

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВИНТОВОМ ТЕЧЕНИИ С ФЛУКТУАЦИЯМИ

В. В. Титов^{a}, Р. А. Степанов^{a,b}, Д. Д. Соколов^{c,a}*

*^a Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
614000, Пермь, Россия*

*^b Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

*^c Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 декабря 2017 г.

Рассматривается проблема влияния флуктуаций винтового течения проводящей жидкости на эффект самовозбуждения магнитного поля, решение которой имеет важное значение для экспериментальной реализации турбулентного динамо. Предлагается теоретический подход на основе решения усредненных уравнений, полученных в пределе малого корреляционного времени. Применимость такого подхода подтверждается прямым численным моделированием исходных уравнений. Демонстрируется влияние коррелированности флуктуаций на порог возникновения динамо-эффекта. Показано различие решения уравнений среднего поля и решения на основе прямого численного моделирования при конечном времени корреляции. Оцениваются достоинства и недостатки обоих подходов и то, насколько обнаруженное различие представляется существенным в контексте задач о самовозбуждении магнитного поля. Обсуждается влияние спиральности и перемежаемости на характер решения.

DOI: 10.7868/S0044451018040156

1. ВВЕДЕНИЕ

Формирование магнитных полей во многих небесных телах связано с работой механизма гидромагнитного динамо, т. е. с явлением электромагнитной индукции в потоке хорошо проводящей жидкости или плазмы. Как правило, эти течения являются турбулентными или конвективными, поэтому их описание представляет собой сложную с вычислительной точки зрения проблему. Ее можно решать двумя путями.

Во-первых, можно последовательно упрощать задачу, переходя ко все менее детализированному описанию динамо. На практике для этого обычно используется теория среднего поля [1], в которой рассматривается эволюция только средних, крупномасштабных компонент магнитного поля и поля скорости, а мелкомасштабные компоненты описываются с помощью подходящей параметризации коэффициентов в уравнениях среднего поля. На этом

пути удастся построить модели генерации магнитных полей в конкретных небесных телах, например в спиральных галактиках, быть может, не очень глубокие, но удовлетворяющие практические потребности радиоастрономии. Очевидным недостатком этих моделей является необходимость выбирать удачную параметризацию мелкомасштабных компонент, что во многом является плохо алгоритмируемой процедурой.

Во-вторых, можно стремиться ко все более и более точному воспроизведению деталей гидродинамики и процесса динамо в рамках прямого численного моделирования. На этом пути удастся получить очень детализированные и во многом реалистические модели генерации магнитного поля в ряде небесных тел, прежде всего в Земле. Достоинства этого подхода очевидны, а недостатки состоят в больших затратах вычислительных ресурсов и в отсутствии информации о множестве деталей внутреннего строения той же Земли, необходимой для полной математической постановки.

Возникает естественное желание разумно сочетать эти подходы. Для этого хочется провести де-

* E-mail: titov.v@icmm.ru

тальное сравнение результатов, получаемых в каком-нибудь показательном примере в обоих подходах с тем, чтобы выяснить, насколько использование теории среднего поля огрубляет задачу. Конечно, сопоставления подобного рода предпринимались неоднократно, но последовательное и полное сопоставление затруднительно, поскольку эти подходы относятся к очень разным «весовым категориям», так что непросто подобрать задачу, в которой с определенной степенью разумности стоило бы использовать оба подхода. Как правило, очевидно, что для демонстрации физического эффекта стоит выбирать возможно более простое описание, а модель, претендующая на количественное описание, должна быть в пределах возможностей прямого численного моделирования.

Цель данной работы — провести интересующее нас сравнение на примере эффекта динамо в флуктуирующем винтовом течении. При этом считается, что геометрия потока остается постоянной, а меняются лишь интенсивности различных компонент (величины угловой скорости и продольной скорости). Винтовое динамо известно как динамо Пономаренко [2] и является наиболее доступным для реализации в лабораторных условиях. Однако проблема сопоставления теоретических положений теории динамо с результатами единичных успешных лабораторных экспериментов далека от решения [3].

Поставленная в работе задача, с одной стороны, достаточно проста для того, чтобы результаты, полученные как в рамках теории среднего поля, так и с помощью прямого численного моделирования, были прямо сопоставимы друг с другом. С другой стороны, эта задача представляет, как нам кажется, непосредственный физический интерес, поскольку динамо в винтовом течении является основой современных экспериментальных исследований [4]. Не вызывает сомнения, что в экспериментальных установках параметры винтового течения флуктуируют. Поскольку при проведении эксперимента приходится использовать все резервы для получения желаемого эффекта, важно понять, какую роль могут играть здесь флуктуации, затрудняют они генерацию или облегчают ее. Ниже мы покажем, что ответ на этот вопрос не является заранее очевидным, так что интересно проверить, насколько полно описывают его оба подхода.

