsilon_n = (p_3^2 + m^2 + 2eBn)^{-1/2}$, а появление двух других компонент импульса $p_1$ и $p_2$, которые в дальнейшем будем называть поперечными, отражает особенности представления пропагатора электрона в постоянном однородном магнитном поле. Функцию $\rho_n^{(\ell)}(p)$ в (13) можно интерпретировать как матрицу плотности заряженного фермиона, распространяющегося во внешнем магнитном поле. Отметим, что впервые данное выражение было получено в работе [61] для электрона ($\varrho = -1$). Аналогичное выражение было получено в работе [31], где рассматривался тензорный оператор спина $\hat{\mu}_3$ [62, 63], отличный от $\hat{\Sigma}_3$, используемого в данной работе.

После подстановки произведений волновых функций (12) и (13) в (11), квадрат $S$-матричного элемента рассеяния нейтрино на заряженном фермионе примет следующий вид:

$$\sum_{s,s'=\pm1}|S_{if}|^2 = \frac{\widetilde{G}_F^2}{128\,\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_1'\int d^4\mathrm{x}\,d^4\mathrm{x}'\times\frac{\exp\{-i(p+k-p'-k')(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\}}{\varepsilon_n\omega\,\varepsilon'_{n'}\omega'\,L_y^2L_z^2V^2}\times\mathrm{Sp}\left[\rho^{(\ell)}_{n'}(p')\widetilde{O}^\mu\rho^{(\ell)}_n(p)\widetilde{O}^\nu\right]\times\mathrm{Sp}\left[\rho^{(\nu)}(k')O_\mu\rho^{(\nu)}(k)O_\nu\right]. \tag{15}$$

Как отмечалось выше, в этом выражении отсутствуют множители с фазой (14), поскольку $\exp\{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')\}\exp\{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x}',\mathrm{x})\} = 1$. Интегрирование в (15) по $\mathrm{x}$ и $\mathrm{x}'$ тривиально и приводит к следующему результату:

$$\sum_{s,s'=\pm1}|S_{if}|^2 = (-1)^{n+n'}\,\widetilde{G}_F^2\,\mathcal{T}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^{(4)}(p+k-p'-k')}{\varepsilon_n\omega\,\varepsilon'_{n'}\omega'\,L_y^2L_z^2V}\times e^{-(u+u')/2}\left[L_{\mu\nu}\,N_{\mu\nu}\right]dp_1dp_1'. \tag{16}$$

Здесь

$$\delta^{(4)}\left(\mathcal{P}\right) = \delta\left(\mathcal{P}_0\right)\delta\left(\mathcal{P}_1\right)\delta\left(\mathcal{P}_2\right)\delta\left(\mathcal{P}_3\right)$$

— произведение четырех $\delta$-функций Дирака,

$$u = \frac{2(p_1^2+p_2^2)}{eB},\quad u' = \frac{2(p_1'^2+p_2'^2)}{eB}$$

— безразмерные квадраты поперечных импульсов начального и конечного заряженных фермионов. Используя антикоммутационные свойства $\gamma$-матриц, $\gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu$, а также коммутативность $\gamma_5$ с проекционным оператором, $\Pi_\varrho\gamma_5 = \gamma_5\Pi_\varrho$, введенные в выражении (16) тензоры $L_{\mu\nu}$ и $N_{\mu\nu}$, соответствующие сверткам токов заряженных лептонов и нейтрино, могут быть представлены в виде

$$
\begin{aligned}
L_{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\Big[ \Big\{ \widehat{p}'_{\|} \Big[ \Pi_{\varrho}\, L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho}\, L_{n'-1}(u') \Big] + \\
+ 2\widehat{p}'_{\perp}\, L^1_{n'-1}(u') \Big\} \gamma_\mu \Big\{ \widehat{p}_{\,\|} \Big[ \Pi_{\varrho}\, L_n(u) - \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u) \Big] + \\
+ 2\,\widehat{p}_{\perp}\, L^1_{n-1}(u) \Big\} \gamma_\nu \Big( 1 + g^2 + 2g\gamma_5 \Big) \Big] + \\
+ m^2(1-g^2)\, \mathrm{Sp}\Big[ \Big\{ \Pi_{\varrho}\, L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho}\, L_{n'-1}(u') \Big\} \times \\
\times \gamma_\mu \Big\{ \Pi_{\varrho}\, L_n(u) - \Pi_{-\varrho}\, L_{n-1}(u) \Big\} \gamma_\nu \Big], \quad (17)
\end{aligned}
$$

$$
N_{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\Big[ \widehat{k}'\, \gamma_\mu\, \widehat{k}\, \gamma_\nu\, (1+\gamma_5) \Big]. \quad (18)
$$

Вычисление тензора $N_{\mu\nu}$ стандартно [4, 64] и приводит к следующему результату:

$$
N_{\mu\nu} = 4 \left[ k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - (kk')\, g_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\rho'}\, k_\rho k'_{\rho'} \right], \quad (19)
$$

где $g_{\mu\nu}$ и $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$— метрический тензор и полностью антисимметричный тензор Леви–Чивита в пространстве Минковского. Особенности техники вычислений более громоздкого тензора $L_{\mu\nu}$ представлены ниже.

Наличие в тензоре $L_{\mu\nu}$ проекционных операторов $\Pi_{\pm\varrho}$ позволяет разбить его на составляющие отдельно в продольном и поперечном подпространствах, если воспользоваться следующими свойствами этого оператора [65]:

$$
\Pi_\varrho \Pi_\varrho = \Pi_\varrho, \quad \Pi_\varrho \Pi_{-\varrho} = 0, \quad \Pi_\varrho \gamma_\mu = \gamma_\mu \Pi_\varrho \; (\mu = 0, 3),
$$
$$
\Pi_\varrho \gamma_\mu = \gamma_\mu \Pi_{-\varrho} \; (\mu = 1, 2).
$$

Таким образом, если встречается конструкция вида $\Pi_\varrho \gamma_\mu \Pi_\varrho$, то эффективно от $\gamma$-матрицы остается только ее продольная составляющая $\gamma^\mu_{\|} = \gamma^\mu$, у которой отличны от нуля матрицы с $\mu = 0, 3$, а в случае конструкции $\Pi_{-\varrho}\gamma_\mu \Pi_\varrho$ — ее поперечная часть $\gamma^\mu_\perp = \gamma^\mu$, в которой ненулевыми будут матрицы с $\mu = 1, 2$. Данные свойства позволяют представить $L_{\mu\nu}$ в виде

$$
\begin{aligned}
L_{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\Big[ \Big\{ \widehat{p}'_{\|} \gamma_{\|\mu}\, \widehat{p}_{\,\|} \gamma_{\|\nu} \Big[ \Pi_\varrho\, L_n(u)\, L_{n'}(u') + \\
+ \Pi_{-\varrho}\, L_{n-1}(u)\, L_{n'-1}(u') \Big] - \widehat{p}'_{\|} \gamma_{\perp\mu}\, \widehat{p}_{\,\|} \gamma_{\perp\nu} \times \\
\times \Big[ \Pi_\varrho\, L_{n-1}(u)\, L_{n'}(u') + \Pi_{-\varrho}\, L_n(u)\, L_{n'-1}(u') \Big] - \\
- 2\widehat{p}'_{\perp} \gamma_{\perp\mu}\, \widehat{p}_{\,\|} \gamma_{\|\nu} \Big[ \Pi_\varrho\, L_n(u) - \Pi_{-\varrho}\, L_{n-1}(u) \Big] L^1_{n'-1}(u') + \\
+ 2\widehat{p}'_{\perp} \gamma_{\|\mu}\, \widehat{p}_{\,\|} \gamma_{\perp\nu} \Big[ \Pi_\varrho\, L_{n-1}(u) - \Pi_{-\varrho}\, L_n(u) \Big] L^1_{n'-1}(u') - \\
- 2 \Big( \widehat{p}'_{\|} \gamma_{\perp\mu}\, \widehat{p}_{\perp} \gamma_{\|\nu} + \widehat{p}'_{\|} \gamma_{\|\mu}\, \widehat{p}_{\perp} \gamma_{\perp\nu} \Big) \times \\
\times \Big[ \Pi_\varrho\, L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho}\, L_{n'-1}(u') \Big] L^1_{n-1}(u) + \\
+ 4 \Big( \widehat{p}'_{\perp} \gamma_{\|\mu}\, \widehat{p}_{\perp} \gamma_{\|\nu} + \widehat{p}'_{\perp} \gamma_{\perp\mu}\, \widehat{p}_{\perp} \gamma_{\perp\nu} \Big) L^1_{n-1}(u)\, L^1_{n'-1}(u') \Big\} \times \\
\times \Big( 1 + g^2 + 2g\gamma_5 \Big) \Big] + m^2\, (1 - g^2) \times \\
\times \mathrm{Sp}\Big[ \gamma_{\|\mu} \gamma_{\|\nu} \Big\{ \Pi_\varrho\, L_n\,(u)\, L_{n'}\,(u') + \\
+ \Pi_{-\varrho}\, L_{n-1}\,(u)\, L_{n'-1}\,(u') \Big\} - \\
- \gamma_{\perp\mu} \gamma_{\perp\nu} \Big\{ \Pi_\varrho\, L_{n-1}\,(u)\, L_{n'}\,(u') + \\
+ \Pi_{-\varrho} L_n\,(u)\, L_{n'-1}\,(u') \Big\} \Big], \quad (20)
\end{aligned}
$$

