

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПИННИНГА МНОГОКВАНТОВОГО ВИХРЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

А. В. Самохвалов^{a,b}, А. С. Мельников^{a,b}*

^a *Институт физики микроструктур Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

^b *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 19 сентября 2017 г.

Предложена и развита микроскопическая модель депиннинга (срыва) многоквантового вихря в сверхпроводнике с цилиндрической непроводящей полостью, поперечные размеры которой меньше или порядка сверхпроводящей длины когерентности ξ_0 при нулевой температуре. В квазиклассическом приближении вычислен спектр подщелевых квазичастичных возбуждений в двух- и трехквантовом вихрях, захваченных цилиндрической полостью. Показано, что трансформация спектра из-за нормального отражения квазичастиц от поверхности дефекта сопровождается разрывом аномальных веток спектра. Предложен микроскопический (спектральный) критерий пиннинга многоквантового вихря, согласно которому захват многоквантового вихря в полости возможен при формировании минищели в спектре элементарных возбуждений вблизи уровня Ферми. Самосогласованные расчеты плотности состояний $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$ для двух- и трехквантового вихрей, захваченных цилиндрической полостью радиуса порядка ξ_0 , выполнены с использованием квазиклассических уравнений Эйленбергера. В чистом пределе и для низких температур $T \ll T_c$ обнаружены особенности распределения $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$, отражающие присутствие в M -квантовом вихре M аномальных веток спектра и подтверждающие справедливость спектрального критерия пиннинга (депиннинга) многоквантового вихря.

DOI: 10.7868/S0044451018020098

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема пиннинга магнитного потока является одним из фундаментальных вопросов физики вихревого состояния в сверхпроводниках второго рода, имеющим одновременно и большое прикладное значение [1, 2]. Возможности практического применения сверхпроводников второго рода существенно зависят от качества создаваемых в сверхпроводнике искусственных центров пиннинга, с которыми эффективно взаимодействуют вихри. Типичным примером подобных центров пиннинга служат разнообразные полости, заполненные нормальным металлом или изолятором, создаваемые литографическим путем [3–7], либо в результате облучения сверхпроводника протонами [8] или тяжелыми иона-

ми [9]. Развитие технологии изготовления сверхпроводящих образцов, в которых созданы различные несверхпроводящие структуры, делает актуальной задачу о взаимодействии вихря Абрикосова с различными мезоскопическими неоднородностями и включениями и депиннинге (срыве) вихря под действием внешнего тока.

Ключевым вопросом для понимания явлений, связанных с пиннингом вихрей, является вычисление элементарной силы пиннинга, определяющей взаимодействие одиночного вихря Абрикосова и дефекта. Поскольку характерный размер кора вихря — длина когерентности ξ , пиннинг вихрей оказывается особенно сильным, если дефекты представляют собой протяженные полости с поперечными размерами порядка длины когерентности, вытянутые вдоль направления вихревой нити (приложенного магнитного поля). Простейшей моделью такого локализованного центра пиннинга в сверхпроводнике может служить цилиндрическая полость, за-

* E-mail: samokh@ipmras.ru

полненная изолятором. Хорошо известны две основные причины, обеспечивающие притяжение вихря к полости, в которой сверхпроводящий параметр порядка подавлен или отсутствует. Прежде всего это выигрыш в энергии конденсации, необходимой для создания нормальной сердцевины вихря Абрикосова. Кроме того, следует принимать во внимание возмущения сверхтока и магнитного поля в вихре, вызванные присутствием неоднородности. В результате возникает потенциальный барьер, препятствующий выходу вихря из полости, подобный барьеру Бина – Ливингстона [10].

Впервые задача о взаимодействии одиночного вихря Абрикосова и цилиндрической непроводящей полости радиуса $\xi \ll R \ll \lambda$ в массивном сверхпроводнике второго рода была решена в лондонском приближении в классической работе [11] (λ — лондонская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник). Плотность критического тока j_p депиннинга, т. е. максимальное значение плотности j внешнего тока, при которой вихрь еще остается локализованным в цилиндрической полости, оказывается порядка плотности критического тока в модели Лондонов [12],

$$j_p \sim j_c = \frac{cH_{cm}}{4\pi\lambda} = \frac{c\Phi_0}{8\sqrt{2}\pi^2\lambda^2\xi}, \quad (1)$$

для дефектов радиусом порядка длины когерентности, $R \sim \xi$, и быстро убывает при уменьшении радиуса полости. Заметим, что плотность тока j_c (1) близка по величине к плотности тока распаривания

$$j_d = \frac{ek_F^2\Delta_0}{3\pi^2\hbar}, \quad (2)$$

получаемой из микроскопической теории. В формулах (1), (2) H_{cm} — термодинамическое критическое поле, Φ_0 — квант потока, Δ_0 — сверхпроводящая щель при $T = 0$ далеко от вихря и дефекта, а $k_F = 2\pi/\lambda_F$ — волновой вектор на поверхности Ферми.

Обобщение результатов работы [11] для случая $R \gtrsim \lambda$, когда становятся существенными эффекты экранировки, выполнено в работе [13], где было показано, что в предельном случае $R \rightarrow \infty$ взаимодействие вихря и цилиндрической непроводящей полости описывается хорошо известным потенциалом Бина – Ливингстона для вихря у плоской поверхности сверхпроводника второго рода, что немедленно дает оценку плотности тока депиннинга: $j_p \sim j_c$. В работе [14] было отмечено, что в сверхпроводниках с большим параметром Гинзбурга – Ландау $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$ в широком диапазоне значений внешнего магнитного поля можно пренебречь лондонской

экранировкой. Это позволило авторам предложить эффективный метод расчета взаимодействия вихря с цилиндрической непроводящей полостью, основанный на аналогии уравнения Лондонов и уравнений 2D-электростатики: было показано, что магнитное поле может быть представлено в виде суммы полей, создаваемых вихрями в сверхпроводнике, и полей изображений вихрей, расположенных в полости. В дальнейшем данный метод был применен для расчета потенциала пиннинга вихря Абрикосова, взаимодействующего с дефектами более сложной формы на расстояниях $\xi < r \ll \lambda$ [15–17].

Для вычисления энергии пиннинга вихря Абрикосова на дефекте с характерными размерами порядка длины когерентности ξ при температурах T , близких к критической температуре T_c , адекватно использовать приближение Гинзбурга – Ландау, которое учитывает неоднородность модуля параметра порядка в коре вихря. Грубые оценки потенциала пиннинга вихря на малом дефекте с учетом «продавливания» параметра порядка в области дефекта дают очевидную квадратичную зависимость критического тока депиннинга от размера R дефекта [2]:

$$j_p \sim j_c(R/\xi)^2. \quad (3)$$

Для более точного расчета энергии взаимодействия вихря и дефекта используются различные численные методы решения уравнений Гинзбурга – Ландау [18] или минимизации соответствующего функционала [19, 20]. В отдельных случаях — сильных магнитных полей ($H \lesssim H_{c2}$) и соизмеримости решетки вихрей и центров пиннинга (число вихрей и число центров пиннинга совпадают) — удается получить аналитическое выражение для критического тока депиннинга методом пробных функций [21]. Подобные расчеты предсказывают заметно большее значение тока депиннинга для дефектов с $R \lesssim \xi$, чем дает интуитивная оценка (3). По мнению авторов работы [18] зависимость критического тока депиннинга от размера R дефекта скорее линейная ($j_p \sim j_c R/\xi$ для $R \leq \xi$), что объясняется существенными искажениями сверхтока в вихре из-за присутствия дефекта и влиянием межвихревого взаимодействия. Заметим, что в указанных случаях учитывалось и влияние соседних вихрей, т. е., по сути, исследовался коллективный пиннинг всей решетки Абрикосова в целом. Линейная зависимость j_p от R может быть также связана с сильной деформацией кора вихря и с формированием квазиодномерной области («струны») между кором вихря и границей дефекта, где параметр порядка заметно подавлен [20, 21]. Приближенное аналитическое решение уравнений