2. ВИНТОВОЕ ДИНАМО

Эволюция магнитного поля \mathbf{B} в движущейся со скоростью \mathbf{U} электропроводящей среде описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где η — коэффициент магнитной вязкости среды. В задаче винтового динамо рассматривается осесимметричное движение внутри цилиндрического канала, которое в цилиндрической системе координат (r, φ, z) можно записать в виде

$$\mathbf{U}(r, t) = (0, r\omega(r, t), u(r, t)), \quad (2)$$

где ω и u — угловая и продольная скорости. В этом случае решение уравнения (1) можно представить в факторизованном виде:

$$\mathbf{B}(r, \varphi, z, t) = \mathbf{b}(r, t) \exp [i(m\varphi + kz)], \quad (3)$$

где m и k — волновые числа. Используя условие соленоидальности, мы можем выразить продольную компоненту магнитного поля через две других,

$$b_z(r, t) = \frac{i}{kr} \frac{\partial(rb_r)}{\partial r} - \frac{mb_\varphi}{kr}, \quad (4)$$

и свести задачу к решению одномерной системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_r}{\partial t} &= D(b_r) - \frac{2imb_\varphi}{r^2} - i \text{Rm} b_r (m\omega + ku), \\ \frac{\partial b_\varphi}{\partial t} &= D(b_\varphi) + \frac{2imb_r}{r^2} - i \text{Rm} b_\varphi (m\omega + ku) + \\ &\quad + r \text{Rm} b_r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где оператор

$$D = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - k^2 + \frac{m^2 + 1}{r^2}, \quad (6)$$

а Rm — магнитное число Рейнольдса. Уравнения дополняются граничными условиями осевой симметрии для моды $m = 1$ при $r = 0$ и условиями равенства нулю магнитного поля на бесконечности:

$$\begin{aligned} \partial_r b_r(0, t) &= 0, & b_r(\infty, t) &= 0, \\ \partial_r b_\varphi(0, t) &= 0, & b_\varphi(\infty, t) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При переходе к безразмерным переменным использованы следующие параметры: радиус канала r_0 — характерный масштаб; продольная скорость u_0 — характерная скорость; r_0^2/η — характерное время. Магнитное число Рейнольдса в таком случае определяется как $\text{Rm} = r_0 u_0 / \eta$.

Зависимость поля скорости от времени можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(r, t) &= \bar{\omega}(r)(1 + a_\omega \rho_\omega(t)), \\ u(r, t) &= \bar{u}(r)(1 + a_u \rho_u(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

где безразмерные функции $\bar{\omega}(r)$ и $\bar{u}(r)$ задают средние радиальные профили угловой и продольной скоростей, функции $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$ определяют характер временных пульсаций, a_ω и a_u — амплитуды пульсаций. Отметим, что синхронные или асинхронные колебания, $\rho_\omega(t)$ или $\rho_u(t)$, будут соответствовать спиральному виду колебаний соответственно с положительным или отрицательным знаком.

3. УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Выписанные уравнения эволюции магнитного поля можно решать численно, моделируя с помощью генератора случайных чисел флуктуации $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$ с заданными статистическими свойствами. Если ставить перед собой задачу изучения среднего магнитного поля, то можно далее вычислить среднее арифметическое от полученных решений, которое и является оценкой среднего магнитного поля. Конечно, заманчиво ограничиться усреднением по времени вместо того, чтобы моделировать много реализаций и искать среднее по ансамблю, но приходится считаться с тем, что в задаче динамо возникает явление перемежаемости [5], которое может приводить к тому, что средние по времени и ансамблю перестают совпадать. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 6.

Однако можно поступить и по-другому, а именно, ввести среднее по ансамблю флуктуаций магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}$, вывести для него уравнения и далее решать эти уравнения. Именно так поступают при изучении генерации магнитного поля в турбулентных потоках, для которых реализация первого подхода наталкивается на серьезные вычислительные трудности.

Разумеется, при реализации второго подхода приходится делать предположения о свойствах флуктуаций (в нашем случае — о случайных процессах $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$). Как правило, предположение состоит в том, что корреляционное время флуктуаций мало по сравнению с гидродинамическим временем системы (его называют также временем оборота вихря). Формально это предположение можно реализовать в виде модели короткокоррелированного потока [6].