где учтено, что шпуры, содержащие нечетное число либо продольных, либо поперечных $\gamma$-матриц, равны нулю. Приведем основные соотношения [59], которые позволяют вычислять шпуры в продольном и поперечном подпространствах для двух $\gamma$-матриц

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\Big[ \gamma_{\|\delta_1} \gamma_{\|\delta_2} \big( a + b\gamma_5 \big) \big( \Pi_\varrho L_1 - \Pi_{-\varrho} L_2 \big) \Big] = \\
&\qquad = 2a\, \widetilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2}\, \mathrm{L}_- + 2\varrho b\, \widetilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2}\, \mathrm{L}_+, \\
&\mathrm{Sp}\Big[ \gamma_{\perp\delta_1} \gamma_{\perp\delta_2} \big( a + b\gamma_5 \big) \big( \Pi_\varrho L_1 - \Pi_{-\varrho} L_2 \big) \Big] = \\
&\qquad = -2a\, \Lambda_{\delta_1\delta_2}\, \mathrm{L}_- + 2i\varrho a\, \varphi_{\delta_1\delta_2}\, \mathrm{L}_+
\end{aligned} \quad (21)
$$

и четырех $\gamma$-матриц

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\Big[ \gamma_{\|\delta_1} \gamma_{\|\delta_2} \gamma_{\|\delta_3} \gamma_{\|\delta_4} \big( a + b\gamma_5 \big) \times \\
&\quad \times \big( \Pi_\varrho L_1 - \Pi_{-\varrho} L_2 \big) \Big] = \\
&\quad = 2a \Big[ \widetilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2} \widetilde{\Lambda}_{\delta_3\delta_4} + \widetilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2} \widetilde{\varphi}_{\delta_3\delta_4} \Big] \mathrm{L}_- + \\
&\quad + 2\varrho b \Big[ \widetilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2} \widetilde{\varphi}_{\delta_3\delta_4} + \widetilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2} \widetilde{\Lambda}_{\delta_3\delta_4} \Big] \mathrm{L}_+, \\
&\mathrm{Sp}\Big[ \gamma_{\|\delta_1} \gamma_{\|\delta_2} \gamma_{\perp\delta_3} \gamma_{\perp\delta_4} \big( a + b\gamma_5 \big) \times \\
&\quad \times \big( \Pi_\varrho L_1 - \Pi_{-\varrho} L_2 \big) \Big] = \\
&\quad = -2a\, \widetilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2} \Big[ \Lambda_{\delta_3\delta_4} \mathrm{L}_- - i\varrho\, \varphi_{\delta_3\delta_4} \mathrm{L}_+ \Big] - \\
&\quad - 2b\, \widetilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2} \Big[ \varrho\, \Lambda_{\delta_3\delta_4} \mathrm{L}_+ - i\, \varphi_{\delta_3\delta_4} \mathrm{L}_- \Big], \\
&\mathrm{Sp}\Big[ \gamma_{\perp\delta_1} \gamma_{\perp\delta_2} \gamma_{\perp\delta_3} \gamma_{\perp\delta_4} \big( a + b\gamma_5 \big) \times \\
&\quad \times \big( \Pi_\varrho L_1 - \Pi_{-\varrho} L_2 \big) \Big] = \\
&\quad = 2a \Big[ \Lambda_{\delta_1\delta_2} \Lambda_{\delta_3\delta_4} - \varphi_{\delta_1\delta_2} \varphi_{\delta_3\delta_4} \Big] \mathrm{L}_- - \\
&\quad - 2i\varrho b \Big[ \Lambda_{\delta_1\delta_2} \varphi_{\delta_3\delta_4} + \varphi_{\delta_1\delta_2} \Lambda_{\delta_3\delta_4} \Big] \mathrm{L}_+,
\end{aligned} \quad (22)
$$

где $\mathrm{L}_\pm = L_1 \pm L_2$. Здесь

$$
\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B, \quad \widetilde{\varphi}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}/2
$$

— соответственно безразмерные тензор электромагнитного поля и дуально сопряженный к нему тензор; $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$ и $\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\widetilde{\varphi}\widetilde{\varphi})_{\mu\nu}$ — две отличные от нуля их билинейные комбинации. С использованием соотношений (21) и (22) результат вычисления структуры $L_{\mu\nu}$ может быть представлен в следующем виде:

$$L_{\mu\nu} = 2\,p_\delta\,p'_{\delta'}\Big\{(1+g^2)\big(\widetilde{\Lambda}_{\delta'\mu}\widetilde{\Lambda}_{\delta\nu} + \widetilde{\varphi}_{\delta'\mu}\widetilde{\varphi}_{\delta\nu}\big)L_+^{(1)} +$$
$$+ 2\varrho g\big(\widetilde{\Lambda}_{\delta'\mu}\widetilde{\varphi}_{\delta\nu} + \widetilde{\varphi}_{\delta'\mu}\widetilde{\Lambda}_{\delta\nu}\big)L_-^{(1)} - (1+g^2)\times$$
$$\times\,\widetilde{\Lambda}_{\delta'\delta}\big(\Lambda_{\mu\nu}L_+^{(2)} + i\varrho\,\varphi_{\mu\nu}L_-^{(2)}\big) +$$
$$+ 2g\,\widetilde{\varphi}_{\delta'\delta}\big(\varrho\Lambda_{\mu\nu}L_-^{(2)} + i\,\varphi_{\mu\nu}L_+^{(2)}\big) +$$
$$+ 2\Big[(1+g^2)\,\widetilde{\Lambda}_{\delta\mu}\big(\Lambda_{\delta'\nu}L_- + i\varrho\,\varphi_{\delta'\nu}L_+\big) +$$
$$+ 2g\,\widetilde{\varphi}_{\delta\mu}\big(\varrho\Lambda_{\delta'\nu}L_+ + i\,\varphi_{\delta'\nu}L_-\big) +$$
$$+ (1+g^2)\widetilde{\Lambda}_{\delta\nu}\big(\Lambda_{\delta'\mu}L_- - i\varrho\,\varphi_{\delta'\mu}L_+\big) +$$
$$+ 2g\,\widetilde{\varphi}_{\delta\nu}\big(\varrho\Lambda_{\delta'\mu}L_+ - i\,\varphi_{\delta'\mu}L_-\big)\Big]L_{n'-1}^1 +$$
$$+ 2\Big[(1+g^2)\,\widetilde{\Lambda}_{\delta'\mu}\big(\Lambda_{\delta\nu}L'_- - i\varrho\,\varphi_{\delta\nu}L'_+\big) +$$
$$+ 2g\,\widetilde{\varphi}_{\delta'\mu}\big(\varrho\Lambda_{\delta\nu}L'_+ - i\,\varphi_{\delta\nu}L'_-\big) +$$
$$+ (1+g^2)\,\widetilde{\Lambda}_{\delta'\nu}\big(\Lambda_{\delta\mu}L'_- + i\varrho\,\varphi_{\delta\mu}L'_+\big) +$$
$$+ 2g\,\widetilde{\varphi}_{\delta'\nu}\big(\varrho\Lambda_{\delta\mu}L'_+ + i\,\varphi_{\delta\mu}L'_-\big)\Big]L_{n-1}^1 +$$
$$+ 8\,(1+g^2)\Big[\Lambda_{\delta'\delta}\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu} - 2g/(1+g^2)\,i\,\varphi_{\delta'\delta}\widetilde{\varphi}_{\mu\nu} +$$
$$+ \Lambda_{\delta'\mu}\Lambda_{\delta\nu} - \varphi_{\delta'\mu}\varphi_{\delta\nu}\Big]L_{n-1}^1L_{n'-1}^1\Big\} +$$
$$+ 2m^2(1-g^2)\Big[\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}L_+^{(1)} + \Lambda_{\mu\nu}L_+^{(2)} + i\varrho\varphi_{\mu\nu}L_-^{(2)}\Big], \quad (23)$$

где $L_\pm = L_n \pm L_{n-1}$, $L'_\pm = L_{n'} \pm L_{n'-1}$, $L_\pm^{(1)} = L_nL_{n'} \pm L_{n-1}L_{n'-1}$, $L_\pm^{(2)} = L_nL_{n'-1} \pm L_{n-1}L_{n'}$ и, чтобы не загромождать запись, у всех функций $L$ аргументы не указаны.