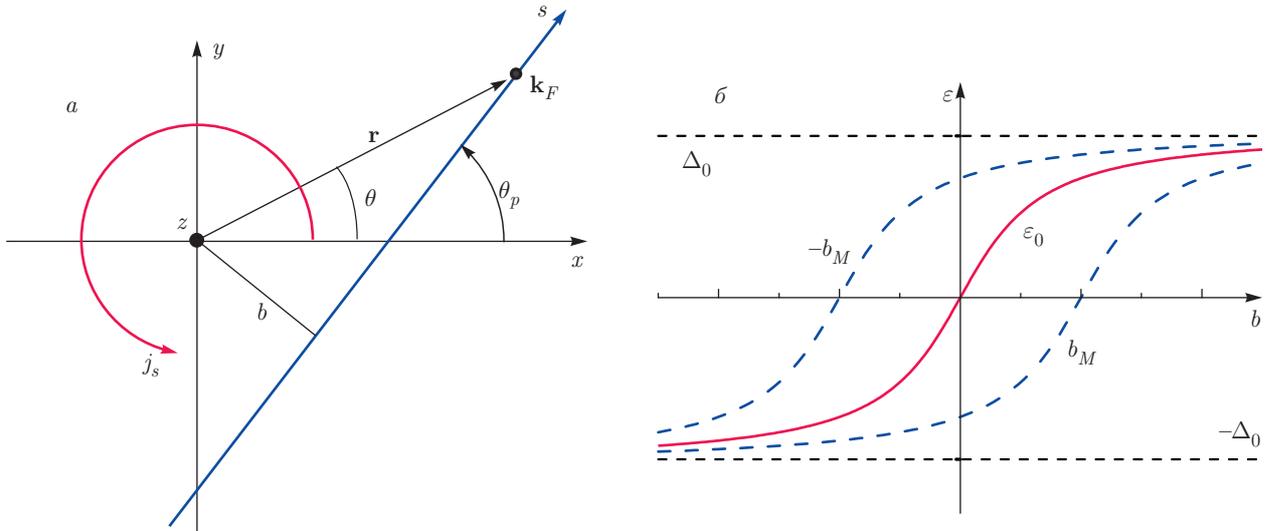


Рис. 1. а) Квазиклассическая траектория s с прицельным параметром b , проходящая через точку (r, θ) в направлении \mathbf{k}_F для вихря, расположенного в начале координат $x = y = 0$. б) Аномальные ветви спектра $\varepsilon(b)$ подщелевых состояний для одноквантового $M = 1$ (сплошная линия) и двухквантового $M = 2$ (штриховая линия) вихрей. Качественный вид спектра трехквантового вихря $M = 3$ легко представить, объединив случаи $M = 1$ и $M = 2$

Гинзбурга–Ландау, описывающее вихрь Абрикосова вблизи малой цилиндрической непроводящей полости ($\xi_0 \ll R \ll \xi$) и учитывающее вносимые дефектом искажения параметра порядка и сверхтока в вихре, получено в работе [17]. Вычисленный авторами ток дефининга вихря j_p примерно в пять раз превышает оценку (3). Заметим, что при $j < j_p$ авторами работы [17] было получено новое решение, описывающее связанное состояние вихря и дефекта, когда особенность $|\Delta| = 0$ в вихре располагается вне полости.

Длинноволновое приближение Гинзбурга–Ландау несправедливо, однако, при низких температурах $T \ll T_c$ и/или если размер дефекта настолько мал, $R \lesssim \xi_0$ ($\xi_0 = \hbar v_F / \Delta_0$ — длина когерентности при нулевой температуре), что становятся заметными микроскопические эффекты и необходимо учитывать особенности элементарных возбуждений в коре вихря с энергиями, лежащими в области сверхпроводящей щели. Такие дискретные подщелевые состояния в коре вихря, как известно, формируют аномальные ветви в спектре возбуждений, пересекающие уровень Ферми, и определяют как структуру, так и динамику вихрей Абрикосова при низких температурах [22]. Для одиночного вихря Абрикосова такие состояния описываются теорией Кароли–де Жена–Матрикона (Caroli–de Gennes–Matricon, CdGM) [23]: энергия подщелевых состояний $\varepsilon(\mu, k_\perp)$ изменяется от $-\Delta_0$ до

$+\Delta_0$ при изменении углового момента частицы $\mu = -bk_\perp = [\mathbf{r} \times \mathbf{k}_F] \cdot \mathbf{e}_z$, вычисленного относительно оси z вихря (рис. 1). При малых энергиях $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ спектр является линейной функцией дискретной величины $\mu = n + 1/2$ (n — целое число): $\varepsilon \approx -\omega_0 \mu$, где $\omega_0 = \Delta_0^2 / \varepsilon_F$ — расстояние между уровнями CdGM-спектра подщелевых состояний.

С микроскопической точки зрения движение вихря и возникающая при этом диссипация связаны с переносом возбуждений через сверхпроводящую щель по состояниям аномальной ветви спектра. При этом диссипация определяется переходами между дискретными состояниями в коре вихря [24–27], индуцированными процессами зерновского туннелирования. Оказалось, что присутствие даже одиночного атома примеси, расположенного в области сердцевинки вихря, вызывает существенную модификацию аномальной ветви, приводит к заметному изменению проводимости двумерных слоистых сверхпроводников [27] и особенностям микроволнового поглощения [28].

Заметим, что учет дискретности уровней квазичастиц в коре далеко не всегда является существенным при расчетах измеримых величин и существует широкий класс задач, в которых вполне достаточно использовать квазиклассическое приближение, справедливое при $\Delta_0 \ll \varepsilon_F$, когда число состояний в коре вихря велико и эффекты квантования спектра существенно ослаблены из-за уширения

уровней $\Gamma > \omega_0$, вызванного упругими и неупругими процессами, и температурных эффектов при $T > \omega_0$ [22]. Применение в работах [29–31] квазиклассической теории [32, 33] для анализа взаимодействия вихря и точечного дефекта с сечением рассеяния $\sigma_{sc} \ll \xi_0^2$ показало, что определяющим в этом случае является механизм пиннинга, возникающий из-за рассеяния квазичастиц на дефекте.

Таким образом, элементарная сила пиннинга, удерживающая вихрь Абрикосова в полости размерами $R \ll \xi_0$, должна существенно зависеть от электронной структуры вихревого состояния, т. е., в конечном счете, от вида спектра квазичастичных возбуждений в вихре, взаимодействующем с дефектом. Оказалось, что самосогласованный учет модификации профиля сверхпроводящего параметра порядка в вихре, $|\Delta(r)|$, вызванный присутствием точечной примеси в коре вихря, приводит при $R \ll \xi_0$ к существенному (в $\xi_0/R \gg 1$ раз) увеличению энергии пиннинга по сравнению с интуитивно ожидаемой из модели Гинзбурга–Ландау величиной порядка $H_{cm}^2 R^3 / 8\pi$. Соответствующая модификация функционала Гинзбурга–Ландау, позволяющая феноменологически учесть подобное влияние дефекта, получена в работах [34–36].