Предполагается, что течение теряет память в выделенные моменты времени $t_n = n\Delta$ (моменты обновления) так, что флуктуации до и после момента обновления статистически независимы, а на временных отрезках от одного момента обновления до другого они имеют одни и те же статистические свой-

ства. После этого делается формальный переход при $\Delta \rightarrow 0$, причем считается, что мощность флуктуаций, т. е. произведение квадрата флуктуаций на Δ остается постоянной.

Процесс вывода уравнений среднего поля состоит в следующем. Сначала для фиксированной величины Δ решается уравнение индукции (1) в терминах функциональных интегралов. После этого при использовании малости Δ из решения выделяются члены до порядка Δ и получается соотношение, связывающее значения магнитного поля в данной точке пространства в моменты t_n и t_{n+1} . Поскольку в момент t_n поле скорости теряет память, в этих соотношениях расщепляются корреляции между магнитным полем и скоростью. В результате после вычитания выражений для магнитного поля в соседние моменты обновления, деления полученного выражения на Δ и перехода к пределу малых Δ удастся получить замкнутое уравнение для $\bar{\mathbf{B}}$ [6].

Эта схема вывода уравнения среднего поля традиционно применяется для получения уравнений среднего магнитного поля в турбулентных потоках. На основе тех же идей можно получить также уравнение для корреляционного тензора магнитного поля и для высших статистических моментов магнитного поля.

Существуют и другие методы вывода уравнений среднего магнитного поля. Например, уравнение для продольной корреляционной функции магнитного поля в однородном, изотропном и зеркально-симметричном короткокоррелированном случайном потоке было выведено Казанцевым с помощью диаграммной техники [7]. Однако метод функциональных интегралов кажется наиболее алгоритмизируемым и претендующим на математическую обоснованность по сравнению с другими подходами. В частности, в отличие от применения метода функциональных интегралов к задачам квантовой механики, в этих задачах теории переноса не возникает проблем с существованием меры, по которой берутся функциональные интегралы [8].

Важно, что все предложенные подходы к выводу уравнений среднего магнитного поля в турбулентных потоках ведут к одним и тем же уравнениям, которые были впервые предложены в 1965 г. Штенбеком, Краузе и Рэдлером [1, 9]. Выражение для турбулентной электродвижущей силы, подходящей для винтового динамо, было получено в работе [10] и использовано для численного анализа турбулентных эффектов [11].

Неоднократно предпринимались попытки перейти от модели малых временных корреляций к более

физическим моделям турбулентного поля скорости (например, в работах [12–15]). Конечно, при этом получаются более сложные уравнения среднего поля, чем в короткокоррелированной модели, например, вместо дифференциальных уравнений могут получиться интегральные. Можно сказать, что величины, характеризующие перенос магнитного поля (например, коэффициент магнитной диффузии), становятся интегральными операторами. Однако свойства этих уравнений, насколько известно, близки к свойствам дифференциальных уравнений короткокоррелированных моделей, а их применение ограничено тем, что из имеющихся астрономических наблюдений или лабораторных измерений трудно извлечь достаточно богатую информацию о свойствах этих операторов, отличающих их от величин в короткокоррелированной модели.

Технику функциональных интегралов можно применить для вывода уравнений среднего поля не только в турбулентных потоках, но и в гораздо более простых потоках, в которых флуктуируют лишь один или несколько параметров, определяющих строение потока, а сама структура потока остается неизменной. Подобное исследование проведено в работах [16–18] для АВС-потоков и некоторых других сходных течений. В ходе этой работы один из ее участников, Д. Н. Томин, получил уравнения среднего поля для винтового потока с флуктуациями, описанного в предыдущем разделе. Для среднего магнитного поля в виде бегущей волны

$$\bar{\mathbf{B}}(r, \varphi, z, t) = \bar{\mathbf{B}}(r) \exp[\gamma t + i(m\varphi + kz)] \quad (9)$$

эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma \bar{b}_r &= D(\bar{b}_r) - \frac{2im\bar{b}_\varphi}{r^2} - \\ &- \frac{1}{2} \text{Rm} \bar{b}_r [m\bar{\omega} (m \text{Rm} \alpha_{11}\bar{\omega} + 2i) + \\ &+ k u_z (m \text{Rm} \alpha_{12}\bar{\omega} + i) + k^2 \text{Rm} \alpha_{22}\bar{u}^2], \\ \gamma \bar{b}_\varphi &= D(\bar{b}_\varphi) + \frac{2im\bar{b}_r}{r^2} - \\ &- \frac{1}{2} \text{Rm} \bar{b}_\varphi [m\bar{\omega} (m \text{Rm} \alpha_{11}\bar{\omega} + 2i) + \\ &+ 2k\bar{u} (m \text{Rm} \alpha_{12}\bar{\omega} + i) + k^2 \text{Rm} \alpha_{22}\bar{u}^2] + \\ &+ r \text{Rm} \bar{b}_r \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} [1 - i \text{Rm} (k\alpha_{12}\bar{u} + m\alpha_{11}\bar{\omega})], \end{aligned} \quad (10)$$

где γ — показатель экспоненциального изменения энергии, $\alpha_{ij} = a_i a_j \tau \overline{\rho_i(t) \rho_j(t)}$ при $i, j = \omega, u$.

Мы опустили прямолинейные, но громоздкие выкладки, которые приведены в диссертации Томина [19]. Далее мы проведем сравнительный ана-

лиз критических параметров экспоненциально растущих численных решений систем уравнений (5) и (10).

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Численное решение уравнений (5) находилось методом сеток с использованием конечных разностей седьмого порядка точности для аппроксимации пространственных производных и явной схемы Рунге–Кутты пятого порядка для интегрирования по времени. Несмотря на постановку граничных условий на бесконечности, вычислительная область являлась ограниченной, но ее граница, задаваемая радиусом R_1 , выбиралась на достаточном удалении от границы канала. При этом численным экспериментом проверялось, что дальнейшее увеличение R_1 приводит к изменениям результатов в пределах точности вычислительного метода. В качестве начального возмущения принималось случайное распределение значений магнитного поля в узлах сетки.

Пульсации $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$ представлялись кусочно-постоянными функциями со случайными значениями, постоянными на интервале времени τ (эквивалент Δ) между моментами обновления. При этом флуктуации задавались таким образом, что $\langle \rho(t) \rangle = 0$ (здесь и далее под $\langle \dots \rangle$ понимается усреднение по времени), а среднеквадратическое отклонение $\sigma(\rho) = 1$.

Решение задачи винтового динамо на основе уравнений среднего поля сводится к нахождению собственных значений γ линейного дифференциального оператора (10). Численно эта задача также решается с помощью дискретизации пространственных производных и применением QR-алгоритма для нахождения собственных значений матрицы. С учетом требований к продолжительности временной эволюции уравнений (5) расчет критического значения числа Рейнольдса Rm^* на основе уравнений среднего поля (10) требует на 2 порядка меньшего времени вычислений.

5. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Сначала проанализируем результаты, полученные при прямом численном моделировании эволюции магнитного поля, а потом проведем их сравнение с результатами численного решения уравнений среднего поля.

В качестве меры магнитного поля использовалась энергия магнитного поля на поверхности кана-

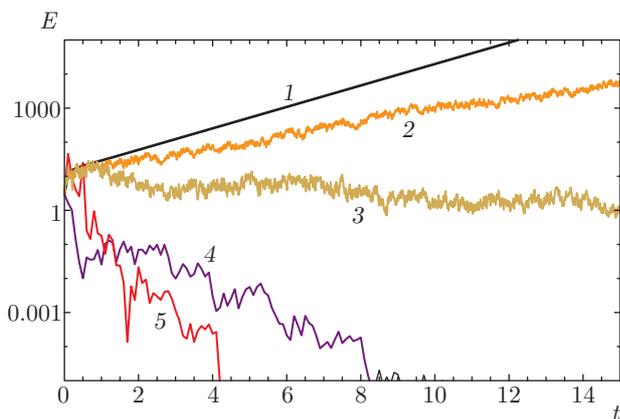


Рис. 1. Эволюция магнитного поля при различных значениях параметров флуктуаций для $Rm = 20$: кривая 1 — $a_i = 0$; 2 — $\tau = 10^{-2}$, $a_i = 0.5$; 3 — $\tau = 10^{-2}$, $a_i = 1.0$; 4 — $\tau = 10^{-1}$, $a_i = 0.5$; 5 — $\tau = 10^{-1}$, $a_i = 1.0$

ла (величина, доступная для измерений в контексте динамо-экспериментов):

$$E(t) = b_r^2(r_0, t) + b_\varphi^2(r_0, t).$$

Типичное поведение $E(t)$ при фиксированном значении Rm и различных параметрах флуктуаций показано на рис. 1. Представленные зависимости качественно показывают, что флуктуации оказывают негативный эффект на рост энергии магнитного поля. Чем выше амплитуда и больше время корреляции, тем слабее рост, или он вообще отсутствует. Для проведения точного сравнительного анализа вычислялась средняя скорость экспоненциального изменения энергии

$$\gamma = \left\langle \frac{d \log(E(t))}{dt} \right\rangle_T,$$

где T — время усреднения.

