

# ДИНАМИКА ВОСХОДЯЩИХ СТРУЙ С НЬЮТОНОВСКИМ ВЫХОЛАЖИВАНИЕМ

*В. П. Гончаров<sup>a\*</sup>, В. И. Павлов<sup>b\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук  
109017, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Univ. Lille, UFR des Mathématiques Pures et Appliquées, CNRS FRE 3723 - LML  
F-59000, Lille, France*

Поступила в редакцию 4 сентября 2017 г.

Изучено влияние ньютоновского выхолаживания на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости, ответственной за возникновение узких восходящих струй. Исследование, проведенное в рамках негидростатической модели с горизонтально неоднородной плотностью и выхолаживанием показало, что полная иерархия неустойчивостей в этой модели состоит из трех режимов — коллапс, алгебраическая неустойчивость и инерционное движение. Реализация этих трех режимов, взаимные переходы и интерференция определяются соотношением двух характерных временных масштабов — времени коллапса и времени выхолаживания.

DOI: 10.7868/S0044451018020141

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что рэлей-тейлоровская неустойчивость (РТН) проявляется всякий раз, когда в поле сил тяжести слой более тяжелой жидкости лежит поверх слоя более легкой, или когда в неинерционной системе отсчета менее плотная жидкость ускоряется в более плотную. В последнем случае неустойчивость возникает из-за «эффективной силы тяжести», связанной с ускорением или замедлением среды, которая содержит области с различной плотностью [1].

Физические причины первоначальной слоистой стратификации по плотности могут быть различными. В геофизических течениях такая стратификация может быть обусловлена температурной неоднородностью, слоями солености или неоднородным распределением пузырей. Мутьевые потоки, которые переносят взвешенные частицы грязи или ила, также являются примером подобного рода течений. Еще один прекрасный пример — столкновение и пересечение геофизических течений, в которых развитие РТН возникает под влиянием горизонтальной

составляющей ускорения на вертикальных границах раздела.

Основная цель работы — изучение влияния выхолаживания на развитие РТН. В астрофизике, геофизической гидродинамике и технических приложениях известны многочисленные примеры, когда РТН инициируется тепловыми нерегулярностями, локализованными в тонких горизонтальных слоях, перпендикулярных силе тяжести. В пограничных слоях такие нерегулярности возникают в результате неоднородного нагревания и похожи на островки более нагретой (легкой) жидкости.

Динамика тепловых островков существенно нелинейна, поскольку их возникновение сильно нарушает равновесие в жидкости. Действительно, в любой консервативной системе, если ее начальное состояние является неустойчиво равновесным или близко к нему, возмущения на ранней стадии должны развиваться по закону экспоненциального роста. Такое поведение предсказывается линейной теорией, и именно так развивается неустойчивость в классической задаче эволюции плоской границы раздела, которая разделяет две жидкости, помещенные в гравитационное поле так, что более тяжелая жидкость находится над более легкой [2]. Традиционное описание этого процесса на языке спектральных мод состоит в том, что каждая спектральная мода начального возмущения (малой

\* E-mail: v.goncharov@rambler.ru

\*\* E-mail: Vadim.Pavlov@univ-lille1.fr

амплитуды) развивается в экспоненциальном режиме, описанном линейными дифференциальными уравнениями для деформации границы раздела. Продолжая свое развитие в нелинейном режиме, возмущение в конце концов входит в турбулентный режим, где появляются кратные пространственные масштабы. Мы полагаем, что для тепловых островков, по крайней мере на ранней стадии, до тех пор пока вертикальные движения столь малы, что гидростатическое равновесие нарушено слабо, более вероятна другая модель. Такая модель может быть построена в рамках так называемого «приближения мелкой воды» с горизонтально неоднородной плотностью [3–5]. По существу, если обозначить характерную толщину слоя жидкости как  $l$ , а характерный горизонтальный масштаб начальной деформации границы раздела как  $L$ , при описании процесса РТН необходимо различать два предельных случая: «глубокой воды»  $l/L \gg 1$  и «мелкой воды»  $l/L \ll 1$ .

Необходимо отметить, что модели, способные адекватно описать динамику островков и на крупных, и на мелких масштабах, базируются не на асимптотических разложениях, а на принципе доминантного баланса [6, 7]. Несмотря на то что оба подхода приводят к внешне похожим уравнениям, между ними есть принципиальное различие. Будучи сформулирован на языке энергетического равновесия, принцип доминантного баланса основан на законе сохранения. По существу, он предполагает, что сумма всех усредненных по глубине вкладов в полную энергию является инвариантом, а следовательно, изменения этих вкладов должны взаимно компенсироваться. Главная задача состоит в том, чтобы разделить полную энергию на компоненты так, чтобы в каждом режиме доминирующий вклад давали бы только две из них.

Применительно к моделям РТН, усредненную по глубине полную энергию удобно разделить на потенциальную и кинетическую, состоящую из двух компонент: одна связана с горизонтальными движениями, а другая с вертикальными. Для таких систем принцип доминантного баланса подразумевает, что потенциальная энергия сбалансирована главным образом одной из компонент. На начальной стадии, когда система находится в режиме мелкой воды, энергетический баланс в основном поддерживается горизонтальными движениями. На финальной стадии в режиме глубокой воды главную роль в этом балансе играют вертикальные движения.