Квазиклассический расчет электронной структуры одноквантового вихря, взаимодействующего с цилиндрической непроводящей полостью, выполненный в работе [37], показал, что нормальное рассеяние квазичастиц на поверхности дефекта качественно изменяет вид спектра возбуждений: при $T = 0$ в спектре возникает минищель

$$\Delta_m \sim (R/\xi_0) \Delta_0 \sim (R/\lambda_F) \omega_0 \gg \omega_0,$$

величина Δ_m которой растет с увеличением радиуса дефекта, приближаясь к Δ_0 . Позднее этот вывод был подтвержден в работе [38] расчетами аналогичного спектра с использованием уравнений Боголюбова–де Жена [39, 40] и обобщен для случая киральных сверхпроводников p -типа в работах [41, 42]. Образование минищели Δ_m в спектре локализованных состояний и «разрыв» аномальной (подщелевой) ветки спектра должны приводить к подавлению диссипации при низких температурах $T \ll \ll \Delta_m$ [22, 43]. Макроскопически подавление диссипации должно означать прекращение движения вихрей под действием внешнего тока, т. е. пиннинг вихрей.

С учетом описанной модификации спектра квазичастичных возбуждений в работе [44] была предложена микроскопическая теория депиннинга вихря Абрикосова из полости размером меньше или

порядка сверхпроводящей длины когерентности ξ_0 под действием внешнего тока с плотностью j и установлена связь между процессом срыва вихря с центра пиннинга и топологическими изменениями вида квазиклассической орбиты, соответствующей энергии Ферми. Заметим, что анализ подщелевого спектра вихря, захваченного полостью, и определение величины соответствующей минищели в спектре квазичастиц, обусловленной рассеянием на дефекте, представляются важными для реализации майорановских фермионов в гибридных системах типа сверхпроводник — топологический изолятор [45–48].

Наряду с изучением пиннинга одиночного вихря Абрикосова важным вопросом является выяснение условий формирования многоквантовых вихрей, содержащих в себе сразу несколько (M) квантов магнитного потока. Подобные многоквантовые вихри, локализованные вблизи центров пиннинга, наблюдались в работах [49, 50]. Появление многоквантовых вихрей качественно изменяет структуру вихревой решетки и вид кривой намагничивания, что часто используется для экспериментального обнаружения таких вихрей [51]. Оценка количества квантов магнитного потока (многоквантовых вихрей), которое способен удерживать центр пиннинга, для частного случая цилиндрической непроводящей полости в сверхпроводнике второго рода приведена в работе [11]:

$$M \leq M_\Phi \equiv \frac{R}{2\xi}, \quad \xi \ll R \ll \lambda. \quad (4)$$

Критерий Мкртчяна–Шмидта (4) позволяет оценить критический радиус R_M^{MS} полости, которая может захватить и удерживать M -квантовый вихрь в чистом сверхпроводнике при низких температурах $T \ll T_c$:

$$R_M^{MS} = 2M\xi_0. \quad (5)$$

Условия формирования многоквантовых вихрей в сверхпроводнике с так называемыми колончатými (columnar) дефектами¹⁾ во внешнем магнитном поле получены в работе [52]. Многоквантовые или гигантские вихри могут удерживаться полостью достаточно большого размера [51] или формироваться в мезоскопических сверхпроводящих образцах в сильном внешнем магнитном поле [53, 54]. Заметим, что в магнитных полях, превышающих второе критическое поле ($H > H_{c2}$), когда объемная сверхпроводимость становится невозможной, подобные мезо-

¹⁾ В дальнейшем, говоря о дефекте, будем предполагать, что речь идет именно о таком типе неоднородностей: цилиндрическая полость, заполненная изолятором, ориентирована вдоль внешнего магнитного поля.

скопические дефекты могут способствовать формированию в своей окрестности локализованных зародышей сверхпроводящей фазы, имеющих ненулевую завихренность, что оказывает влияние на верхнее критическое поле образца [52, 55], аналогично эффекту поверхностной сверхпроводимости.

При использовании микроскопических моделей для расчета спектра элементарных возбуждений M -квантового вихря с энергиями, лежащими в области сверхпроводящей щели, следует учитывать, что число аномальных ветвей, пересекающих уровень Ферми и вырожденных по спину, определяется величиной завихренности M [56]. Каждая такая ветвь спектра при $\varepsilon \simeq 0$ хорошо описывается простой линейной зависимостью

$$\varepsilon_j \simeq \omega_j(\mu - \mu_j),$$

где $\omega_j \sim \omega_0$, а $1 \leq j \leq M$ — номер спектральной ветви ($|\mu_j| \leq \mu_M \equiv k_F b_M \sim k_F \xi_0$) [57–62]. Заметим, что для четных значений завихренности M пересечение аномальных ветвей уровня Ферми при $\mu = 0$ (т. е. при нулевом значении прицельного параметра b) отсутствует. Каждая аномальная ветвь спектра дает вклад в локальную плотность состояний (local density of states, LDOS) в окрестности энергии Ферми, так что соответствующий профиль LDOS представляет собой набор аксиально-симметричных кольцевых структур с центром на оси вихря [59, 60, 62, 63].

Приближенные аналитические выражения, описывающие аномальные ветви спектра $\varepsilon_j(\mu)$ в многоквантовом вихре, были получены в работе [61] с использованием метода, развитого в работе [56] для анализа спектра квазичастиц в вихре Абрикосова. Численные расчеты [57, 64] спектра элементарных возбуждений и волновых функций квазичастиц в M -квантовом вихре, локализованном на мезоскопическом цилиндрическом дефекте из нормального металла, показали наличие в спектре M аномальных ветвей, как и в случае отсутствия дефекта. Квазиклассические расчеты аномальных ветвей спектра в M -квантовом вихре, расположенном в цилиндрической непроводящей полости с $R < \xi_0$, выполнены в работе [37]. Как и в случае одноквантового вихря, нормальное отражение квазичастиц от поверхности дефекта качественно изменяет вид спектра: для малых значений углового момента квазичастиц, $|\mu| < k_F R$, возникают новые связанные состояния с энергией порядка $\pm \Delta_0$. При увеличении радиуса дефекта подщелевые ветви спектра отодвигаются от уровня Ферми, формируя минищель в спектре элементарных возбуждений.

В данной работе приведены результаты теоретических исследований особенностей пиннинга многоквантового вихря цилиндрической непроводящей полостью с характерными размерами порядка сверхпроводящей длины когерентности ξ_0 при нулевой температуре. Выполнены квазиклассические расчеты спектра элементарных возбуждений и волновых функций квазичастиц в M -квантовом вихре ($M = 2, 3$), локализованном в мезоскопической полости, и сформулированы условия пиннинга (депиннинга) такого вихря, основанные на микроскопической модели депиннинга вихря Абрикосова [44]. В разд. 2 приведены основные уравнения, используемые для вычисления спектра квазичастичных возбуждений в M -квантовом вихре и кратко описаны методы их решения. В разд. 3 показаны примеры квазиклассических расчетов подщелевого спектра для двух- и трехквантовых вихрей и выполнено сравнение аналитических и численных результатов. В разд. 4 сформулирован спектральный критерий устойчивости M -квантового вихря в полости и получены оценки количества квантов магнитного потока, M_Φ , которое способен удерживать такой центр пиннинга. Здесь же приведены результаты самосогласованных численных расчетов плотности состояний $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$ для двух- и трехквантовых вихрей, захваченных цилиндрической полостью радиуса порядка ξ_0 . Расчеты выполнены с использованием квазиклассических уравнений Эйленбергера. В заключении приведены основные результаты работы.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Изучим, как меняется спектр электронных состояний в многоквантовом вихре, захваченном протяженным дефектом, который представляет собой идеальный непроводящий цилиндр радиуса R , ось которого параллельна оси z вихря. Нормальное рассеяние квазичастиц на поверхности цилиндра вызывает существенную перестройку аномальных ветвей энергетического спектра квазичастиц подобно тому, как это происходит в задачах об электронной структуре вихря в присутствии точечного рассеивателя [27] или в мезоскопическом сверхпроводнике [65, 66] из-за конкуренции нормального и андреевского [67] механизмов отражения.