Критическое значение магнитного числа Рейнольдса Rm^* соответствует условию $\gamma = 0$, которое определяет порог динамо-эффекта. Для надежного определения γ требуется выбирать достаточно большое время усреднения T . Мы оценили погрешность определения Rm^* в зависимости от амплитуды флуктуаций a_i и времени усреднения T (рис. 2). Видно, что ошибка растет с увеличением a_i , но уменьшается при более длительном интервале усреднения. В последующих расчетах это учитывалось для достижения необходимой точности.

Выясним теперь, какую роль играют корреляции между двумя случайными процессами, определяющими флуктуации нашего течения. На рис. 3 показаны зависимости показателя роста γ от амплитуды флуктуаций при трех значений коэффициента

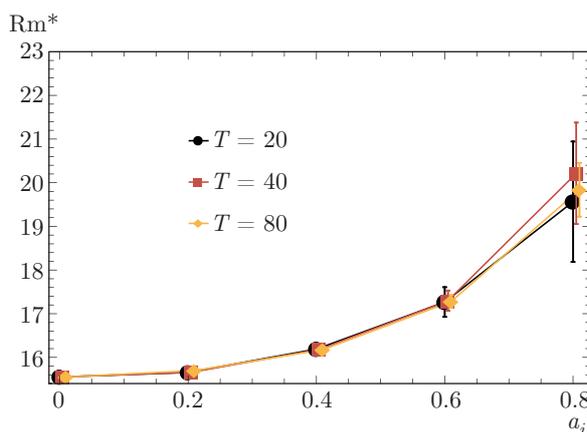


Рис. 2. Влияние времени усреднения T на точность определения Rm^* при различных a_i

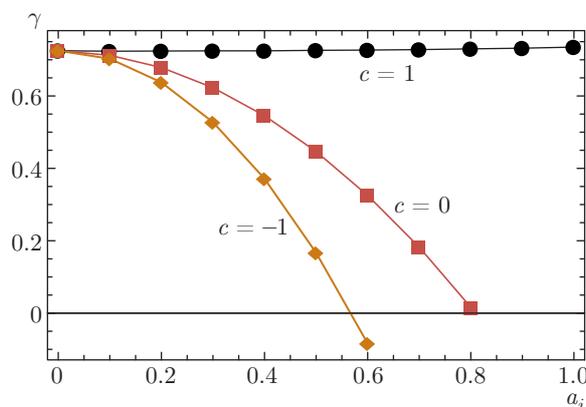


Рис. 3. Зависимости показателя роста γ от амплитуды флуктуаций для трех значений коэффициента корреляции $c = 1, 0, -1$

кросс-корреляции c между $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$ для фиксированного значения времени корреляции $\tau = 10^{-2}$. Величина $c = 0$ соответствует некоррелированным (независимым) $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$, $c = 1$ означает $\rho_\omega(t) = \rho_u(t)$ и $c = -1$ соответствует $\rho_\omega(t) = -\rho_u(t)$.

Мы видим, что при $c = 1$ скорость роста не зависит от a_i . Наибольшее снижение γ наблюдается при антикоррелированных флуктуациях. Это говорит о том, что флуктуации со спиральностью того же знака, что и спиральность среднего течения, не затрудняют динамо-механизм, в то время как противоположные по знаку существенно замедляют рост магнитного поля.

Известно, что для винтового динамо имеется связь между отношением продольной и азимутальной скоростей и оптимальным значением волнового числа k [20]. Результаты, представленные на рис. 4, показывают, что критическое значение k (положение минимума) не зависит от вида флуктуаций.