Довольно полное понимание динамики островков можно получить не прибегая к решению про-

блемы Коши, а оставаясь в рамках минимальной модели, путем анализа ее симметрий. Как показано в Приложении, существование скейлинговой симметрии означает, что кроме полной энергии  $H$  модель сохраняет еще один интеграл

$$G = \frac{1}{8} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - HI,$$

где  $I$  — момент инерции островка, пропорциональный квадрату характерного размера островка  $\langle r \rangle$ , умноженного на его вертикальную амплитуду  $\langle h \rangle$ . Величина  $I$  является индикатором коллапса, который наступает при  $\langle r \rangle \rightarrow 0$  и  $\langle h \rangle \rightarrow \infty$ , а интегралы  $H$  и  $G$  определяют характерное время коллапса  $t_0$ .

Существование интегралов  $H$  и  $G$  позволяет установить критерий коллапса островков. По существу, дифференцирование  $G$  по текущему времени  $t$  сразу дает так называемую вириальную теорему

$$d^2I/dt^2 = 4H.$$

Достаточный критерий коллапса, который непосредственно следует из этой теоремы, гласит, что положительная величина  $I$  обращается в нуль за конечный промежуток времени для любых начальных состояний, соответствующих отрицательным  $H$ . Поскольку жидкость несжимаема, это означает, что островки более легкой жидкости коллапсируют на вертикальную ось, формируя бесконечно узкие (сингулярные) восходящие струи. Для струй, развивающихся из состояний покоя, их высота растет как

$$h \propto (1 - t^2/t_0^2)^{-1}$$

и достигает бесконечности за конечный промежуток времени

$$t_0 = \sqrt{G/8H^2}.$$

Явлению коллапса (взрывной неустойчивости) посвящена обширная литература (см., например, работу [8] и ссылки там). Это явление является достаточно универсальным механизмом, с помощью которого неустойчивости проявляются в нелинейных физических системах [3, 9–15]. Именно поэтому логично предположить, что коллапсы могут оказаться ключевыми для понимания сильной турбулентности [16–18].

Очевидно, что сценарий автотельного коллапса в гидростатической модели является идеализацией. На самом деле, чем ближе система к коллапсу, тем больше отклонение от гидростатического приближения. Поэтому как показано в работах [6, 7] (см.

также ниже рис. 3), под влиянием негидростатичности режим взрывной неустойчивости замедляется и выходит на режим алгебраической неустойчивости.

Появление алгебраической неустойчивости в модели может быть легко предсказано на основании соображений размерностей. Предположим, что кроме характерного интервала формирования особенности  $t_0$  модель имеет и другие параметры, среди которых гравитационное ускорение  $g$ , высота струи  $h$ , ее начальное значение  $h_0$ , текущее время  $t$  и число Атвуда  $A$ . Таким образом,

$$h = h(t, g, t_0, h_0, A),$$

и это означает, что в качестве безразмерной комбинации допустима только функциональная зависимость

$$h = h_0 F(gt^2/h_0, t_0/t, A)$$

с тремя аргументами. На достаточно больших временах,  $t \gg t_0$ , когда второй аргумент стремится к нулю, система должна «забывать» свое начальное состояние, и зависимость от  $h_0$  должна исчезать. Но это возможно, только если функция  $F$  линейна по первому аргументу. В итоге, эти качественные аргументы приводят нас к закону

$$h \propto gt^2 f(A).$$

Минимальная негидростатическая модель позволяет описать не только начальную и алгебраическую стадии (см. ниже асимптотики  $a$  и  $b$  на рис. 3), но также и переход между ними. Обе эти стадии являются результатом автомодельного развития восходящих струй, возникающих под влиянием РТН в пренебрежении диссипативными эффектами. Однако число нерешенных вопросов возрастает, если мы обратимся к более общим моделям, которые используют другие граничные и начальные условия и учитывают эффекты вязкости, диффузии, тепловой и электрической проводимости. Все эти причины приводят к возникновению новых характерных масштабов движения.

Очевидно, что из всех диссипативных потерь наиболее важными являются те, которые влияют на силу Архимеда. Именно поэтому тепловые потери из-за выхолаживания более важны по сравнению с вязкими. Действительно, температурное сглаживание из-за выхолаживания приводит к гомогенизации плотности. В конечном счете, для теплых восходящих струй это означает, что они становятся нейтрально плавучими и, следовательно, двигаются по инерции с постоянной скоростью без воздействия каких-либо внешних сил.

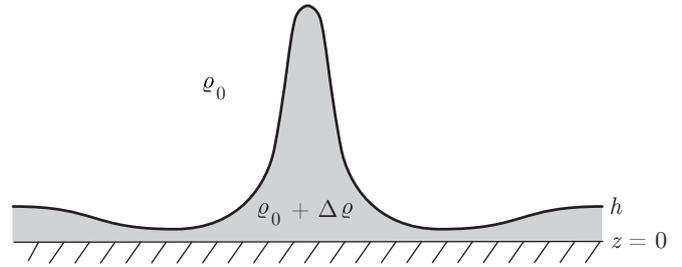


Рис. 1. Модель активного (нижнего) слоя с горизонтально неоднородной плотностью

Таким образом, если негидростатическая модель включает эффект выхолаживания, она должна предсказывать выход на инерционный режим, в котором высота восходящей струи растет по закону

$$h \propto h_* + c_* t.$$

Влияние модельных параметров на  $h_*$  и  $c_*$  является одной из целей данной работы.