Спектр квазичастичных состояний в вихре на дефекте можно вычислить, если рассматривать движение электронов и дырок вдоль квазиклассических траекторий, которые лежат в плоскости xy , перпен-

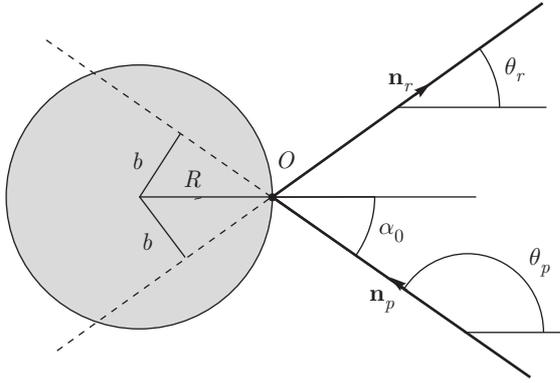


Рис. 2. Зеркальное отражение квазиклассической траектории от поверхности цилиндрического дефекта

дикулярной оси вихря ($k_z = 0$). Такие траектории полностью определяются прицельным параметром $b = -\mu/k_F$ относительно центра вихря и углом ориентации траектории θ_p в плоскости (рис. 2).

Для малых значений прицельного параметра $|b| \leq R$ траектории испытывают зеркальное отражение от поверхности дефекта. Рассеяние на дефекте квазичастиц с малыми значениями прицельного параметра $|b| \leq R$ приводит к формированию новых ветвей спектра, на которых энергия локализованных состояний, отсчитываемая от уровня Ферми, убывает как функция растущего прицельного параметра траектории $|b|$ [37].

Для расчета спектра элементарных возбуждений в M -квантовом вихре, захваченном бесконечным непроводящим цилиндром радиуса R , воспользуемся двумерными уравнениями Боголюбова–де Жена (Bogolubov–de Gennes equations, BdG) [39, 40] для электронной (u) и дырочной (v) частей двухкомпонентной волновой функции $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, z) = (u, v) \exp(ik_z z)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + k_{\perp}^2) u + \Delta(\mathbf{r}) v = \varepsilon u, \quad (6)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + k_{\perp}^2) v + \Delta^*(\mathbf{r}) u = \varepsilon v. \quad (7)$$

Здесь $\nabla = \partial_x \mathbf{x}_0 + \partial_y \mathbf{y}_0$, $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, функция $\Delta(\mathbf{r})$ описывает профиль сверхпроводящей щели в вихре, и $k_{\perp} = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$ — проекция волнового вектора в плоскости xy . Считается, что система однородна вдоль оси z и поэтому компонента волнового вектора k_z сохраняется. Следуя процедуре, подробно описанной в работах [66, 68, 69], перепишем уравнения (6), (7) в импульсном представлении:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \hat{\psi}(\mathbf{p}), \quad (8)$$

где $\mathbf{p} = |\mathbf{p}| (\cos \theta_p, \sin \theta_p) = p \mathbf{n}_p$, а единичный вектор $\mathbf{n}_p = (\cos \theta_p, \sin \theta_p)$ определяет направление траектории в плоскости xy . Поскольку характерный масштаб волновой функции квазичастиц определяется сверхпроводящей длиной когерентности ξ_0 , которая существенно превышает фермиевскую длину волны ($k_F \xi_0 \gg 1$), абсолютное значение импульса p в решении уравнения (8) близко к значению $\hbar k_{\perp}$: $p = \hbar k_{\perp} + q$ ($|q| \ll \hbar k_{\perp}$). Вводя преобразование Фурье

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{k_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp \left[i \left(k_{\perp} - \frac{|\mathbf{p}|}{\hbar} \right) s \right] \hat{\psi}(s, \theta_p), \quad (9)$$

запишем волновую функцию $\hat{\psi}(r, \theta)$ в реальном пространстве (r, θ, z) в следующем виде (подробно см. [66]):

$$\hat{\psi}(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \exp [ik_{\perp} r \cos(\theta_p - \theta)] \times \hat{\psi}(r \cos(\theta_p - \theta), \theta_p) \frac{d\theta_p}{2\pi}. \quad (10)$$

Внутри непроводящего дефекта волновая функция $\hat{\psi}(r, \theta)$ квазичастиц должна обращаться в нуль. Предполагая потенциальный барьер для квазичастиц на границе сверхпроводник–изолятор бесконечно большим, получим следующее граничное условие для волновой функции $\hat{\psi}(r, \theta)$ на поверхности непроводящего цилиндра:

$$\hat{\psi}(R, \theta) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{r=R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_p \times \exp [ik_{\perp} R \cos(\theta_p - \theta)] \hat{\psi}(R \cos(\theta_p - \theta), \theta_p) = 0. \quad (11)$$

Для получения квазиклассических уравнений Андреева воспользуемся эйкональным приближением

$$\hat{\psi}(s, \theta_p) = \exp[iS(\theta_p)] \hat{g}(s, \theta_p),$$

полагая, что функция \hat{g} слабо зависит от угла θ_p . Квазичастицы, движущиеся по классическим траекториям параллельно $\mathbf{k}_{\perp} = k_{\perp} (\cos \theta_p, \sin \theta_p)$, характеризуются угловым моментом $\mu = -k_{\perp} b$, где

$$b = -\frac{1}{k_{\perp}} \frac{\partial S}{\partial \theta_p} \quad (12)$$

— прицельный параметр траектории. Предполагая аксиальную симметрию задачи, при которой угловой момент μ сохраняется, получим следующие квазиклассические уравнения Андреева для огибающей функции $\hat{g}(s, \theta_p)$:

$$-i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \frac{\partial \hat{g}}{\partial s} + \hat{\sigma}_x \operatorname{Re} \Delta(\mathbf{r}) \hat{g} - \hat{\sigma}_y \operatorname{Im} \Delta(\mathbf{r}) \hat{g} = \varepsilon \hat{g}, \quad (13)$$

где $\hat{\sigma}_i$ — матрицы Паули, $mV_{\perp} = \hbar k_{\perp}$,

$$\begin{aligned} x &= s \cos \theta_p - b \sin \theta_p, & y &= s \sin \theta_p + b \cos \theta_p, \\ x \pm iy &= (s \pm ib) \exp(\pm i\theta_p). \end{aligned}$$

3. ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА МНОГОКВАНТОВОГО ВИХРЯ

Для расчета спектра многоквантового вихря воспользуемся результатами работы [61], где подробно изложена методика приближенного решения квазиклассических уравнений (13) для вихря с произвольной завихренностью M , аналогичная используемой в работе [56] для расчета спектра вихря Абрикосова. Будем полагать, что профиль параметра порядка описывается формулой

$$\Delta_M(r, \theta) = \Delta_0 [\delta_v(r)]^M e^{iM\theta}, \quad r \geq R, \quad (14)$$

где радиальная зависимость $\delta_v(r)$ определяется выражением

$$\delta_v(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \xi_0^2}}. \quad (15)$$

Легко видеть, что при $r \ll \xi_0$ радиальная зависимость (14), (15) описывает обычную для приближения Гинзбурга–Ландау асимптотику $\Delta_M(r) \propto r^M$, характерную для M -квантового вихря. Переходя к переменным (s, θ_p) , для $r = \sqrt{s^2 + b^2} \geq R$ получим

$$\begin{aligned} \Delta_M &= D_M(s) e^{iM\theta_p}, \\ D_M(s) &= \Delta_0 \left[\frac{\delta_v \sqrt{s^2 + b^2}}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^M (s + ib)^M. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя преобразование

$$\hat{g}(s, \theta_p) = \exp(iM \hat{\sigma}_z \theta_p / 2) \hat{f}(s), \quad (17)$$