Опуская подробности вычислений, приведем окончательный результат для свертки тензоров $N_{\mu\nu}$ (19) и $L_{\mu\nu}$ (23). С использованием дополнительных соотношений

$$\begin{gathered}\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma},\\ \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\varphi}_{\sigma\nu} + \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\varphi}_{\nu\rho} = 0,\\ \varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma} - \Lambda_{\mu\sigma}\Lambda_{\nu\rho},\\ \Lambda_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} + \Lambda_{\mu\rho}\varphi_{\sigma\nu} + \Lambda_{\mu\sigma}\varphi_{\nu\rho} = 0,\end{gathered} \quad (24)$$

данная свертка может быть записана в следующем лоренц-инвариантном виде:

$$\Phi_{n,n'}(u,u') = \frac{1}{16}\,L_{\mu\nu}N_{\mu\nu} = m^2\,(1-g^2)\times$$
$$\times\Big[(k\Lambda k')L_+^{(1)} + (k\widetilde{\Lambda}k')L_+^{(2)} - \varrho\,(k\widetilde{\varphi}k')L_-^{(2)}\Big] +$$
$$+ (1+g^2)\Big[(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\widetilde{\Lambda}k') + (p\widetilde{\varphi}k)(p'\widetilde{\varphi}k')\Big]L_+^{(1)} +$$
$$+ 2\varrho g\Big[(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\widetilde{\varphi}k') + (p\widetilde{\varphi}k)(p'\widetilde{\Lambda}k')\Big]L_-^{(1)} +$$
$$+ \Big[2g\,(p\widetilde{\varphi}p')(k\widetilde{\varphi}k') - (1+g^2)\,(p\widetilde{\Lambda}p')(k\widetilde{\Lambda}k')\Big]L_+^{(2)} -$$
$$- \varrho\Big[2g(p\widetilde{\varphi}p')(k\widetilde{\Lambda}k') - (1+g^2)(p\widetilde{\Lambda}p')(k\widetilde{\varphi}k')\Big]L_-^{(2)} -$$
$$- 2\varrho\Big[(1-g)^2(p'\widetilde{\varphi}k)(p\Lambda k') - (1+g)^2(p'\widetilde{\varphi}k')(p\Lambda k)\Big]\times$$
$$\times L'_+L_{n-1}^1 + 2\Big[(1-g)^2(p'\widetilde{\Lambda}k)(p\Lambda k') +$$
$$+ (1+g)^2(p'\widetilde{\Lambda}k')(p\Lambda k)\Big]L'_-L_{n-1}^1 +$$
$$+ 2\varrho\Big[(1+g)^2(p\widetilde{\varphi}k)(p'\Lambda k') - (1-g)^2(p\widetilde{\varphi}k')(p'\Lambda k)\Big]\times$$
$$\times L_+L_{n'-1}^1 + 2\Big[(1+g)^2(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\Lambda k') +$$
$$+ (1-g)^2(p\widetilde{\Lambda}k')(p'\Lambda k)\Big]L_-L_{n'-1}^1 +$$
$$+ 8\Big[(1+g)^2\,(p\Lambda k)(p'\Lambda k') +$$
$$+ (1-g)^2\,(p\Lambda k')(p'\Lambda k)\Big]L_{n-1}^1L_{n'-1}^1, \quad (25)$$

где аргументами функций $L$ являются $u = 2(p\Lambda p)/(eB)$ и $u' = 2(p'\Lambda p')/(eB)$.

Просуммированная по поляризациям всех частиц вероятность перехода в единицу времени из начального состояния в конечное для процесса (1) дается следующим выражением:

$$\mathcal{W}_1 = \sum_{s,s'=\pm1}\frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} = \frac{(-1)^{n+n'}16\,\pi^2\,\widetilde{G}_F^2}{L_y^2L_z^2V\,\varepsilon_n\omega\,\varepsilon'_{n'}\omega'}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{u+u'}{2}\Big\}\,\Phi_{n,n'}(u,u')\times$$
$$\times\,\delta^{(4)}(\mathcal{P})\;dp_1dp'_1, \quad (26)$$

где $\mathcal{P} = p + k - p' - k'$. Вероятности остальных нейтрино-электронных процессов (2)–(9) легко могут быть получены из (26) использованием кроссинг-симметрии.

Обсудим лоренц-инвариантность полученного для квадрата $S$-матричного элемента выражения. Как видно из (16), оно содержит свертку тензоров $L_{\mu\nu}$ и $N_{\mu\nu}$, представленную в явно инвариантном виде (25). Инвариантность остальной части выражения требует дополнительного пояснения. А именно, необходимо отметить, что все вычисления проводились в предположении наличия чисто магнитного поля. Таким образом, инвариантность в данном случае не подразумевает движение среды как целого поперек линий напряженности магнитного поля, так как это приведет к возникновению в ней дополнительной электрической составляющей. В этом смысле полученное для квадрата $S$-матричного элемента выражение действительно является инвариантным, так как при переходе в другую систему отсчета в нем преобразуются лишь временная и третья компоненты 4-векторов. Однако используемое приближение не приводит к потере общности полученного результата, так как хорошо выполняется для сред, содержащих заряженные частицы. Это связано с тем, что вследствие высокой электропроводности такая среда движется только вдоль линий напряженности магнитного поля. Это можно непосредственно получить из закона Ома для тока в отсутствие электрического поля $\mathbf{j} = \sigma\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$, из которого следует, что при бесконечной проводимости среды $\sigma$ конечный ток возможен лишь при условии $[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = 0$. Это соответствует условию вмороженности магнитного поля в плазму, когда скорость движения среды $\mathbf{v}$ параллельна его напряженности $\mathbf{B}$.

В заключение отметим, что полученное в данной работе выражение для квадрата $S$-матричного элемента не только представлено в явно инвариантном виде, но и не встречалось в подобной форме ранее в литературе, т. е. является новым. Кроме того, данный результат легко может быть обобщен на нейтринные процессы с участием мюона и тауона. Для этого достаточно в выражении (25) сделать замену $m^2 \to m_1 m_2$, где $m_1$ и $m_2$ — массы участвующих в процессе заряженных лептонов. Для векторной и аксиальной констант заряженного лептонного тока необходимо использовать выражения $c_V = \pm 1/2 + 2\sin^2\theta_W$ и $c_A = \pm 1/2$, где знак плюс соответствует процессам, которые идут как через нейтральный $Z$-, так и заряженный $W$-бозоны, а знак минус отвечает процессам с участием только $Z$-бозона. Отметим также, что в приведенных выражениях явно сохранен знак заряда частицы $\varrho$. Таким образом, полученный результат может быть достаточно легко обобщен и на процессы взаимодействия нейтрино с положительно заряженными частицами, например, протонами.

## 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПОПЕРЕЧНЫМ ИМПУЛЬСАМ

Дальнейшее использование полученных вероятностей нейтрино-электронных процессов зависит от конкретно решаемой задачи. Однако в подавляющем большинстве астрофизических объектов нейтрино и антинейтрино не находятся в равновесии со средой и общий подход к их описанию основывается на использовании неравновесной функции распределения $f_\nu(k, \mathrm{x})$, являющейся решением релятивистского кинетического уравнения Больцмана [66]:

$$k^\alpha \left( \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathrm{x}^\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, k^\gamma \frac{\partial f_\nu}{\partial k^\beta} \right) = \left( \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau} \right)_{coll}, \tag{27}$$

где $\tau$ — собственное время, $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$ — символы Кристоффеля, соответствующие метрике пространства-времени. Правая часть уравнения Больцмана называется интегралом столкновений. Приведем его в явном виде для наиболее часто встречающегося в литературе процесса двухчастичного рассеяния

$$\nu_{(k)} + a_{(p)} \to b_{(k')} + c_{(p')}, \tag{28}$$

где под $\nu$ понимается нейтрино или антинейтрино в начальном состоянии, $a$, $b$ и $c$ — произвольные частицы, среди которых, в частности, также могут быть нейтрино или антинейтрино. В скобках указаны соответствующие частицам 4-импульсы. Отметим, что под произвольными частицами здесь подразумеваются лишь те, которые допускаются рассматриваемым лагранжианом взаимодействия (10). Для данного типа процессов интеграл столкновений в сопутствующей системе отсчета может быть записан в следующем виде [67]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{I}}_{coll} = \left( \frac{\partial f_\nu}{\partial t} \right)_{coll} = \int dn_a\, dn_b\, dn_c \times \\ \times \mathcal{W} \Big\{ f_b(k') f_c(p') [1 - f_\nu(k)] [1 \pm f_a(p)] - \\ - f_\nu(k) f_a(p) [1 \pm f_b(k')] [1 \pm f_c(p')] \Big\}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $t$ — время в сопутствующей системе отсчета, $f_\nu(k)$, $f_a(p)$, $f_b(k')$, $f_c(p')$ — функции распределения частиц, участвующих в реакции, причем знак плюс в комбинациях $1 \pm f_i$ соответствует бозонам, а минус — фермионам, $\mathcal{W}$ — вероятность процесса в единицу времени, $dn_i$ — элемент фазового объема частиц $i$-го сорта. В отсутствие внешних полей в сопутствующей системе отсчета элемент фазового объема может быть записан как

$$dn_0 = \sum_s \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3}, \tag{30}$$

где $V$ — нормировочный объем, $d^3p$ — элемент объема импульсного пространства, а сумма берется по всем спиновым состояниям $s$ частицы.