Эта работа построена следующим образом. В разд. 2 обсуждается модельная постановка и формулируются основные уравнения движения. Автомодельные решения модели анализируются в разд. 3, здесь же рассматриваются возможные сценарии ее поведения. В разд. 4 мы суммируем наши результаты. Приложение посвящено скейлинговой симметрии, которая ответственна за автомодельность на начальной стадии развития РТН.

## 2. НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С НЬЮТОНОВСКИМ ВЫХОЛАЖИВАНИЕМ

В предыдущих работах [6,7] рассматривалась модель, которая описывалась системой уравнений

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{2h} \nabla(h^2 \tau) - \frac{1}{3h} \nabla \left( h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} \right), \quad (1)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t \tau + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) описывают усредненное по глубине течение в активном (нижнем) слое в негидростатическом приближении и могут быть сформулированы в рамках двухслойной модели, которая приведена на рис. 1. Данная консервативная модель предполагает, что по обе стороны от контактной границы  $z = h(\mathbf{x}, t)$  под влиянием силы тяжести  $g$  находятся две несжимаемые жидкости. Верхняя жидкость плотностью  $\rho_0 = \text{const}$  простирается до  $z = \infty$ , а нижняя плотностью  $\rho_0 + \Delta \rho(\mathbf{x}, t)$ , где  $\Delta \rho/\rho_0 \ll 1$ , опирается на горизонтальное дно  $z = 0$ .

В уравнениях (1)–(3) используются следующие обозначения:  $\mathbf{x}$  — декартовы горизонтальные координаты,  $\nabla$  — оператор горизонтального градиента,  $\partial_t$  и  $d/dt$  — частная и полная производные по времени,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — усредненная по глубине горизонтальная скорость в нижнем (активном) слое,  $\tau(\mathbf{x}, t) = g\Delta\rho/\rho_0$  — относительная плавучесть, которая, в отличие от величины  $h$ , может иметь любой знак.

В простейшем случае  $\tau = g = \text{const}$ , уравнения (1)–(3) переходят в известные уравнения Грина–Нагди, описывающие гравитационные волны на поверхности мелкой воды в приближении негидростатичности [19–23]. Если гидростатическое равновесие нарушено слабо, поправка Грина–Нагди (последний член в уравнении (1)) достаточно мала по сравнению с предыдущими членами. Именно в этом приближении уравнения (1)–(3) использовались для изучения развития РТН в крупномасштабных течениях с горизонтально неоднородной плотностью [3–5].

В противоположном предельном случае, в приближении глубокой воды, когда гидростатическое равновесие нарушено сильно, оба члена становятся главными и должны компенсировать друг друга. В соответствии с принципом доминантного баланса это означает, что  $d^2h/dt^2 \approx -3\tau/2$ . Именно поэтому фронт узкой струи с отрицательной плавучестью  $\tau_0$  перемещается по закону  $h \approx 3\tau_0 t^2/4$  [6, 7].

Построение адекватных моделей, способных описать динамику в приближении глубокой воды, основано не на асимптотических разложениях, а на принципе доминантного баланса. Их визуальное сходство с моделями мелкой воды, которые модифицированы поправками на негидростатичность, не должно быть поводом для беспокойства. Принцип доминантного баланса подразумевает, что в режиме мелкой воды изменения потенциальной энергии, главным образом, вызваны горизонтальными движениями, тогда как в режиме глубокой воды — вертикальными.

Необходимо отметить, что подход, используемый при выводе уравнений динамики активного слоя, концептуально весьма близок к подходу, сформулированному Ферми и фон Нейманом в работах [24, 25]. Независимо от того, какой используется формализм (лагранжевский или гамильтоновский), он «работает» успешно всякий раз, когда есть весомые физические основания считать, что лишь некоторые симметрии и соответствующие связи являются самыми важными, и именно они ответственны за главные особенности поведения системы. Однако, так как такие модели являются следствием грубых парамет-

ризаций, необходимо дополнительное тестирование, чтобы убедиться в их эффективности в режиме глубокой воды.

Рассмотрим новый физический эффект, состоящий в замедлении процесса РТН из-за возможного изменения плавучести. В зависимости от механизма изменения плавучести (охлаждение, фазовые преобразования и т. д.), существуют различные способы ее параметризации. Для простоты вместо уравнения (3) будем использовать уравнение релаксационного типа

$$\partial_t \tau + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau = -\tau/T_c, \quad (4)$$

где  $T_c$  — характерное время релаксации для ньютонова выхолаживания. Отметим, что ньютоновское выхолаживание является эффективной величиной, которая подразумевает совокупные тепловые потери, включая и тепловое излучение. Для реальных физических моделей выхолаживание за счет излучения может использоваться для оценки верхней границы характерного времени релаксации.

### 3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ (РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

В радиально-симметричном случае и в отсутствие вращения уравнения (1), (2), (4) выглядят следующим образом:

$$h \frac{du}{dt} + \partial_r \left( \frac{1}{2} h^2 \tau + \frac{1}{3} h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} \right) = 0, \quad (5)$$

$$r \frac{dh}{dt} + h \partial_r (ru) = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\tau}{T_c}. \quad (6)$$

Здесь радиальная компонента скорости  $u$ , высота  $h$  и плавучесть  $\tau$  зависят только от радиальной координаты  $r$  и времени  $t$ .