можно переписать квазиклассические уравнения (13) в форме

$$-i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \partial_s \hat{f} + \hat{\Delta}_b(s) \hat{f} = \varepsilon \hat{f}, \quad (18)$$

где оператор сверхпроводящей щели имеет вид

$$\hat{\Delta}_b(s) = \hat{\sigma}_x \operatorname{Re} D_M(s) - \hat{\sigma}_y \operatorname{Im} D_M(s). \quad (19)$$

Свойства симметрии оператора щели $\hat{\Delta}_b(s)$ и уравнения (18) различны для четных/нечетных значений M :

$$\hat{\Delta}_b(-s) = \begin{cases} \hat{\Delta}_b^*(s), & M = 2n, \\ -\hat{\Delta}_b^*(s), & M = 2n - 1, \end{cases} \quad (20)$$

где n — целое число. Условия (20) определяют следующие свойства симметрии для функции $\hat{f}(s)$ на траектории:

$$\hat{f}(-s) = \begin{cases} C \hat{\sigma}_x \hat{f}(s), & M = 2n, \\ C \hat{\sigma}_y \hat{f}(s), & M = 2n - 1, \end{cases} \quad (21)$$

и справедливы для произвольного значения завихренности M .

Для решения уравнений (18), (19) удобно воспользоваться аналитическим подходом, предложенным в работе [61]. Этот подход основан на обобщении метода возмущений, примененного ранее в [56] для $M = 1$. Для удобства читателя приведем здесь основные результаты работы [61]. С использованием преобразования

$$\hat{f}(s) = \left(\frac{s + i\hat{\sigma}_z b}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right)^{\chi} \hat{w}(s) \quad (22)$$

перепишем уравнение (18) в виде

$$-i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \partial_s \hat{w} + (\hat{\sigma}_x G_R^{\chi} - \hat{\sigma}_x G_I^{\chi}) \hat{w} = (\varepsilon - \varepsilon_d^{\chi}) \hat{w}, \quad (23)$$

где доплеровский сдвиг энергии ε_d^{χ} определяется выражением

$$\varepsilon_d^{\chi}(s) = -\hbar V_{\perp} \frac{\chi b}{s^2 + b^2}, \quad (24)$$

а G_R^{χ} и G_I^{χ} — соответственно действительная и мнимая части потенциала щели

$$\Delta_M^{\chi}(s) = \Delta_0 \left(\delta_v \sqrt{s^2 + b^2} \right)^M \left(\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right)^{M-2\chi}. \quad (25)$$

Выбор параметра χ позволяет обеспечить необходимую для применения метода работы [56] симметрию функции G_R^{χ} : $G_R^{\chi}(-s) = -G_R^{\chi}(s)$ (подробнее см. [61]). Изменяя параметр χ в интервале $0 \leq \chi < M/2$ с шагом $1/2$, можно получить следующие интегральные выражения, описывающие аномальные ветви спектра возбуждений ε_M^{χ} многоквантового вихря как функции прицельного параметра b :

$$\varepsilon_M^{\chi}(b) = \frac{1}{I} \int_0^{\infty} ds [\varepsilon_d^{\chi}(s) + G_I^{\chi}(s)] e^{-2K(s)}, \quad (26)$$

где

$$K(s) = \frac{1}{\hbar V_{\perp}} \int_0^s dt G_R^{\chi}(t), \quad I = \int_0^{\infty} ds e^{-2K(s)}. \quad (27)$$

Для вычисления спектра двухквантового вихря ($M = 2$) следует положить $\chi = 1/2$ в выражениях (26), (27). Аномальные ветви спектра пересека-

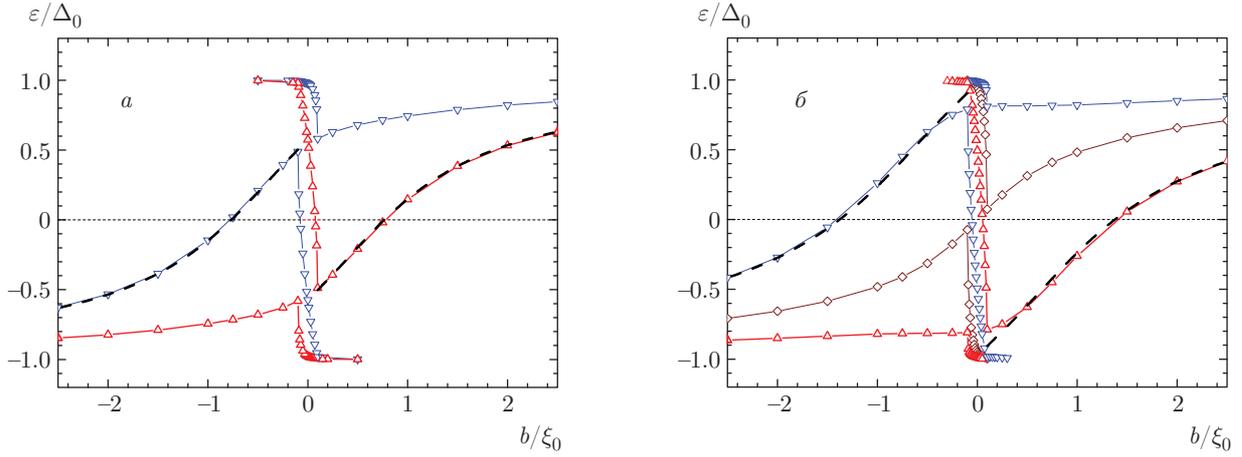


Рис. 3. (В цвете онлайн) Спектры квазичастичных возбуждений в многоквантовом вихре $M = 2$ (а) и $M = 3$ (б), полученные в результате численного решения задачи на собственные значения (18), (19) с граничными условиями (29) ($R = 0.1\xi_0$, $k_F\xi_0 = 200$, $k_z = 0$). Штриховыми линиями показаны anomальные ветви спектра, вычисленные с использованием аналитических выражений (26), (27) для $M = 2$, $\chi = 1/2$ и $M = 3$, $\chi = 1$

ют уровень Ферми при значениях прицельного параметра $b_2 \simeq \pm 0.77 \xi_0$ ($\varepsilon_2^{1/2}(b_2) = 0$). В случае трехквантового вихря ($M = 3$) решение $\varepsilon_3^0(b)$ описывает anomальную ветвь, пересекающую уровень Ферми при нулевом прицельном параметре ($\varepsilon_3^0(0) = 0$). Две другие ветви спектра, соответствующие выбору $\chi = 1$ в выражениях (26), (27), смещены на $b_3 \simeq \pm 1.38 \xi_0$ относительно начала координат, так что $\varepsilon_3^1(b_3) = 0$. Вычисленные по формулам (26), (27) спектры показаны на рис. 3 пунктиром. В дальнейшем нас будет интересовать прежде всего та anomальная ветвь спектра M -квантового вихря, для которой $\chi = (M - 1)/2$ и прицельный параметр на уровне Ферми принимает наибольшее значение.