Левая часть уравнения Больцмана представляет собой инвариантную производную по времени от функции распределения нейтрино $f_\nu$, т. е. характеризует изменение числа частиц в элементе фазового объема $dn_\nu$ с течением времени. Таким образом, первое и второе слагаемые в интеграле столкновений $\hat{\mathrm{I}}_{coll} = \hat{\mathrm{I}}_\downarrow - \hat{\mathrm{I}}_\uparrow$ (29) имеют смысл числа нейтрино, соответственно попадающих в $dn_\nu$ за счет обратной к (28) реакции и уходящих из него за счет прямого процесса. Следовательно, интегрирование этих слагаемых по $dn_\nu$ будет давать полное число обратных и прямых процессов, происходящих в нормировочном объеме $V$. Отметим, что более удобной для использования величиной является скорость процесса

$$\varGamma_{\downarrow,\uparrow} = \frac{1}{V}\int \hat{\mathrm{I}}_{\downarrow,\uparrow}\, dn_\nu, \tag{31}$$

определяющая число реакций данного типа, протекающих в единичном объеме среды в единицу времени. В частности, эта величина более удобна тем, что является лоренц-инвариантной. Данное определение легко обобщается на случай нейтринных процессов с участием произвольного числа частиц в начальном и конечном состояниях. Действительно, скорость любого процесса может быть представлена в виде

$$\varGamma = \frac{1}{V}\int \prod_{\ell_i,\ell_f} dn_{\ell_i}\, dn_{\ell_f} \mathcal{W} f_{\ell_i}\left(1 \pm f_{\ell_f}\right). \tag{32}$$

Здесь индексы $\ell_i$ и $\ell_f$ относятся к начальным и конечным частицам, интегрирование ведется по фазовым объемам $dn_i$ всех частиц с учетом их функций распределения $f_i$, причем знак плюс соответствует бозонам, а минус — фермионам. Отметим, что скорости прямого и обратного процессов различаются лишь произведением, содержащим функции распределения частиц. Аналогичным образом могут быть определены энергия и импульс, уносимые (анти)нейтрино в данном процессе из единичного объема среды в единицу времени:

$$\mathcal{Q}^\mu = \frac{1}{V}\int \prod_{\ell_i,\ell_f} dn_{\ell_i}\, dn_{\ell_f}\, q^\mu\, \mathcal{W} f_{\ell_i}\left(1 \pm f_{\ell_f}\right). \tag{33}$$

Здесь $q^\mu$ — разность между суммами конечных и начальных 4-импульсов всех (анти)нейтрино, участвующих в реакции.

Дальнейшие вычисления, для определенности, будем проводить для введенных выше $\varGamma$ (32) и $\mathcal{Q}^\mu$ (33), поскольку результаты, полученные для них, легко могут быть распространены на другие интегральные величины, соответствующие нейтрино-электронным процессам. Как отмечалось выше, во внешнем магнитном поле поперечный импульс заряженных частиц квантуется, что приводит к изменению их фазового объема. Так, в выбранной нами калибровке Ландау для векторного потенциала магнитного поля, элемент фазового объема заряженных фермионов будет иметь следующий вид [68]:

$$dn_B = \sum_{n,s} \frac{L_y L_z dp_2 dp_3}{(2\pi)^2}, \tag{34}$$

где $L_y$ и $L_z$ — нормировочные длины, $p_2$ и $p_3$ — соответствующие компоненты импульса, а суммирование ведется по всем уровням Ландау $n$ и спиновым состояниям $s$ частицы. С учетом того, что в рассматриваемых нейтрино-электронных процессах участвуют два заряженных фермиона, скорости этих реакций и передаваемые в них от среды к нейтрино энергия и импульс могут быть представлены как

$$\begin{gathered}
\varGamma_j = \frac{4\widetilde{G}_F^2}{(2\pi)^8}\sum_{n,n'}(-1)^{n+n'} \times \\
\times \int \frac{d^3k}{\omega}\,\frac{d^3k'}{\omega'}\,\frac{d^3p}{\varepsilon_n}\,\frac{d^3p'}{\varepsilon'_{n'}}\,\varPhi_j\,\Pi_j\,\delta^{(4)}(\mathcal{P}_j)\,, \\
\mathcal{Q}_j^\mu = \frac{4\widetilde{G}_F^2}{(2\pi)^8}\sum_{n,n'}(-1)^{n+n'} \times \\
\times \int \frac{d^3k}{\omega}\,\frac{d^3k'}{\omega'}\,\frac{d^3p}{\varepsilon_n}\,\frac{d^3p'}{\varepsilon'_{n'}}\,q_j^\mu\,\varPhi_j\,\Pi_j\,\delta^{(4)}(\mathcal{P}_j)\,,
\end{gathered} \tag{35}$$

где индекс «$j$» соответствует номеру процесса из набора (1)–(9). Здесь введена функция

$$\varPhi_j = e^{-(u+u')/2}\,\Phi^{(j)}_{n,n'}(u,u'),$$

получающаяся из

$$\Phi^{(1)}_{n,n'}(u,u') = \Phi_{n,n'}(u,u')$$

(см. (25)) после соответствующих реакции с номером $j$ кроссинг-симметричных замен квантовых чисел в (26), $\Pi_j = \prod f_{\ell_i}(1-f_{\ell_f})$ — произведение, содержащее соответствующие процессу функции распределения начальных и конечных частиц, $\mathcal{P}_j$ — сохраняющаяся в реакции суперпозиция 4-импульсов, $q_j^\mu$ — четырехмерный импульс, передаваемый в данном процессе от среды к нейтрино.

Необходимо отметить, что хотя элемент фазового объема заряженного фермиона в магнитном поле (34) не содержит компоненту импульса $p_1$, она эффективно появляется в приведенных выше выражениях для скоростей процессов и передаваемых в

**Таблица.** Коэффициенты $\widetilde{\sigma}$, $\sigma$, $\sigma'$ и 4-импульс $q$, передаваемый от среды к (анти)нейтрино. Индекс $j$ указывает на конкретную реакцию из набора прямых нейтрино-электронных процессов (1)–(9)

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\widetilde{\sigma}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $\sigma$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\sigma'$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $q$ | $k'-k$ | $k-k'$ | $k'-k$ | $k-k'$ | $k+k'$ | $k'-k$ | $k-k'$ | $k+k'$ | $k+k'$ |

них энергии и импульсе. Это связано с тем, что используемая здесь матрица плотности (13) представлена в виде интеграла по данной нефизической компоненте импульса. Такое представление эффективно восстанавливает в интегральных величинах (35) трехмерное импульсное пространство для заряженных фермионов, а также четырехмерную $\delta$-функцию от сохраняющейся в процессе комбинации импульсов. Таким образом, приведенные выражения для интегральных величин по форме записи практически полностью совпадают с аналогичными величинами для нейтрино-электронных процессов без магнитного поля. Отличие состоит лишь в дополнительном суммировании по квантовым числам $n$ и $n'$. Следовательно, с точностью до числового коэффициента, функция $\varPhi_j = e^{-(u+u')/2}\,\Phi^{(j)}_{n,n'}(u,u')$ выступает здесь в роли квадрата инвариантного матричного элемента нейтрино-электронного процесса с номером $j$ в присутствии внешнего магнитного поля. Отметим также, что в выбранной форме записи скорости нейтрино-электронных процессов (передаваемые в них энергия и импульс) имеют явно инвариантный (ковариантный) вид.