Уравнения (5), (6) более удобно использовать, записав их в лагранжевых координатах. Переход к лагранжевым координатам осуществим с помощью параметризации  $r = \hat{r}(s, t)$ , где  $s$  — новая независимая переменная, такая что

$$u(r, t)|_{r=\hat{r}} = \hat{r}_t(s, t), \quad h(r, t)|_{r=\hat{r}} = \hat{h}(s, t), \quad (7)$$

$$\tau(r, t)|_{r=\hat{r}} = \hat{\tau}(s, t). \quad (8)$$

Здесь и далее использование « $t$ » и « $s$ » в качестве нижних индексов обозначает частные производные  $f_t = \partial_t f$ ,  $f_s = \partial_s f$ .

В новых переменных уравнения (5), (6) записываются в виде

$$\hat{h}\hat{r}_s\hat{r}_{tt} + \partial_s \left( \frac{1}{2}\hat{h}^2\hat{r} + \frac{1}{3}\hat{h}^2\hat{h}_{tt} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t (\hat{h}\hat{r}\hat{r}_s) = 0, \quad \hat{r}_t = -\frac{\tau}{T_c}. \quad (10)$$

Точно так же, как и для недиссипативной версии этой модели [3–7], уравнения (9), (10) допускают решения с разделяющимися переменными на компактном носителе:

$$\hat{h} = h_0\eta\sqrt{1-s^2}, \quad \hat{r} = \frac{r_0}{\sqrt{\eta}}s, \quad (11)$$

$$\hat{r} = -\tau_0 e^{-t/T_c} \sqrt{1-s^2}. \quad (12)$$

Здесь  $\eta(t)$  — искомая переменная, зависящая от времени,  $0 \leq s \leq 1$ , а  $h_0, \tau_0$  — положительные константы, которые фиксируются начальными условиями. Если мы налагаем начальное условие  $\eta(0) = 1$ , то  $h_0$  и  $r_0$  подразумевают, соответственно, начальную высоту и начальный радиус. Отметим, что после возвращения к эйлеровому описанию в терминах  $h, u$  и  $\tau$  эти переменные становятся автомодельными решениями и описывают полуэллипсоидальную каплю, которая лежит на горизонтальном дне и со временем превращается в тонкую струю.

Подставляя (11), (12) в (9), (10), мы получим

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{8\phi^2\eta^3} \right) \right] - 3\frac{\tau_0}{h_0} \frac{d\eta}{dt} e^{-t/T_c} = 0, \quad (13)$$

где безразмерная величина  $\phi = h_0/(2r_0)$  имеет простой геометрический смысл — определяет формат капли в начальный момент времени  $t = 0$ .

Пусть масштаб времени  $T$  выбран так, что  $h_0 = 3\tau_0 T^2/2$ . Тогда, после приведения к безразмерному виду, уравнение (13) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{d\eta}{dt'} \sqrt{1 + \frac{1}{8\phi^2\eta^3}} = p, \quad \frac{dp}{dt'} \sqrt{1 + \frac{1}{8\phi^2\eta^3}} = e^{-\alpha t'}, \quad (14)$$

где  $\alpha = T/T_c$  — декремент выхолаживания, а  $t' = t/T$  — безразмерное время.

Поскольку нас интересуют только решения, которые соответствуют состоянию покоя, уравнения (14) должны решаться при начальных условиях

$$\eta(0) = 1, \quad p(0) = 0, \quad (15)$$

а  $\phi$  и  $\alpha$  играют роль параметров модели.

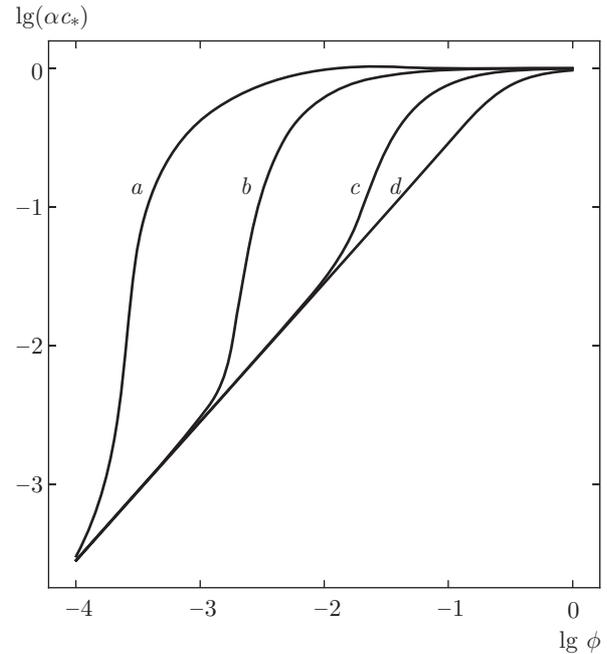


Рис. 2. Зависимость приведенного декремента роста  $\alpha c_*$  струи от ее начального формата  $\phi$ . Кривые  $a, b, c, d$  рассчитаны для  $\alpha$ , принимающего значения соответственно 0.001, 0.01, 0.1, 1

Чтобы найти верхнюю оценку для скорости роста струи на стадии, когда выхолаживание нейтрализует плавучесть, уравнения (14) достаточно решить приближенно. Предполагая, что  $\eta \rightarrow \infty$  при  $t' \rightarrow \infty$ , мы асимптотически находим

$$\eta \approx \eta_* + c_* t', \quad p \approx c_*, \quad (16)$$

где  $\eta_*$  и  $c_*$  — некоторые константы интегрирования, зависящие от  $\alpha$  и  $\phi$ .