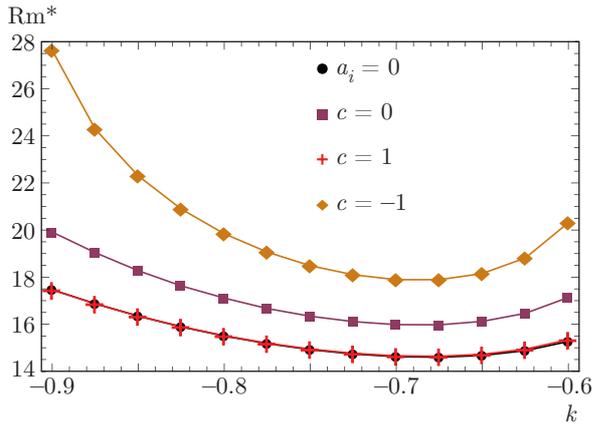


Рис. 4. Зависимости Rm^* от волнового числа k при различных значениях коэффициента корреляции

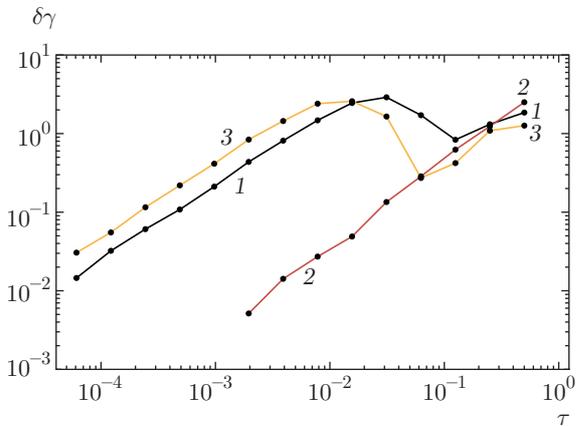


Рис. 5. Модуль разности показателей роста энергии, полученных при численном моделировании и при решении уравнений среднего поля, в зависимости от корреляционного времени τ при $Rm = 24$ и различных значениях коэффициента корреляции: $c = 0$ (1), 1 (2), -1 (3)

Перейдем теперь к сравнению характеристик динамо процесса при заведомо большой надкритичности ($Rm > Rm^*$), полученных двумя подходами. На рис. 5 приведены зависимости модуля разности показателей роста γ от τ , полученные в результате численного моделирования и решения уравнений среднего поля. Решения сходятся с уменьшением τ , так что $\delta\gamma \propto \tau$.

Сравнение значений Rm^* , определенных с использованием численного моделирования и уравнений среднего поля, представляет более сложную задачу. В ходе исследования обнаружилось, что при некоторых параметрах задачи величина γ остается отрицательной при любом Rm , т. е. динамо-эффект не возникает. Представляется важным определить закономерности такого поведения. Выше показано,

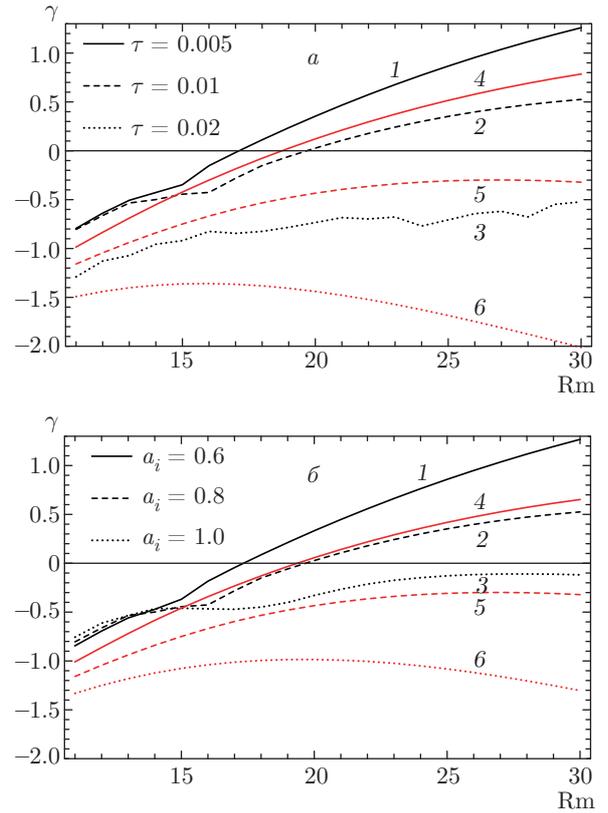


Рис. 6. Зависимости показателя γ от Rm , полученные в результате численного моделирования (кривые 1–3) и решения уравнений среднего поля (кривые 4–6), в случае некоррелированных флуктуаций при $a_i = 0.8$ (а) и $\tau = 0.01$ (б)

что значения γ , определенные в рамках разных подходов, могут сильно отличаться друг от друга в зависимости от корреляционных свойств $\rho_\omega(t)$ и $\rho_u(t)$. На рис. 6 представлены зависимости $\gamma(Rm)$, полученные с помощью численного моделирования и решения уравнений среднего поля, для различных значений a_i , τ и фиксированном $c = 0$. Видно, что есть особые случаи, например при $a_i = 0.8$ и $\tau = 0.01$, когда величина Rm^* может быть определена только в рамках одного подхода, а именно численного моделирования. Изменение в сторону уменьшения τ или a_i приводит к возникновению динамо, что позволяет определить Rm^* в рамках обоих подходов. Увеличение τ или a_i делает динамо невозможным.