Интегральные величины для нейтрино-электронных процессов могут быть дополнительно упрощены при использовании свойств полиномов Лагерра, приведенных в Приложении. Так, соотношения (46)–(48) позволяют провести интегрирование (35) по поперечным импульсам заряженных частиц. Отметим однако, что такая процедура может нарушить исходную кроссинг-симметрию вероятностей переходов нейтрино-электронных процессов и ее сохранение требует дополнительной проверки. Такая проверка является принципиально важной, поскольку в ряде работ явные вычисления, включающие интегрирование по поперечным импульсам заряженных лептонов, проводились лишь для одного нейтрино-электронного процесса, а выражения для других реакций получались путем кроссинг-симметричных замен импульсов уже после интегрирования (см., например, [22, 31]). Проверим сохранение кроссинг-симметрии непосредственным вычислением. Для определенности будем рассматривать только прямые процессы (1)–(9), так как для обратных результат может быть получен простой перестановкой начальных и конечных 4-импульсов. Сохраним введенные выше обозначения для процесса рассеяния нейтрино на электроне (1). Для остальных реакций под $k$, $p$, $k'$ и $p'$ будем понимать 4-импульсы частиц, которым они соответствуют после кроссинг-симметричных замен без учета их знака (для удобства квантовые числа, соответствующие частицам после замен, приведены непосредственно в определении реакций (1)–(9)). При таком определении квантовых чисел частиц, функции $\Phi^{(j)}_{n,n'}(u,u')$ остаются неизменными и совпадают с (25) для всех процессов, кроме (5)–(7), в которых задействована электрон-позитронная пара. В этих реакциях следует изменить знак массового члена: $\Phi^{(5)-(7)}_{n,n'}(u,u') = \Phi_{n,n'}(u,u')[m^2\to -m^2]$. Таким образом, для всех рассматриваемых процессов и принятых обозначений для импульсов и уровней Ландау частиц можно записать:

$$\Phi^{(j)}_{n,n'}(u,u') = \Phi_{n,n'}(u,u')\left[m^2 \to \widetilde{\sigma}_j\, m^2\right], \qquad (36)$$

где $\widetilde{\sigma}_j = \pm 1$ — знак массового члена для реакции с номером $j$. Кроме того, представим сохраняющиеся в реакциях суперпозиции 4-импульсов в следующем виде:

$$\mathcal{P}^{\mu}_j = \sigma_j\, p^{\mu} - \sigma'_j\, p'^{\mu} - q^{\mu}_j, \qquad (37)$$

где $q^{\mu}$ — передаваемый в реакции от среды к нейтрино 4-импульс, а коэффициенты $\sigma_j$, $\sigma'_j = \pm 1$. Для рассматриваемых прямых процессов (1)–(9) соответствующие величины приведены в таблице.

Для проведения дальнейших вычислений необходимо конкретизировать вид функций распределения заряженных частиц. Будем предполагать далее, что электроны и позитроны находятся в локальном термодинамическом равновесии с остальной средой. В этом случае они описываются функциями распределения Ферми–Дирака

$$f_{e^{\mp}}(\varepsilon) = \left[e^{(\varepsilon \mp \mu_e)/T} + 1\right]^{-1},$$

где $\mu_e$ — химический потенциал электронов и $T$ — локальная температура среды. В магнитном поле энергия заряженных фермионов не зависит от поперечных составляющих импульса. Таким образом, эти компоненты импульса входят лишь в функции $\Phi_j$ и дельта-функции, по крайней мере, в случае равновесной среды. Как следует из структуры $\Phi^{(j)}_{n,n'}(u, u')$, при интегрировании по поперечным импульсам заряженных частиц возникают три типа интегралов. В скалярных интегралах зависимость от поперечных составляющих импульса входит лишь через переменные $u$ и $u'$, в векторных — подынтегральная функция в качестве дополнительного множителя содержит $p^\alpha$ или $p'^\alpha$, а в тензорных имеется билинейная конструкция $p^\alpha p'^\beta$. Все три типа интегралов могут быть достаточно легко вычислены с использованием выражений, приведенных в Приложении. Применительно к исследуемым нейтрино-электронным процессам возникают скалярные интегралы

$$\begin{gathered}
(-1)^{n+n'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^{(1)}_{\pm}\, e^{-(u+u')/2}\, \delta^{(2)}_{\perp}(\mathcal{P})\; d^2p_\perp d^2p'_\perp = \\
= \frac{\pi}{2}\, eB\, F^{(1)}_{\pm}(t), \\
(-1)^{n+n'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^{(2)}_{\pm}\, e^{-(u+u')/2}\, \delta^{(2)}_{\perp}(\mathcal{P})\; d^2p_\perp d^2p'_\perp = \\
= -\frac{\pi}{2}\, eB\, F^{(2)}_{\pm}(t), \\
F^{(1)}_{\pm}(t) = F^2_{n,n'}(t) \pm F^2_{n-1,n'-1}(t), \\
F^{(2)}_{\pm}(t) = F^2_{n,n'-1}(t) \pm F^2_{n-1,n'}(t),
\end{gathered} \tag{38}$$

векторные интегралы

$$\begin{gathered}
(-1)^{n+n'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p^\alpha\, L^1_{n-1}\, L'_{\pm}\, e^{-(u+u')/2} \times \\
\times\, \delta^{(2)}_{\perp}(\mathcal{P})\; d^2p_\perp d^2p'_\perp = \\
= \sigma\, \frac{\pi}{2}\, eB \sqrt{\frac{eB\,n}{2}}\, F_{\mp}(t)\, \frac{q^\alpha}{\sqrt{q\Lambda q}}, \\
(-1)^{n+n'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p'^\alpha\, L_{\pm}\, L^1_{n'-1}\, e^{-(u+u')/2} \times \\
\times\, \delta^{(2)}_{\perp}(\mathcal{P})\; d^2p_\perp d^2p'_\perp = \\
= \sigma'\, \frac{\pi}{2}\, eB \sqrt{\frac{eB\,n'}{2}}\, F'_{\mp}(t)\, \frac{q^\alpha}{\sqrt{q\Lambda q}}, \\
F_{\pm}(t) = F_{n,n'}(t)\, F_{n-1,n'}(t) \pm \\
\pm F_{n,n'-1}(t)\, F_{n-1,n'-1}(t), \\
F'_{\pm}(t) = F_{n,n'}(t)\, F_{n,n'-1}(t) \pm \\
\pm F_{n-1,n'}(t)\, F_{n-1,n'-1}(t)
\end{gathered} \tag{39}$$

и тензорный интеграл

$$\begin{gathered}
(-1)^{n+n'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p^\alpha\, p'^\beta\, L^1_{n-1}\, L^1_{n'-1}\, e^{-(u+u')/2} \times \\
\times\, \delta^{(2)}_{\perp}(\mathcal{P})\; d^2p_\perp d^2p'_\perp = \sigma\sigma'\, \frac{\pi}{4}\, eB \sqrt{\frac{eB\,n}{2}} \times \\
\times \sqrt{\frac{eB\,n'}{2}} \left[F_{n,n'}(t)\, F_{n-1,n'-1}(t)\; \Lambda^{\alpha\beta} + \right. \\
\left. + F_{n,n'-1}(t)\, F_{n-1,n'}(t) \left(2\, \frac{q^\alpha q^\beta}{q\Lambda q} - \Lambda^{\alpha\beta}\right)\right],
\end{gathered} \tag{40}$$

где $\delta^{(2)}_{\perp}(\mathcal{P})$ — произведение двух $\delta$-функций от поперечных к магнитному полю компонент импульса, $t = (q\Lambda q)/(2eB)$, и $F_{n,n'}(t)$ — функция Лагерра (44), основные свойства которой можно найти в Приложении. С использованием полученных выше выражений интегрирование по поперечным импульсам заряженных частиц приводит к следующему результату:

$$\begin{gathered}
\Gamma_j = \frac{\widetilde{G}^2_F\, eB}{(2\pi)^7} \sum_{n,n'} \int \frac{d^3k}{\omega}\, \frac{d^3k'}{\omega'}\, \frac{dp_3}{\varepsilon_n}\, \frac{dp'_3}{\varepsilon'_{n'}} \times \\
\times\, \mathcal{A}_j\, \Pi_j\, \delta^{(2)}_{\parallel}(\mathcal{P}_j), \\
\mathcal{Q}^\mu_j = \frac{\widetilde{G}^2_F\, eB}{(2\pi)^7} \sum_{n,n'} \int \frac{d^3k}{\omega}\, \frac{d^3k'}{\omega'}\, \frac{dp_3}{\varepsilon_n}\, \frac{dp'_3}{\varepsilon'_{n'}}\, q^\mu_j \times \\
\times\, \mathcal{A}_j\, \Pi_j\, \delta^{(2)}_{\parallel}(\mathcal{P}_j).
\end{gathered} \tag{41}$$