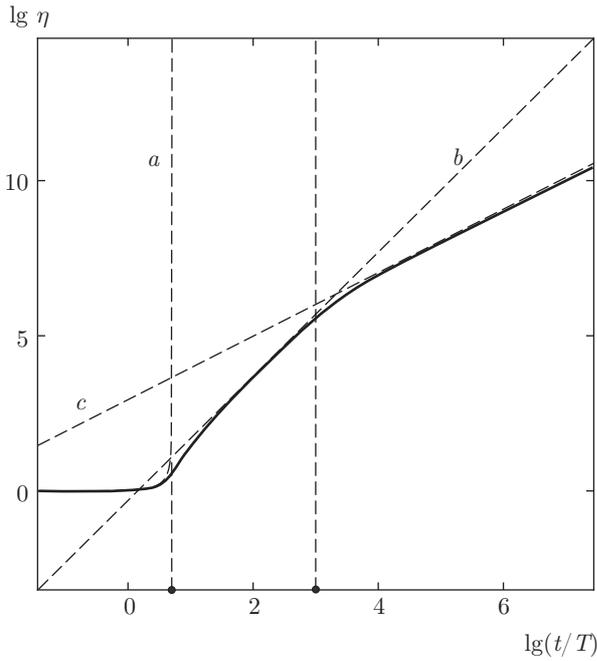
Если  $\phi \gg 1$ , эти константы могут быть найдены явно:

$$\eta_* = 1 - \alpha^{-2}, \quad c_* = \alpha^{-1}.$$

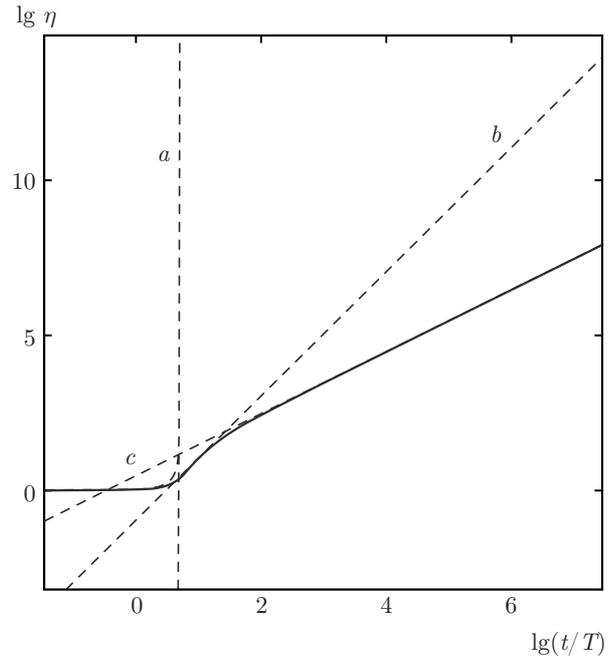
Таким образом, согласно рис. 2, в этом случае, неравенство  $\alpha^{-1} \geq c_*$  дает для скорости роста струи оценку сверху, а неравенство  $\phi/\alpha \leq c_*$  — оценку снизу.

Все три стадии неустойчивости — режим коллапса, режим алгебраического роста и инерционный режим вполне отчетливо различаются, если только время ньютоновского выхолаживания  $T_c$  много больше времени коллапса  $t_0$ . Поскольку, согласно уравнению (28)

$$t_0 = \sqrt{\frac{h_0}{6\tau_0\phi^2}} = \frac{T}{2\phi},$$



**Рис. 3.** Три стадии неустойчивости: режим коллапса (*a*), режим алгебраической неустойчивости (*b*) и инерционный режим (*c*). Режим алгебраической неустойчивости заключен между вертикальными штриховыми линиями. Вычисления выполнены для параметров  $\phi = 0.1, \alpha = 0.01$



**Рис. 4.** Переход к инерционному режиму без стадии алгебраического роста. Обозначения совпадают с обозначениями на рис. 3, а вычисления выполнены для параметров  $\phi = 0.1, \alpha = 0.1$

это условие подразумевает, что  $2\phi \gg \alpha$ . В противном случае режим алгебраического роста маскируется инерционным.