Многоквантовый вихрь в полости

Для расчета спектра многоквантового вихря в полости будем полагать, что профиль параметра порядка по-прежнему описывается формулами (14), (15), не учитывая тем самым влияние дефекта на профиль параметра порядка в вихре. Используя метод стационарной фазы, запишем граничные условия для волновых функций $\hat{f}(s)$ на поверхности изолирующего цилиндра в виде

$$e^{i\hat{\varphi}_M} \hat{f}(s_0) = e^{-i\hat{\varphi}_M} \hat{f}(-s_0), \quad (28)$$

$$\hat{\varphi}_M = k_\perp s_0 + (2\mu + M\hat{\sigma}_z)\beta_0 - 3\pi/4.$$

Учитывая свойства симметрии (21), из граничного условия (28) получим следующее соотношение между электронной f_u и дырочной f_v частями волновой функции \hat{f} на поверхности дефекта:

$$f_v(s_0) = \pm \exp(iM\alpha_0) f_u(s_0), \quad (29)$$

$$\alpha_0 = -\arcsin(b/R).$$

Для траекторий без отражения ($|b| > R$) в выражении (28) следует положить $s_0 = 0$ и $\alpha_0 = -\pi/2$. Выбор знака в выражении (29) зависит от числа веток спектра M , т.е. от завихренности. С другой стороны, квазиклассические траектории для больших значений прицельного параметра $|b| > R$ практически не искажаются дефектом. Следовательно, спектр квазичастиц в случае $|b| > R$ должен совпадать со спектром (26), (27) для локализованных состояний, вычисленным в предположении, что полость отсутствует.

На рис. 3 приведены примеры спектров квазичастиц в двух- и трехквантовом вихрях, полученных в результате численного решения задачи Штурма–Лиувилля (18), (19) с граничными условиями (29) при $k_z = 0$. Для численного расчета спектра $\varepsilon_M(b)$ мы искали решения квазиклассического уравнения (18) для $s \geq s_0$, которые затухают при $s \rightarrow \infty$. Для сравнения штриховыми линиями показаны anomальные ветви спектра, вычисленные с использованием аналитических выражений (26), (27) для $M = 2$, $\chi = 1/2$ и $M = 3$, $\chi = 1$. Легко видеть, что вид спектра для малых значений углового момента $|\mu| < \mu_R = k_\perp R$ (т.е. для прицельного параметра $|b| < R$) меняется качественно: из-за нормального отражения квазичастиц от поверхности дефекта возникают новые ветви, энергия связанных состояний на которых при $|\mu| \rightarrow 0$ близка к значениям сверхпроводящей щели $\pm\Delta_0$ [37]. Эти новые ветви

переходят в ветви обычного спектра многоквантового вихря при $|\mu| > \mu_R$. При увеличении радиуса R полости область значений углового момента μ , для которых $\varepsilon_M(\mu) \simeq \pm \Delta_0$, расширяется, а подщелевые ветви спектра отодвигаются от уровня Ферми. При $R > b_M$ (см. рис. 1б) пересечения аномальных ветвей с уровнем Ферми отсутствуют, что приводит к формированию минищели Δ_m в спектре элементарных возбуждений. Заметим, что при $k_F \xi_0 \gg 1$ величина минищели $\Delta_m \sim \omega_0 (R - b_M) / \lambda_F$, зависящая от радиуса полости R , может заметно превышать расстояние ω_0 между соседними уровнями в спектре из-за дискретности углового момента μ . Существование такой минищели в спектре элементарных возбуждений оказывает существенное влияние на локальную плотность состояний квазичастиц в вихре и может быть экспериментально обнаружено методами низкотемпературной сканирующей туннельной микроскопии [70–72].

4. УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОКВАНТОВОГО ВИХРЯ В ПОЛОСТИ

4.1. Спектральный критерий

Поскольку с микроскопической точки зрения механизм диссипации связан с переносом возбуждений через сверхпроводящую щель по состояниям аномальной ветви спектра [22], образование минищели $\Delta_m \gg \omega_0$ в спектре локализованных состояний и «разрыв» аномальной ветви спектра должны приводить к подавлению диссипации при низких температурах $T < \Delta_m$. Макроскопически подавление диссипации означает прекращение движения вихрей под действием внешнего тока, т. е. пиннинг вихрей. С другой стороны, образование минищели Δ_m в окрестности $\varepsilon = 0$ означает отсутствие на уровне Ферми состояний для возбуждений, локализованных в коре вихря, и является отличительной чертой вихря, захваченного непроводящей полостью (т. е. вихря, удерживаемого центром пиннинга). С учетом описанной модификации спектра квазичастичных возбуждений в работе [44] была предложена микроскопическая теория депиннинга вихря Абрикосова из полости с размером меньше или порядка сверхпроводящей длины когерентности ξ_0 под действием внешнего тока с плотностью j . Модель учитывает трансформацию спектра квазичастичных возбуждений в одиночном вихре, захваченном на дефекте, под действием внешнего тока. Согласно модели работы [44], депиннинг вихря Абрикосова сопровождается перестройкой спектра воз-

буждений, при которой происходит разрушение минищели в окрестности уровня Ферми, формируется непрерывная аномальная ветвь спектра и появляются состояния на уровне Ферми.

Обобщим эти представления на случай пиннинга многоквантового вихря в полости радиуса R , учитывая особенности спектра подщелевых состояний (см. рис. 3). Для простоты рассуждений ограничимся в дальнейшем двумерным случаем, полагая, что проекция волнового вектора на ось вихря отсутствует ($k_z = 0$), а $k_\perp = k_F$. В отличие от одноквантового вихря Абрикосова, для которого минищель $\Delta_m \simeq (R/\xi_0)\Delta_0$ в спектре подщелевых состояний возникает при любом радиусе полости²⁾, спектр многоквантового вихря содержит ветви, пересекающие уровень Ферми $\varepsilon = 0$ при ненулевых значениях углового момента частицы $\pm \mu_M$ (прицельного параметра $\pm b_M = -\mu_M/k_F$). Для двух- и трехквантовых вихрей с модельным профилем параметра порядка (14), (15) аномальные ветви спектра пересекают уровень $\varepsilon = 0$ соответственно при $b_2 \simeq 0.77\xi_0$ и $b_3 \simeq 1.38\xi_0$ (см. рис. 3). Поскольку при больших значениях прицельного параметра $|b| \geq R$ аномальные ветви спектра квазичастиц в M -квантовом вихре в полости хорошо описываются аналитическими выражениями (26), (27), наибольшее значение b_M прицельного параметра для состояния с энергией Ферми определяется уравнением

$$\varepsilon_M^\chi(b_M) = 0 \tag{30}$$

при $\chi = (M - 1)/2$.

В соответствии с моделью работы [44] будем считать, что пиннинг (устойчивость) многоквантового вихря в полости радиуса R возможен до тех пор, пока отсутствуют состояния на уровне Ферми, т. е. если аномальные ветви спектра не пересекают уровень $\varepsilon = 0$. Это условие оказывается выполненным, если

$$R \geq R_M^{Sp} = b_M, \tag{31}$$

где прицельный параметр b_M определяется уравнением (30) и выражениями (26), (27). Пренебрежение квантованием углового момента μ и связанной с этим дискретностью состояний на аномальных ветвях спектра приводит к некоторой неточности в определении как величины минищели ($\Delta_m \pm \omega_0$), так

²⁾ Образование минищели $\Delta_m \simeq (R/\xi_0)\Delta_0$ в спектре одноквантового вихря Абрикосова устанавливает очевидный критерий пиннинга такого вихря полостью радиуса R при низких температурах $T: R > (T/\Delta_0)\xi_0$. Отсюда следует, что при $T \rightarrow 0$ пиннинг вихря Абрикосова возможен в полости любого радиуса $R \ll \xi_0$.