Здесь $\delta^{(2)}_{\parallel}(\mathcal{P})$ — произведение $\delta$-функций от сохраняющихся энергии и компоненты импульса вдоль магнитного поля, а функции $\mathcal{A}_j$ задаются следующим выражением:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_j = {}& \widetilde{\sigma}_j m^2(1-g^2)\Big[(k\Lambda k')F_+^{(1)}(t) - (k\widetilde{\Lambda}k')F_+^{(2)}(t) + \\
&+ \varrho\,(k\widetilde{\varphi}k')F_-^{(2)}(t)\Big] + (1+g^2)\Big[(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\widetilde{\Lambda}k') + \\
&+ (p\widetilde{\varphi}k)(p'\widetilde{\varphi}k')\Big]F_+^{(1)}(t) + 2\varrho g\Big[(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\widetilde{\varphi}k') + \\
&+ (p\widetilde{\varphi}k)(p'\widetilde{\Lambda}k')\Big]F_-^{(1)}(t) + \Big[(1+g^2)\,(p\widetilde{\Lambda}p')(k\widetilde{\Lambda}k') - \\
&- 2g\,(p\widetilde{\varphi}p')(k\widetilde{\varphi}k')\Big]F_+^{(2)}(t) - \varrho\Big[(1+g^2)(p\widetilde{\Lambda}p')(k\widetilde{\varphi}k') - \\
&- 2g(p\widetilde{\varphi}p')(k\widetilde{\Lambda}k')\Big]F_-^{(2)}(t) + \sigma_j\Big[(1-g)^2(p'\widetilde{\Lambda}k)(q\Lambda k') + \\
&+ (1+g)^2(p'\widetilde{\Lambda}k')(q\Lambda k)\Big]\sqrt{\frac{2eBn}{q\Lambda q}}\,F_+(t) - \\
&- \varrho\sigma_j\Big[(1-g)^2(p'\widetilde{\varphi}k)(q\Lambda k') - (1+g)^2(p'\widetilde{\varphi}k')(q\Lambda k)\Big] \times \\
&\times \sqrt{\frac{2eBn}{q\Lambda q}}\,F_-(t) + \sigma_j'\Big[(1-g)^2(p\widetilde{\Lambda}k')(q\Lambda k) + \\
&+ (1+g)^2(p\widetilde{\Lambda}k)(q\Lambda k')\Big]\sqrt{\frac{2eBn'}{q\Lambda q}}\,F_+'(t) - \\
&- \varrho\sigma_j'\Big[(1-g)^2(p\widetilde{\varphi}k')(q\Lambda k) - (1+g)^2(p\widetilde{\varphi}k)(q\Lambda k')\Big] \times \\
&\times \sqrt{\frac{2eBn'}{q\Lambda q}}\,F_-'(t) + 4\sigma_j\sigma_j'\,(1+g^2)\Big\{\Big[2(k\Lambda q)(k'\Lambda q) - \\
&- (k\Lambda k')(q\Lambda q)\Big]F_{n,n'-1}(t)\,F_{n-1,n'}(t) + \\
&+ (k\Lambda k')(q\Lambda q)\,F_{n,n'}(t)\,F_{n-1,n'-1}(t)\Big\}\,\frac{eB}{q\Lambda q}\sqrt{nn'}. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Отметим, что приведенные выражения для скоростей нейтрино-электронных процессов, а также энергии и импульса, передаваемых в них от среды к нейтрино, остаются соответственно явно инвариантными и ковариантными и после интегрирования по импульсам заряженных частиц. Кроме того, в $\mathcal{A}_j$ сохранен знак заряда $\varrho$, что позволяет использовать полученный результат для аналогичных реакций с участием положительно заряженных частиц, например, протонов.

Приведенные выражения позволяют непосредственно убедиться в том, что исходная кроссинг-симметрия $S$-матричных элементов нейтрино-электронных процессов сохраняется и после их интегрирования по поперечным импульсам заряженных частиц. Действительно, можно взять за основу, например, результат для процесса рассеяния нейтрино на электроне (1) и сравнить выражения, следующие из него после кроссинг-симметричных замен, с теми, что были получены выше непосредственным вычислением. Для всех нейтрино-электронных процессов выражения совпадают, что напрямую доказывает сохранение в них кроссинг-симметрии после интегрирования.

Отметим, что функция (42) может быть представлена в более простом и удобном для дальнейшего использования виде. А именно, можно сократить число входящих в него билинейных структур от функций $F_{n,n'}$. Как показано в Приложении, для нейтрино-электронных процессов имеются всего три независимые структуры. Кроме того, следует учесть, что нейтрино взаимодействуют с отрицательно заряженными лептонами, для которых $\varrho = -1$. С учетом этого, приведем результат для процесса (1), который может быть представлен в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 = {}& m^2(1-g^2)\Big[(k\Lambda k')F_+^{(1)}(t) - (k\widetilde{\Lambda}k')F_+^{(2)}(t) + \\
&+ (k\widetilde{\varphi}k')\,\frac{n-n'}{t}\,F_-^{(1)}(t)\Big] + (1+g^2)\times \\
&\times \Big[(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\widetilde{\Lambda}k') + (p\widetilde{\varphi}k)(p'\widetilde{\varphi}k')\Big]F_+^{(1)}(t) - \\
&- 2g\Big[(p\widetilde{\Lambda}k)(p'\widetilde{\varphi}k') + (p\widetilde{\varphi}k)(p'\widetilde{\Lambda}k')\Big]F_-^{(1)}(t) + \\
&+ \Big[(1+g^2)\,(p\widetilde{\Lambda}p')(k\widetilde{\Lambda}k') - 2g(p\widetilde{\varphi}p')(k\widetilde{\varphi}k')\Big]F_+^{(2)}(t) + \\
&+ \Big[2g\,(p\widetilde{\varphi}p')(k\widetilde{\Lambda}k') - (1+g^2)\,(p\widetilde{\Lambda}p')(k\widetilde{\varphi}k')\Big] \times \\
&\times \frac{n-n'}{t}\,F_-^{(1)}(t) - \\
&- \Big[(1-g)^2(p'\widetilde{\Lambda}k)(q\Lambda k') + (1+g)^2(p'\widetilde{\Lambda}k')(q\Lambda k)\Big] \times \\
&\times \left(\frac{n-n'}{2\,t}\,F_+^{(1)}(t) + \frac{F_+^{(2)}(t)}{2}\right) - \\
&- \Big[(1-g)^2(p'\widetilde{\varphi}k)(q\Lambda k') - (1+g)^2(p'\widetilde{\varphi}k')(q\Lambda k)\Big] \times \\
&\times \frac{n}{t}F_-^{(1)}(t) - \\
&- \Big[(1-g)^2(p\widetilde{\Lambda}k')(q\Lambda k) + (1+g)^2(p\widetilde{\Lambda}k)(q\Lambda k')\Big] \times \\
&\times \left(\frac{n-n'}{2\,t}\,F_+^{(1)}(t) - \frac{F_+^{(2)}(t)}{2}\right) + \\
&+ \Big[(1-g)^2(p\widetilde{\varphi}k')(q\Lambda k) - (1+g)^2(p\widetilde{\varphi}k)(q\Lambda k')\Big] \times \\
&\times \frac{n'}{t}\,F_-^{(1)}(t) + (1+g^2)\times \\
&\times \Big\{\Big[2(k\Lambda q)(k'\Lambda q) - (k\Lambda k')(q\Lambda q)\Big] \times \\
&\times \left(\frac{(n-n')^2}{2\,t^2}\,F_+^{(1)}(t) - \frac{n+n'}{2\,t}\,F_+^{(2)}(t)\right) + \\
&+ (k\Lambda k')(q\Lambda q)\Big(\frac{n+n'}{2\,t}\,F_+^{(1)}(t) - \frac{F_+^{(2)}(t)}{2}\Big)\Big\}, \qquad (43)
\end{aligned}
$$

где $t = (q\Lambda q)/(2eB)$, $q = k' - k$ и все обозначения импульсов соответствуют процессу (1). Как было показано выше, скорости остальных нейтрино-электронных процессов и передаваемые в них энергия и импульс могут быть получены из (41) и (43) с использованием кроссинг-симметрии. Еще раз отметим, что полученные выражения представлены в явно инвариантном (ковариантном) виде, что дает возможность их использования в случае, когда среда движется как целое вдоль линий напряженности магнитного поля. Кроме того, они максимально упрощены в смысле дальнейшего интегрирования по импульсам частиц и представлены в унифицированной для всех нейтрино-электронных процессов форме. Насколько нам известно, выражение (43), записанное в явно лоренц-инвариантном виде, ранее в литературе не встречалось и является новым.