На рис. 3 приведен случай слабого выхолаживания, когда  $T_c \gg t_0$ . Режим коллапса развивается на начальной стадии и продолжается до тех пор, пока справедливо неравенство  $\phi^2 \eta^3 < 1$ . В этом приближении (14), (15) преобразуются в уравнения

$$\frac{d\eta}{dt'} = 2\sqrt{2}\phi p \eta^{3/2}, \quad \frac{dp}{dt'} = 2\sqrt{2}\phi \eta^{3/2}, \quad (17)$$

$$\eta(0) = 1, \quad p(0) = 0, \quad (18)$$

которые имеют коллапсирующее решение (см. [3, 4])

$$\eta = (1 - 4\phi^2 t'^2)^{-1}. \quad (19)$$

Это решение (см. рис. 3) остается справедливым, пока  $t$  не приблизится к  $t_0$ . Далее, в интервале  $t_0 < t < T_c$ , струя развивается в режиме алгебраического роста. На данном этапе, если выхолаживание оказывает слабое влияние, неустойчивость может быть приближенно описана уравнениями

$$d\eta/dt' = p, \quad dp/dt' = 1, \quad (20)$$

которые приводят к закону квадратичного роста

$$\eta = t'^2/2. \quad (21)$$

Если охлаждение настолько сильно, что времена  $t_0$  и  $T_c$  становятся сравнимыми или даже  $T_c < t_0$ , то переход к инерционному режиму происходит, минуя стадию алгебраического роста. Как раз этот случай и показан на рис. 4.

Решения (16), (19), (21), соответствующие трем режимам неустойчивости, могут быть получены как приближенные решения исходных уравнений, в которых для каждого конкретного режима мы удерживаем лишь главные члены. Самый простой способ осуществить это — использовать уравнения движения (9), (10), сформулированные в лагранжевых переменных.

Если выхолаживание достаточно незначительное,  $t_0 \ll T_c$ , на первой стадии,  $t \ll t_0 \ll T_c$ , пока гидростатическое равновесие нарушено слабо, последний член в круглой сколке уравнения (9) пренебрежимо мал и может быть опущен. Таким образом решение (19) следует из баланса двух оставшихся членов.

На следующей стадии,  $t_0 \ll t \ll T_c$ , аналогичные соображения позволяют нам исключить первый член в уравнении (9). Таким образом, решение (21) определяется только членами, заключенными в круглые скобки.

На последней стадии,  $t \gg T_c$ , из-за того, что вместе с плавучестью исчезает Архимедова сила, система выходит на инерционный режим. Очевидно, что в этом случае частицы жидкости, находящиеся в границе раздела, перемещаются с постоянными скоростями в соответствии с (16).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь мы суммируем основные результаты работы. Главная цель этой работы заключается в изучении совместного влияния негидростатичности и процесса выхолаживания на финальной стадии РТН в модели активного слоя с горизонтально неоднородной плотностью.

Как показано, динамика слоя, развивающегося из состояний покоя, определена двумя временными масштабами  $t_0$  и  $T_c$ . Масштаб  $t_0$  представляет собой время коллапса, необходимое для формирования особенности в гидростатической версии модели (см. Приложение), а  $T_c$  — характерное время ньютоновского выхолаживания.

В радиально-симметричном случае и в отсутствие вращения в лагранжевых координатах динамика слоя описывается только двумя переменными  $\hat{h}$ ,  $\hat{r}$ , которые определяют форму границы раздела, в то время как распределение плавучести  $\hat{\tau}$  не зависит от времени. Из-за автомодельности все динамические переменные могут быть выражены через начальные амплитудные параметры  $\tau_0$ ,  $h_0$ ,  $r_0$  и единственную безразмерную переменную  $\eta(t)$  таким образом, что  $\eta|_{t=0} = 1$  и  $d\eta/dt|_{t=0} = 0$ .

Чтобы вернуться к эйлеровому описанию, необходимо решить систему (7), (8). Используя связь  $r = r(s, t)$  и исключая лагранжеву координату  $s$ , мы получим автомодельные решения

$$h(r, t) = h_0 \eta \sqrt{1 - \eta \left( \frac{r}{r_0} \right)^2}, \quad u(r, t) = -\frac{\eta t}{2\eta} r,$$

$$\tau(r, t) = -\tau_0 e^{-t/T_c} \sqrt{1 - \eta \left( \frac{r}{r_0} \right)^2},$$

которые описывают эволюцию струи в физических (эйлеровых) координатах.

Если масштаб времени  $t' = t/T$  выбран так, что  $T = ((2/3)h_0/\tau_0)^{1/2}$ , то модель имеет два безразмерных управляющих параметра  $\alpha$  и  $\phi$ , которые определяются соотношениями

$$\alpha = \frac{T}{T_c}, \quad \phi = \frac{h_0}{2r_0} = \frac{T}{2t_0}.$$

В частности, как следует из последнего из них, относительно быстрый коллапс ( $t_0 \ll T$ ) типичен для достаточно узких струй ( $h_0 \gg r_0$ ). И наоборот, относительно медленный коллапс ( $t_0 \gg T$ ) типичен для достаточно широких струй ( $h_0 \ll r_0$ ).

Как показано в данной работе, все три режима (коллапс, алгебраическая неустойчивость и инерционное движение) существуют только для струй, у которых начальный формат  $\phi$  настолько большой, а выхолаживание слабо, что справедливо неравенство  $1 > 2\phi \gg \alpha$ .