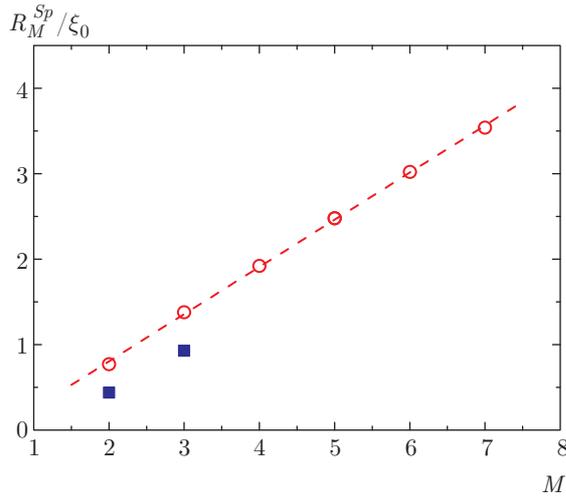


Рис. 4. Зависимость критического радиуса R_M^{Sp} от величины завихренности M , вычисленная в соответствии со спектральным критерием (30), (31) для вихрей с профилем параметра порядка (14), (15). Символом ■ показаны значения критического радиуса полости $R_{2,3}^*$, полученные в результате самосогласованных расчетов устойчивости M -квантового вихря (см. разд. 4.2)

и радиуса полости ($b_M \pm \lambda_F$), при котором такая минищель в спектре открывается. При $\lambda_F/\xi_0 \ll 1$, когда справедливо квазиклассическое приближение, эти малые поправки несущественны, тем более что на практике дискретные уровни будут к тому же уширены за счет различных процессов рассеяния и температурных эффектов.

Данные эффекты уширения могут, конечно, затруднить экспериментальное наблюдение и основного рассматриваемого в нашей работе эффекта, связанного с конечным расщеплением Δ_m в спектре квазичастиц, если уширение $\Gamma > \Delta_m$ и $T > \Delta_m$. Поэтому условие (31) является критерием устойчивости M -квантового вихря в полости радиуса $R \sim \xi_0$ только при низких температурах T и в очень чистых образцах. Заметим, что разрыв Δ_m спектральной ветви, вызванный присутствием дефекта, может оказаться несущественным для вихря, совершающего колебания в окрестности дефекта под действием переменного транспортного тока или движущегося рядом с дефектом в режиме течения потока с характерной скоростью v . Можно ожидать, что по аналогии с работами [24–27] переход квазичастиц через разрыв спектральной ветви будет связан с процессами зенеровского туннелирования, и в сверхчистом пределе разрыв спектра Δ_m станет несущественным при величине доплеровского сдвига $\hbar k_F v > \Delta_m$.

Ключевой параметр b_M (30), от которого зависит критический радиус R_M^{Sp} полости, способной захватить и удерживать M -квантовый вихрь в чистом сверхпроводнике, определяется спектром подщелевых состояний квазичастиц в коре такого вихря. На рис. 4 показана зависимость критического радиуса R_M^{Sp} от величины завихренности M , вычисленная в соответствии со спектральным критерием (30), (31).

Легко видеть, что определенный таким образом критический поперечный размер полости R_M^{Sp} , удерживающей M -квантовый вихрь, линейно зависит от числа квантов M ($R_M^{Sp} \simeq 0.5 M \xi_0$), что оказывается примерно в 4 раза меньше радиуса R_M^{MS} (5), полученного с использованием критерия Мкртчяна – Шмидта (4). Это согласуется с выводами работ [30, 31, 44], где было показано, что простейшие феноменологические модели, которые не учитывают особенностей элементарных возбуждений в коре вихря Абрикосова, предсказывают существенно заниженные оценки энергии пиннинга.

При меньших поперечных размерах полости ($R < R_M^{Sp}$) M -квантовый вихрь неустойчив и разрушается с образованием вихря Абрикосова вне полости. При этом первоначальная циркуляция градиента фазы $\nabla\varphi$ комплексного параметра порядка $\Delta = |\Delta| \exp(i\varphi)$ при обходе по контуру вокруг полости,

$$\oint \nabla\varphi d\mathbf{l} = 2\pi M,$$

уменьшается на 2π , и в полости остается $(M - 1)$ -квантовый вихрь, судьба которого зависит от соотношения размера полости R и критического радиуса R_{M-1}^{Sp} . Конечно, если начальное M -квантовое состояние сильно неравновесное ($R \ll \ll R_M^{Sp}$), то возможны и более сложные сценарии разрушения многовихревого состояния, при которых происходит выход сразу нескольких вихрей Абрикосова. Очевидно, что в итоге в полости останется такое количество вихрей M_0 , для которого спектральный критерий (30), (31) окажется выполненным: $R \geq R_{M_0}^{Sp}$.

4.2. Численные расчеты

Для проверки справедливости предложенного спектрального критерия выполним самосогласованные расчеты устойчивости многоквантового вихря в цилиндрической полости с учетом модификации профиля сверхпроводящей щели у дефекта и вклада делокализованных состояний. Анализ основывается на численном решении уравнений Эйленберге-

ра [32, 33] для квазиклассических функций Грина g , f и f^+ :

$$\begin{aligned} -i\hbar\mathbf{v}_F\nabla g &= \Delta f^+ - \Delta^* f, \\ -i\hbar\mathbf{v}_F\nabla f &= 2i\omega_n f + 2\Delta g, \\ i\hbar\mathbf{v}_F\nabla f^+ &= 2i\omega_n f^+ + 2\Delta^* g, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\mathbf{v}_F = v_F\mathbf{n}_p$, $\mathbf{n}_p = (\cos\theta_p, \sin\theta_p)$ — единичный вектор вдоль траектории ($\mathbf{k}_p = k_F\mathbf{n}_p$), а $\omega_n = 2\pi T(n+1/2)$ — мацубаровские частоты для температуры T . Мы ограничились здесь анализом случая $\lambda \gg \xi$, что позволяет не учитывать вклад векторного потенциала магнитного поля вихря в уравнениях (32). Распределение сверхпроводящего параметра порядка в вихре, $\Delta(\mathbf{r})$, описывается уравнением самосогласования

$$\Delta(\mathbf{r}) = 2\pi T\rho \sum_{\omega_n > 0}^{\omega_D} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_p f(\mathbf{r}, \theta_p, i\omega_n) \right\}, \quad (33)$$

в котором константа ρ ответственна за синглетное спаривание, а ω_D — частота Дебая. Локальная плотность состояний $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$ определяется нормальной функцией Грина $g(\mathbf{r}, \theta_p, i\omega_n)$, которую следует аналитически продолжить на область действительных частот ε , отсчитываемых от уровня Ферми:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \frac{N_0}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta_p \operatorname{Re} \{ g(\mathbf{r}, \theta_p, i\omega_n \rightarrow \varepsilon + i0^+) \}. \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения (32) решались на прямолинейных траекториях вида $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{n}_p$, лежащих в плоскости xy , перпендикулярной оси цилиндра (см. рис. 1а), с использованием параметризации [73, 74]

$$g = -\frac{1-ab}{1+ab}, \quad f = \frac{-2ia}{1+ab}, \quad f^+ = \frac{-2ib}{1+ab}. \quad (35)$$

Изменения амплитуд $a(s)$ и $b(s)$ вдоль траектории описываются уравнениями Риккати

$$\begin{aligned} \hbar v_F \frac{\partial a}{\partial s} + [2\omega_n + \Delta^* a] a - \Delta &= 0, \\ \hbar v_F \frac{\partial b}{\partial s} - [2\omega_n + \Delta b] b + \Delta^* &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

которые решались итерационно методом Рунге–Кутты четвертого порядка с переменным шагом в цилиндрической области (r, θ) для $R \leq r \leq R_{ex}$. На каждом шаге итераций комплексный профиль сверхпроводящей щели $\Delta(\mathbf{r})$ вычислялся с помощью

уравнения самосогласования (33). Предполагалось, что на границе полости $r = R$ траектории с прицельным параметром $|b| \leq R$ испытывают зеркальное отражение, а граничные условия для амплитуд $a(r, \theta, \mathbf{n}_p)$ и $b(r, \theta, \mathbf{n}_p)$ имеют вид

$$\begin{aligned} a(R, \theta, \mathbf{n}_r) &= a(R, \theta, \mathbf{n}_p), \\ b(R, \theta, \mathbf{n}_p) &= b(R, \theta, \mathbf{n}_r), \end{aligned} \quad (37)$$