Как отмечалось выше, при исследовании нейтрино-электронных процессов применялись не только различные техники вычислений, но и промежуточные расчеты, зачастую, проводились с использованием определенных упрощающих предположений. Так, одним из распространенных упрощений является пренебрежение функциями распределения нейтрино (см., например, [22]), что справедливо для процессов их излучения в условиях нейтронных звезд и аккреционных дисков. В этом случае, интегрирование по нейтринному току $N_{\mu\nu}$ может быть существенно упрощено [4]. Однако такого рода упрощения делают невозможным непосредственное сравнение результатов данных работ с полученными выше. Как показал анализ существующей по нейтрино-электронным процессам литературы, сравнение может быть проведено с результатами работы [52], где исследовался процесс рассеяния нейтрино на электроне во внешнем магнитном поле. В указанной статье вычислялась величина, аналогичная приведенным выше скоростям реакций (41). Расчет проводился в технике, отличной от используемой в настоящей статье, но, как показало сравнение, результат работы [52] идентичен полученному выше выражению для скорости рассеяния нейтрино на электроне в системе отсчета, где среда покоится как целое. В частности, в данной системе отсчета функция $\mathcal{A}_1$ в форме, приведенной в (42), совпадает с функцией $D$ (формула (A.7) в [52]). Таким образом, проведен независимый расчет этого процесса с использованием другой техники, подтверждающий результат [52], что касается процессов (2)–(9), то подобное представление для квадратов инвариантных матричных элементов нам неизвестно. Непосредственное сравнение с результатами других работ, где исследовались нейтрино-электронные процессы, оказалось затруднительным по указанной выше причине.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовались нейтрино-электронные процессы (1)–(9) в среде с произвольным по напряженности магнитным полем. В технике, основанной на использовании матриц плотности частиц, для данных реакций получены инвариантные квадраты $S$-матричных элементов, в форме, не зависящей от выбора системы отчета, движущейся вдоль линий напряженности магнитного поля. Отметим, что вероятности нейтрино-электронных процессов в (25), (26) не встречались ранее в литературе. Кроме того, данный результат легко может быть обобщен на процессы взаимодействия нейтрино с мюонами и тауонами, а также протонами.

Рассмотрен общий подход к описанию нейтрино, взаимодействующего со средой, на основе релятивистского уравнения Больцмана. На примере таких интегральных характеристик, как скорость нейтрино-электронных реакций, а также энергия и импульс, передаваемые в них от среды к нейтрино, проведено интегрирование по поперечным импульсам заряженных частиц. Результат такого интегрирования (41) представлен в явно лоренц-инвариантном виде для скоростей и ковариантном виде для четырехмерных переданных импульсов. Кроме того, полученные выражения приведены в более упрощенном для дальнейшего использования виде (43). Они представлены в унифицированной для всех нейтрино-электронных процессов форме и совпадают с имеющимися в литературе [52] в системе отсчета, где среда покоится. Отметим также, что представленные в работе результаты можно использовать не только для непосредственного расчета скоростей процессов и передаваемых в них энергии и импульса в условиях, соответствующих различным астрофизическим объектам. Из них также могут быть получены и другие интегральные величины, в частности, интегралы столкновений, соответствующие нейтрино-электронным процессам, которые требуются для моделирования распространения нейтрино в среде с произвольным по напряженности магнитным полем.

Авторам приятно поблагодарить А. Я. Пархоменко за многочисленные обсуждения, конструктивную критику и ценные советы. Один из авторов (А. Д.) приносит благодарность за гостеприимство Институту физики Макса Планка (Мюнхен, Германия), а также Георгу Раффельту за поддержку и интересные обсуждения. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 15-02-06033-а, 16-32-00066 мол-а), Российско-немецкого междисциплинарного научного центра (G-RISC) (проект № A-2017b-1), а также в рамках реализации НИР ЯрГУ ОП-2Г-02-2017.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В задачах, связанных с расчетами элементарных процессов с участием заряженных фермионов, происходящих в присутствии постоянного однородного магнитного поля, часто возникают функции, получившие в литературе название функций Лагерра. В частности, они возникают при интегрировании квадратов $S$-матричных элементов реакций по поперечным к магнитному полю компонентам импульсов заряженных частиц. Хотя можно встретить различные варианты определения этих функций, здесь мы будем следовать работе [69], определив функцию Лагерра как

$$F_{\ell,m}(t) = (-1)^{\ell-m} F_{m,\ell}(t) = \\ = \sqrt{\frac{\ell!}{m!}}\, t^{(m-\ell)/2}\, e^{-t/2} L_\ell^{m-\ell}(t). \quad (44)$$

Далее, если это не вызывает недоразумений, аргумент функции будет опускаться, т. е. считается, что $F_{\ell,m}(t) \equiv F_{\ell,m}$. Приведем несколько базовых соотношений на данные функции, которые непосредственно следуют из свойств обобщенных полиномов Лагерра и могут быть найдены, например, в работе [69]:

$$\begin{gathered} \sqrt{\ell}\, F_{\ell,m} - \sqrt{m}\, F_{\ell-1,m-1} = -\sqrt{t}\, F_{\ell-1,m}, \\ \sqrt{\ell}\, F_{\ell-1,m-1} - \sqrt{m}\, F_{\ell,m} = -\sqrt{t}\, F_{\ell,m-1}, \\ \sqrt{\ell}\, F_{\ell,m-1} + \sqrt{m}\, F_{\ell-1,m} = \\ = -(\ell-m)\, F_{\ell-1,m-1}/\sqrt{t}, \\ \sqrt{\ell}\, F_{\ell-1,m} + \sqrt{m}\, F_{\ell,m-1} = \\ = -(\ell-m)\, F_{\ell,m}/\sqrt{t}. \end{gathered} \quad (45)$$

Как правило, квадраты $S$-матричных элементов процессов в магнитном поле зависят не от самих функций Лагерра, а от их бинарных комбинаций. В используемой в данной статье технике, такая зависимость возникает после интегрирования по поперечным компонентам импульсов заряженных частиц, а именно, из следующих трех видов интегралов:

$$\int L_\ell(\mathrm{x}^2)\, L_m(\mathrm{y}^2)\, e^{-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)/2}\, \delta^{(2)}\big(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}\big)\, d^2\mathrm{x}\, d^2\mathrm{y} = \\ = \pi\, e^{-t} L_\ell^{m-\ell}(t)\, L_m^{\ell-m}(t) = (-1)^{\ell-m} \pi\, F_{\ell,m}^2(t), \quad (46)$$

$$\int \mathrm{x}_\alpha L_{\ell-1}^1(\mathrm{x}^2) L_m(\mathrm{y}^2)\, e^{-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)/2} \times \\ \times \delta^{(2)}\big(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}\big)\, d^2\mathrm{x}\, d^2\mathrm{y} = \\ = \frac{\pi}{2}\, \mathrm{z}_\alpha\, e^{-t}\, L_{\ell-1}^{m-\ell+1}(t)\, L_m^{\ell-m}(t) = \\ = (-1)^{\ell-m}\, \pi\, \frac{\mathrm{z}_\alpha}{\sqrt{\mathrm{z}^2}}\, \sqrt{\ell}\, F_{\ell,m}(t)\, F_{\ell-1,m}(t), \quad (47)$$

$$\int \mathrm{x}_\alpha\, \mathrm{y}_\beta\, L_{\ell-1}^1(\mathrm{x}^2)\, L_{m-1}^1(\mathrm{y}^2)\, e^{-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)/2} \times \\ \times \delta^{(2)}\big(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}\big)\, d^2\mathrm{x}\, d^2\mathrm{y} = \\ = \frac{\pi}{8}\, e^{-t}\Big[\big(2\,\mathrm{z}_\alpha \mathrm{z}_\beta - \mathrm{z}^2 \Lambda_{\alpha\beta}\big)\, L_{\ell-1}^{m-\ell+1}(t) L_{m-1}^{\ell-m+1}(t) - \\ - 4\,\Lambda_{\alpha\beta}\, \ell\, L_\ell^{m-\ell}(t) L_{m-1}^{\ell-m}(t)\Big] = (-1)^{\ell-m+1} \pi \sqrt{\ell m} \times \\ \times \left[\frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{2}\, F_{\ell,m}(t)\, F_{\ell-1,m-1}(t) + \left(\frac{\mathrm{z}_\alpha \mathrm{z}_\beta}{\mathrm{z}^2} - \frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{2}\right) \times \\ \times F_{\ell,m-1}(t)\, F_{\ell-1,m}(t)\right], \quad (48)$$

где $t = \mathrm{z}^2/4$, x, y и z — двумерные векторы в поперечном пространстве, и интегрирование ведется по всем возможным значениям компонент x и y. Применительно к исследуемым нейтрино-электронным процессам, интегрирование по поперечным компонентам импульсов заряженных частиц приводит к возникновению следующих комбинаций функций Лагерра:

$$\begin{gathered} F_\pm^{(1)} = F_{\ell,m}^2 \pm F_{\ell-1,m-1}^2, \\ F_\pm^{(2)} = F_{\ell,m-1}^2 \pm F_{\ell-1,m}^2, \\ F_\pm = F_{\ell,m}\, F_{\ell-1,m} \pm F_{\ell,m-1}\, F_{\ell-1,m-1}, \\ F'_\pm = F_{\ell,m}\, F_{\ell,m-1} \pm F_{\ell-1,m}\, F_{\ell-1,m-1}. \end{gathered} \quad (49)$$

Как видно из приведенных выражений, лишь скалярный интеграл (46), который не содержит явно поперечных компонент импульсов заряженных частиц, пропорционален квадратам функций Лагерра, однако и остальные комбинации могут быть приведены к ним. Так, из (45) после небольших преобразований можно получить следующие соотношения для вкладов от векторных