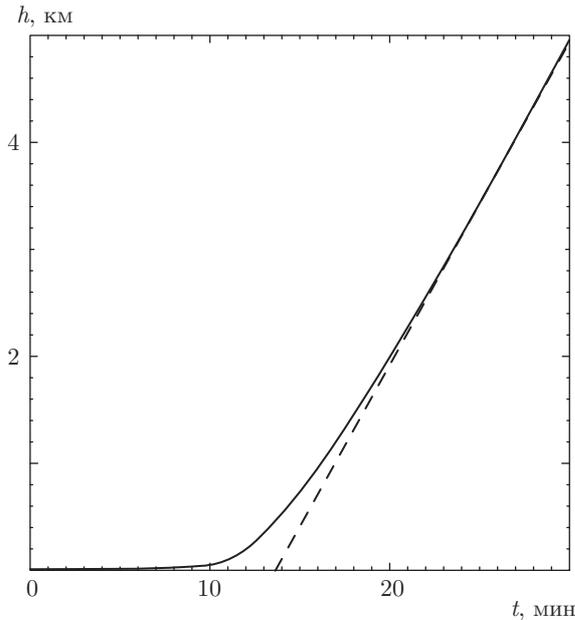
В этой иерархической последовательности режимов инерционное движение является единственной стадией, которая асимптотически всегда достигается в присутствии выхолаживания независимо от начальных условий. Существование двух предыдущих стадий зависит от начальных условий.

Если начальные условия таковы, что формат  $\phi = h_0/(2r_0)$  становится порядка единицы, у режима коллапса для развития не остается достаточно времени. В этом случае существование и время жизни второй стадии, когда высота струи растет квадратично по времени, зависят от соотношения между временем коллапса  $t_0$  и временем выхолаживания  $T_c \gg t_0$ . Чем слабее неравенство  $T_c \gg t_0$  и, следовательно,  $2\phi \gg \alpha$ , тем короче вторая стадия. При  $T_c \lesssim t_0$  она вообще отсутствует.

Чтобы оценить влияние выхолаживания на скорость роста струй, рассмотрим условия, типичные для земной атмосферы. Предположим, что в начальном состоянии тепловой остров имеет полуэллипсоидальную форму (11) и характеризуется высотой  $h_0 = 10$  м, придонным диаметром  $d_0 = 1$  км, и кроме того на  $\Delta T = 2^\circ\text{C}$  теплее, чем окружающая его атмосфера. Эти значения соответствуют формату  $\phi = 0.01$  и масштабу времени  $T \approx 10$  с. Если время выхолаживания составляет  $T_c \approx 5$  мин, то  $\alpha = T/T_c = 0.03$ , и наша теория дает  $c_* \approx 5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ . Как показано на рис. 5, такая скорость роста достигается на высоте около 2 км спустя приблизительно 20 мин, когда тепловой остров превращается в тонкую струю, движущуюся по инерции.

Отметим, что в данном примере струя переходит в режим инерционного движения без промежуточной стадии алгебраической неустойчивости. Это происходит потому, что время выхолаживания  $T_c \approx 5$  мин является меньше чем время коллапса  $t_0 \approx 8$  мин.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-05-00854) и программы прези-



**Рис. 5.** Временная зависимость высоты струи в типичных для земной атмосферы условиях. Штриховая линия соответствует инерционному режиму

диума РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Скейлинговая симметрия минимальной модели

В качестве минимальной модели рассмотрим двумерное течение, эволюция которого описывается уравнениями

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = G_0 \mathbf{x} - \frac{1}{2h} \nabla (h^2 \tau), \quad (22)$$

$$\partial_t h + \nabla (h \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau = 0. \quad (23)$$

Уравнения описывают усредненное по глубине течение в активном (нижнем) слое в гидростатическом приближении мелкой воды и могут быть сформулированы в рамках двухслойной модели, которая приведена на рис. 1.

Отметим, что приложенная к жидкости центральная сила  $G_0 \mathbf{x}$  может быть как центростремительной, так и центробежной, в зависимости от знака константы  $G_0$ . Более подробный вывод и обсуждение этой модели можно найти в работах [3–5].

Уравнения (22), (23) являются гамильтоновыми и могут быть получены из первых принципов с использованием скобок Пуассона

$$\{u_i, u'_k\} = h^{-1} \delta (\partial_i u_k - \partial_k u_i),$$

$$\{h, u'_k\} = -\partial_k \delta, \quad \{\tau, u'_k\} = -h^{-1} \delta \partial_k \tau$$

и гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} \int dx (h \mathbf{u}^2 + h^2 \tau - G_0 h \mathbf{x}^2).$$

Здесь и далее штрихованные полевые переменные означают зависимость от штрихованных пространственных координат,  $\delta = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  — дельта-функция Дирака, все тривиальные скобки Пуассона опущены для экономии места, и все интегралы берутся по всей области, занятой жидкостью.

Кроме интеграла  $H$  система имеет и другие инварианты движения. Некоторые из них являются аннуляторами скобок Пуассона и известны как Казимиры. Простейшим примером таких инвариантов для модели (22), (23) являются полная масса  $Q$  и полная плавучесть  $N$

$$Q = \int dx h, \quad N = \int dx h \tau.$$

Если сохраняющийся функционал  $F$  не является Казимиром, то он — генератор преобразования симметрии, при котором уравнения движения инвариантны [26].

Чтобы найти такой инвариант, рассмотрим два интеграла

$$V = \int dx h (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}), \quad I = \int dx h \mathbf{x}^2,$$

известные как вириал и момент инерции.

Непосредственно можно убедиться, что зависящие от времени интегралы  $V$  и  $I$  подчиняются уравнениям

$$\frac{dI}{dt} = 2V, \quad \frac{dV}{dt} = 2(H + G_0 I).$$

Эти уравнения могут быть переписаны в канонической форме

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial G}{\partial V}, \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial I}, \quad (24)$$

$$G = V^2 - 2IH - G_0 I^2,$$

где функционал  $G$  играет роль гамильтониана и, следовательно, является новым инвариантом движения.