На рис. 7 представлены зависимости $Rm^*(\tau)$ при $a_i = 0.6$, полученные при прямом численном моделировании и при решении уравнений среднего поля в случаях некоррелированных и коррелированных флуктуаций. Результаты для антикоррелированных флуктуаций качественно повторяют зависимость при $c = 0$, и поэтому они здесь не приведены.

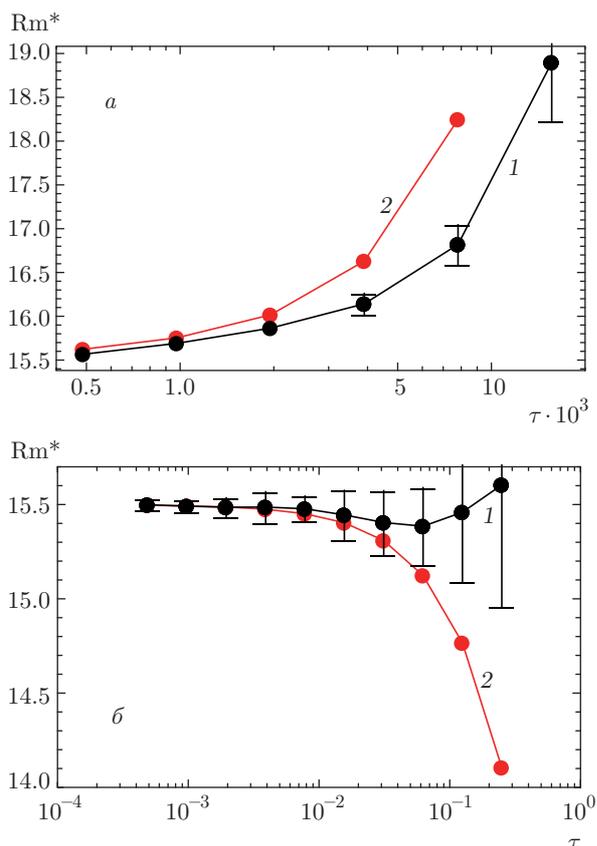


Рис. 7. Критические значения числа Рейнольдса Rm^* , полученные в результате численного моделирования (1) и решения уравнений среднего поля (2), при различных значениях корреляционного времени τ для некоррелированных (а) и коррелированных (б) флуктуаций

Для численного моделирования значения Rm^* показаны с диапазонами возможных отклонений, обусловленных конечностью выбранного интервала T . Сходимость Rm^* для двух подходов, так же как и для γ , определяется малостью τ . Как видно на рис. 7а при $c = 0$ порог генерации получается ниже при численном моделировании, чем в случае решения уравнений среднего поля, что хорошо согласуется с зависимостями $\gamma(Rm)$, показанными на рис. 6. В случае коррелированных флуктуаций ($c = 1$ на рис. 7б) мы видим различный характер зависимостей $Rm^*(\tau)$, полученных для двух подходов. Решение уравнений среднего поля дает систематически меньшее значение Rm^* , хотя и количественно незначительное.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем результаты нашего исследования. С точки зрения приложений для лабораторного

динамо-эксперимента, т. е. изучения влияния флуктуаций на порог возбуждения магнитного поля, мы видим, что флуктуации затрудняют генерацию магнитного поля, повышая порог генерации. Этот вывод представляется ожидаемым и согласуется с результатами исследования влияния гармонических осцилляций поля скорости [21]. Мы также отмечаем, что выявленный характер влияния спиральности — существенное затруднение генерации поля, наблюдаемое при противоположных знаках спиральности флуктуации и среднего течения, — качественно воспроизводит результат, полученный в рамках замыкания корреляций второго порядка и требующий трудоемкой детализации и параметризации свойств флуктуаций [11].