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{\ell}\,F_+ &= -\,(\ell-m)\,F_+^{(1)}/\sqrt{t} - \sqrt{t}\,F_+^{(2)},\\
2\sqrt{\ell}\,F_- &= -\,(\ell+m)\,F_-^{(1)}/\sqrt{t} + \sqrt{t}\,F_-^{(2)},\\
2\sqrt{m}\,F'_+ &= -\,(\ell-m)\,F_+^{(1)}/\sqrt{t} + \sqrt{t}\,F_+^{(2)},\\
2\sqrt{m}\,F'_- &= (\ell+m)\,F_-^{(1)}/\sqrt{t} + \sqrt{t}\,F_-^{(2)}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

и тензорных интегралов

$$
\begin{aligned}
4\sqrt{\ell\,m}\,F_{\ell,m}\,F_{\ell-1,m-1} &= (\ell+m)\,F_+^{(1)} - t\,F_+^{(2)},\\
4\sqrt{\ell\,m}\,F_{\ell,m-1}\,F_{\ell-1,m} &= \\
&= (\ell-m)^2\,F_+^{(1)}/t - (\ell+m)\,F_+^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Таким образом, приведенные соотношения позволяют представить результат интегрирования вероятностей переходов в нейтрино-электронных процессах в терминах только квадратичных структур $F_\pm^{(1,2)}$. Кроме того, сами эти структуры связаны между собой следующим соотношением:

$$
t\,F_-^{(2)} = -(\ell-m)\,F_-^{(1)}. \tag{52}
$$

Следовательно, лишь три из них являются независимыми. В случае нейтрино-электронных процессов удобно использовать следующие квадратичные структуры: $F_+^{(1)}$, $F_-^{(1)}$ и $F_+^{(2)}$, в которых ответ выглядит наиболее просто.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. А. Бедняков, Д. В. Наумов, О. Ю. Смирнов, УФН **186**, 233 (2016).
2. H.-T. Janka, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **62**, 407 (2012).
3. W. A. Fowler and F. Hoyle, Astrophys. J. Suppl. **9**, 201 (1964).
4. Л. Б. Окунь, *Лептоны и кварки*, Изд-во URSS, Москва (2015).
5. D. Lai, Space Sci. Rev. **191**, 13 (2015).
6. В. Н. Байер, В. М. Катков, ДАН СССР **171**, 313 (1966).
7. Э. А. Чобан, А. Н. Иванов, ЖЭТФ **56**, 194 (1969).
8. C. Patrignani et al., Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016).
9. A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev, Phys. Lett. B **394**, 123 (1997).
10. J. D. Landstreet, Phys. Rev. **153**, 1372 (1967).
11. Ю. М. Лоскутов, В. М. Захарцов, Известия ВУЗов. Физика **12**, 98 (1969).
12. V. Canuto, H. Y. Chiu, C. K. Chou, and L. Fassio-Canuto, Phys. Rev. D **2**, 281 (1970).
13. P. R. Chaudhuri, Astrophys. Space Sci. **8**, 432 (1970).
14. P. R. Chaudhuri, Astrophys. Space Sci. **8**, 448 (1970).
15. V. Canuto, C. Chiuderi, C. K. Chou, and L. Fassio-Canuto, Astrophys. Space Sci. **28**, 145 (1974).
16. А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, П. А. Эминов, Известия ВУЗов. Физика **21**, 110 (1978).
17. А. С. Вшивцев, Известия ВУЗов. Физика **23**, 59 (1980).
18. А. С. Вшивцев, П. А. Эминов, ТМФ **44**, 284 (1980).
19. D. G. Yakovlev and R. Tschaepe, Astronomische Nachrichten **302**, 167 (1981).
20. А. С. Вшивцев, Известия ВУЗов. Физика **25**, 39 (1982).
21. А. Д. Каминкер, К. П. Левенфиш, Д. Г. Яковлев, Письма в АЖ **17**, 1090 (1991).
22. A. D. Kaminker, K. P. Levenfish, D. G. Yakovlev et al., Phys. Rev. D **46**, 3256 (1992).
23. А. Д. Каминкер, Д. Г. Яковлев, ЖЭТФ **103**, 438 (1993).
24. A. V. Borisov, V. C. Zhukovsky, and A. I. Ternov, Phys. Lett. B **318**, 489 (1993).
25. А. Д. Каминкер, Д. Г. Яковлев, Астроном. журн. **71**, 910 (1994).
26. A. D. Kaminker, K. P. Levenfish, and D. G. Yakovlev, Astronom. Astrophys. Trans. **4**, 277 (1994).
27. A. Vidaurre, A. Perez, H. Sivak et al., Astrophys. J. **448**, 264 (1995).
28. V. G. Bezchastnov, P. Haensel, A. D. Kaminker, and D. G. Yakovlev, Astron. Astrophys. **328**, 409 (1997).
29. S. J. Hardy and M. H. Thoma, Phys. Rev. D **63**, 025014 (2001).
30. А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Е. В. Осокина, Письма в АЖ **37**, 365 (2011).
31. А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, ТМФ **170**, 423 (2012).
32. А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, Б. А. Лысов, Известия ВУЗов. Физика **26**, 30 (1983).
33. А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев, ЯФ **60**, 2038 (1997).
34. A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev, Mod. Phys. Lett. A **14**, 2531 (1999).

**35**. N. V. Mikheev and E. N. Narynskaya, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1551 (2000).

**36**. А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев, ЖЭТФ **118**, 863 (2000).

**37**. А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Письма в ЖЭТФ **74**, 330 (2001).

**38**. А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Письма в АЖ **31**, 496 (2005).

**39**. D. A. Dicus, W. W. Repko, and T. M. Tinsley, Phys. Rev. D **76**, 025005 (2007).

**40**. A. V. Kuznetsov, D. A. Rumyantsev, and V. N. Savin, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450136 (2014).

**41**. А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, ТМФ **184**, 338 (2015).

**42**. V. Canuto and L. Fassio-Canuto, Phys. Rev. D **7**, 1593 (1973).

**43**. С. Х. Бузардан, А. С. Вшивцев, ТМФ **44**, 400 (1980).

**44**. A. D. Kaminker, O. Y. Gnedin, D. G. Yakovlev et al., Phys. Rev. D **46**, 4133 (1992).

**45**. А. В. Борисов, В. А. Гусейнов, Н. Б. Заморин, ЯФ **63**, 2041 (2000).

**46**. В. П. Цветков, ЯФ **32**, 776 (1980).

**47**. С. Х. Бузардан, А. С. Вшивцев, Известия ВУЗов. Физика **25**, 35 (1982).

**48**. В. А. Люлька, ЯФ **39**, 680 (1984).

**49**. В. М. Захарцов, Ю. М. Лоскутов, К. В. Парфенов, ТМФ **81**, 215 (1989).

**50**. А. В. Борисов, Л. В. Морозова, М. К. Нанаа, Известия ВУЗов. Физика **35**, 106 (1992).

**51**. А. В. Борисов, В. А. Гусейнов, ЯФ **57**, 496 (1994).

**52**. V. G. Bezchastnov and P. Haensel, Phys. Rev. D **54**, 3706 (1996).

**53**. А. В. Борисов, В. А. Гусейнов, О. С. Павлова, ЯФ **61**, 103 (1998).

**54**. N. V. Mikheev and E. N. Narynskaya, Central Eur. J. Phys. **1**, 145 (2003).

**55**. V. A. Guseinov, I. G. Jafarov, and R. E. Gasimova, Phys. Rev. D **75**, 073021 (2007).

**56**. I. Bhattacharyya, arXiv:physics.gen-ph/1510.02678.

**57**. B. Muller, H.-T. Janka, and A. Marek, Astrophys. J. **756**, 84 (2012); arXiv:astro-ph.SR/1202.0815.

**58**. P. Jaranowski, P. Mach, E. Malec, and M. Pirog, Phys. Rev. D **91**, 024039 (2015); arXiv:gr-qc/1410.8527.

**59**. И. С. Огнев, ЖЭТФ **150**, 744 (2016).

**60**. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1984).

**61**. М. С. Андреев, Н. В. Михеев, Е. Н. Нарынская, ЖЭТФ **137**, 259 (2010).

**62**. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1983).

**63**. И. М. Тернов, *Введение в физику спина релятивистских частиц*, Изд-во МГУ, Москва (1997).

**64**. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2006).

**65**. A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 252, Springer-Verlag, New York (2013).

**66**. R. W. Lindquist, Annals Phys. **37**, 487 (1966).

**67**. I. M. Oldengott, C. Rampf, and Y. Y. Y. Wong, JCAP **1504**, 016 (2015).

**68**. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*: Т. III. *Квантовая механика* (*нерелятивистская теория*), Физматлит, Москва (2004).

**69**. А. Д. Каминкер, Д. Г. Яковлев, ТМФ **49**, 248 (1981) .