Поскольку  $G$  является инвариантом движения, дифференцируя по времени, получим

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 4(H + G_0 I). \quad (25)$$

Если  $G_0 = 0$ , из (25) следует, что

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 4H. \quad (26)$$

В нелинейной оптике [27] это соотношение известно как вириальная теорема. В том простом случае, когда решения развиваются из состояний покоя  $(dI/dt)_{t=0} = 0$ , уравнения (24), (26) дают

$$I = -\frac{G}{2H} + 2Ht^2. \quad (27)$$

Таким образом, неравенства  $H < 0$  и  $G \geq 0$  являются необходимым и достаточным условием для коллапса из состояния покоя.

Время коллапса  $t_0$  определяется как время, за которое величина  $I$  обращается в нуль. Если  $G_0 = 0$ , из этого условия и уравнения (27) легко найти, что

$$t_0 = \sqrt{\frac{G}{4H^2}} = \sqrt{-\frac{I_0}{2H_0}}, \quad H_0 = \frac{1}{2} \int dx h^2 \tau, \quad (28)$$

где  $I_0, H_0$  — интегралы, вычисленные по начальным распределениям  $h, \tau$  при условии, что  $\mathbf{u} = 0$ .

Чтобы показать, что инвариант  $G$  обусловлен скейлинговой симметрией, рассмотрим преобразование, которое связывает независимые и зависимые переменные следующим образом:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{I}}, \quad t' = \int \frac{dt}{I}, \quad h = \frac{h'}{I}, \quad \tau = \tau'. \quad (29)$$

Отметим, что это преобразование представляет собой аналог линзового преобразования, найденного впервые в работе [28] для критического нелинейного уравнения Шредингера.

Используя тот факт что

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{I}} (\mathbf{u}' + V \mathbf{x}'),$$

легко проверить, что преобразование (29) оставляет уравнения (22), (23) инвариантными, а именно, приводит их к виду

$$\partial_t' \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = G \mathbf{x}' - \frac{1}{2h'} \nabla' (h'^2 \tau'), \quad (30)$$

$$\partial_t' h' + \nabla' (h' \mathbf{u}') = 0, \quad \partial_t' \tau' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \tau' = 0, \quad (31)$$

где  $\nabla' = \partial/\partial \mathbf{x}'$  и  $\partial_t' = \partial/\partial t'$ . При этом, зависящие от времени интегралы  $I, V$  также становятся инвариантами:

$$I \rightarrow I' = 1, \quad V \rightarrow V' = 0,$$

а интегралы движения  $H, G$  изменяются как

$$H \rightarrow H' = -G, \quad G \rightarrow G' = G.$$

Полученные равенства должны рассматриваться как условия нормировки при решении задачи (30), (31).

Отметим, что в частном случае стационарных решений, когда  $\mathbf{u}' = 0$ , все условия за исключением  $I' = 1$  удовлетворяются автоматически и задача (30), (31) сокращается до уравнения

$$2Gh' \mathbf{x}' = \nabla' (h'^2 \tau').$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Биркгоф, *Гидродинамика. Методы, факты, подобию*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
2. L. Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. **14**, 170 (1883).
3. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **96**, 474 (2012).
4. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Phys. Rev. E **88**, 023002 (2013).
5. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **144**, 867 (2013).
6. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, Письма в ЖЭТФ **101**, 490 (2015).
7. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Phys. Rev. E, **91**, 043004 (2015).
8. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012).
9. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, Письма в ЖЭТФ **84**, 459 (2006).
10. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Phys. Rev. E **76**, 066314 (2007).
11. В. П. Гончаров, Письма в ЖЭТФ **89**, 457 (2009).
12. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, ЖЭТФ **138**, 137 (2010).
13. В. П. Гончаров, ЖЭТФ **140**, 820 (2011).
14. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *Гамильтонова вихревая и волновая динамика*, ГЕОС, Москва (2008).

15. J. Eggers and M. A. Fontelos, *Nonlinearity* **22**, R1 (2009).
16. Е. А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **80**, 92 (2004).
17. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. J. Rasmussen, *Phys. Fluids* **19**, 105110 (2007).
18. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Письма в ЖЭТФ **99**, 365 (2014).
19. D. H. Peregrine, *J. Fluid Mech.* **27**, 815 (1967).
20. A. E. Green and P. M. Naghdi, *J. Fluid Mech.* **78**, 237 (1976).
21. T. Y. Wu, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE* **107**, 501 (1981).
22. R. Camassa and D. D. Holm, *Physica D* **60**, 1 (1992).
23. R. Camassa, D. D. Holm, and J. M. Hyman, *Adv. Appl. Mech.* **31**, 1 (1994).
24. E. Fermi, *Collected Papers of Enrico Fermi*, University of Chicago Press, Chicago (1965), Vol. II, Chap. 244, p. 816.
25. E. Fermi, *Collected Papers of Enrico Fermi*, University of Chicago Press, Chicago (1965), Vol. II, Chap. 245, p. 821.
26. S. Bowman, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **102**, 173 (1987).
27. В. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, *Изв. вузов. Радиофиз.* **14**, 1353 (1971).
28. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1970).