Физическая идея механизма винтового динамо никак не связана с флуктуациями течения, в то время как в других простых моделях динамо было показано существование параметрического резонанса [22]. Подчеркнем, однако, что этот вывод специфичен для винтового динамо. Напротив, в АВС-потоках флуктуации облегчают генерацию магнитного поля [17]. Это обстоятельство также кажется естественным, поскольку строение АВС-потока подбирается так, чтобы имитировать трехмерную турбулентность. Эта имитация не совсем совершенна, и флуктуации помогают сгладить это несовершенство.

С точки зрения сопоставления решений уравнений среднего поля с результатами прямого численного моделирования исходных уравнений, мы видим существенные различия между результатами этих подходов. Естественно, эти различия постепенно уменьшаются при уменьшении корреляционного времени (напомним, что уравнения среднего поля выводились в пределе малых корреляций). При конечном корреляционном времени различия между результатами обоих подходов остаются вполне заметными, однако они не носят кардинального характера. При моделировании роста магнитного поля в звездах и галактиках, где прежде всего и используются уравнения среднего поля, точность определения параметров течений по данным астрономических наблюдений такова, что эти различия не кажутся неприемлемыми. Поэтому уравнения среднего поля, как кажется, можно продолжать использовать для построения прагматических моделей генерации магнитных полей в небесных телах.

Отметим еще один аспект нашего сравнения. При выводе уравнений среднего поля проводится усреднение по ансамблю реализаций течения, а при прямом численном моделировании — по времени.

Во многих ситуациях в силу эргодического свойства результаты этих усреднений совпадают, но в данном случае мы имеем дело с экспоненциально растущим магнитным полем, в результате чего эргодичность может нарушаться [5]. Такое нарушение заведомо происходит в мелкомасштабном динамо [8], его удастся количественно исследовать для некоторых физически мотивированных модельных уравнений [23, 24].

Отмеченная возможность является составной частью перемежаемости, характерной для различных неустойчивостей в случайных средах. В результате явления перемежаемости уравнения среднего поля могут давать более высокие скорости роста магнитного поля, чем прямое численное моделирование, поскольку в этих подходах моделируются несколько различных средних. По-видимому, частично различия между результатами обоих подходов связаны с этим явлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-41-02012).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Krause and K.-H. Radler, *Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press, Oxford (1980).
2. Ю. Б. Пономаренко, Прикл. мех. техн. физ. вып. 6, 47 (1973).
3. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, УФН **184**, 313 (2014).
4. A. Gailitis and G. Lipsbergs, *Magnetohydrodynamics* **53**, 349 (2017).
5. Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **152**, 3 (1987).
6. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **145**, 593 (1985).
7. А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967).
8. Y. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance*, World Sci. Publ., Singapore (1990).
9. M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler, *Z. Naturforsch.* **21a**, 369 (1966).
10. K.-H. Rädler and R. Stepanov, *Phys. Rev. E* **73**, 056311 (2006).
11. K.-H. Rädler and R. Stepanov, *Geoph. Astroph. Fluid Dyn.* **100**, 379 (2006).
12. А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, ЖЭТФ **88**, 487 (1985).
13. P. Dittrich, S. A. Molchanov, D. D. Sokolov, and A. A. Ruzmaikin, *Astronomische Nachrichten* **305**, 119 (1984).
14. T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, and D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **64**, 026304 (2001).
15. В. Г. Ламбург, Д. Д. Соколов, *Астрон. ж.* **78**, 116 (2001).
16. Д. Н. Томин, Д. Д. Соколов, *Письма в астрон. ж.* **35**, 359 (2009).
17. N. Kleeorin, I. Rogachevskii, D. Sokoloff, and D. Tomin, *Phys. Rev. E* **79**, 046302 (2009).
18. D. Tomin and D. Sokoloff, *Geoph. Astroph. Fluid Dyn.* **104**, 183 (2010).
19. Д. Н. Томин, Дисс... канд. физ.-мат. наук, МГУ (2012).
20. A. Ruzmaikin, D. Sokolov, and A. Shukurov, *J. Fluid Mech.* **197**, 39 (1988).
21. M. Peyrot, A. Gilbert, and F. Plunian, *Phys. Plasmas* **15**, 122104 (2008).
22. J. Priede, R. Avalos-Zuñiga, and F. Plunian, *Phys. Lett. A* **374**, 584 (2010).
23. М. Е. Артюшкова, Д. Д. Соколов, *Астрон. ж.* **82**, 584 (2005).
24. D. Sokoloff and E. A. Illarionov, *J. Plas. Phys.* **81**, 395810402 (2015).