где векторы \mathbf{n}_p и \mathbf{n}_r задают направления соответственно падающей и отраженной траекторий (см. рис. 2). Далеко от вихря и дефекта, $r = R_\infty \gg R_{ex}$, распределение сверхпроводящего параметра порядка (14)

$$\Delta_M(R_\infty, \theta) \simeq \Delta_M(\theta) = \Delta_0 e^{iM\theta}$$

фиксирует циркуляцию градиента фазы $2\pi M$ при обходе по внешнему контуру области и определяет значения амплитуд a и b при $s = \pm\infty$ для интегрирования уравнений Риккати (36):

$$a(s = -\infty) = \frac{\Delta_0 \exp[iM(\theta_p + \pi)]}{\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_0^2}}, \quad (38)$$

$$b(s = +\infty) = \frac{\Delta_0 \exp(iM\theta_r)}{\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_0^2}}. \quad (39)$$

Граничные условия (38), (39) учитывают изменение направления траектории с прицельным параметром $|b| \leq R$ при зеркальном отражении от поверхности полости,

$$\theta_r = \theta_p + \pi - 2 \arcsin(b/R).$$

Для пролетных траекторий ($|b| > R$) следует положить $\theta_r = \theta_p$ в выражении (39). В качестве исходного распределения сверхпроводящего параметра порядка для начала итерационной процедуры использовалось простейшее однородное по r распределение вида $\Delta_M(\theta)$, учитывающее только циркуляцию фазы в M -квантовом вихре.

На рис. 5 приведены примеры расчета распределения локальной плотности состояний (LDOS) на уровне Ферми, $N(r, \theta, \varepsilon = 0)$, в окрестности мезоскопической полости, если циркуляция сверхпроводящего параметра порядка соответствует двухквантовому вихрю ($M = 2$) для двух близких значений радиуса полости при низких температурах $T = 0.05T_c$. В случае $R = 0.44\xi_0$, показанном на рис. 5а, распределение модуля параметра порядка и распределение LDOS сохраняют аксиальную симметрию. Распределение $N(r, \varepsilon)$, показанное на вставке к рисунку, воспроизводит характерные особенности подщелевого спектра двухквантового вихря — наличие двух аномальных ветвей в области $0 \leq \varepsilon \leq \Delta_0$. При этом

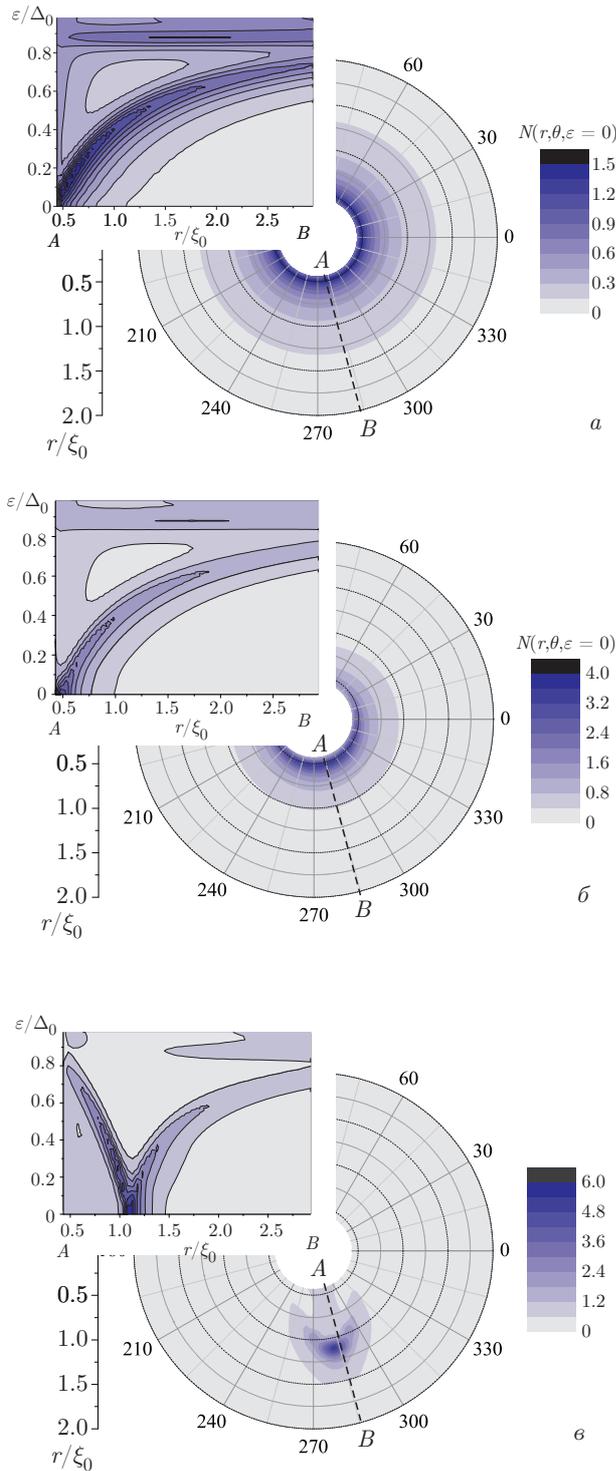


Рис. 5. (В цвете онлайн) Распределения LDOS на уровне Ферми, $N(r, \theta, \varepsilon = 0)$, в окрестности цилиндрической полости радиуса $R = 0.44\xi_0$ (а), $R = 0.43\xi_0$ (б, в) с двухквантовым вихрем ($M = 2$) для температуры $T = 0.05T_c$. На вставках показаны распределения LDOS $N(r, \varepsilon)$ вдоль сечения AB . Рисунки б и в показывают две последовательные итерации, соответствующие формированию (б) и выходу (в) одиночного вихря Абрикосова из полости

максимальное значение LDOS достигается при $\varepsilon \neq 0$, что должно означать наличие минищели Δ_m в спектре квазичастиц, локализованных в окрестности полости с вихрем. Таким образом, устойчивому двухквантовому вихрю в полости соответствует отсутствие состояний на уровне Ферми и образование минищели в спектре.

Во втором случае ($R = 0.43\xi_0$), показанном на рис. 5б,в, двухквантовый вихрь в полости оказывается неустойчивым и исходная аксиальная симметрия сверхпроводящего параметра порядка нарушается (рис. 5б). Возникающая модуляция по углу θ сопровождается образованием максимума LDOS с нулевой энергией (zero-bias peak) и локального минимума $|\Delta|$ у поверхности полости. По мере развития аксиальной неустойчивости величина пика LDOS при низких энергиях и глубина провала $|\Delta|$ растут, что, в конце концов, приводит к образованию особенности $|\Delta| = 0$ и формированию пары вихрь-антивихрь вблизи поверхности полости³⁾. В дальнейшем эта пара с суммарной нулевой завихренностью разрушается с образованием вихря Абрикосова вне полости (рис. 5в) и аннигиляцией антивихря в полости. При этом в полости остается захваченным только один вихрь, а циркуляция при обходе по контуру вокруг полости равна 2π . Образовавшийся вихрь Абрикосова отталкивается от оставшегося в полости магнитного потока и движется под действием силы Лоренца в радиальном направлении, удаляясь от дефекта.

Полученное в результате самосогласованных численных расчетов значение критического радиуса полости $R_2^* \simeq 0.44\xi_0$, при котором двухквантовый вихрь сохраняет свою устойчивость и не срывается с центра пиннинга при низких температурах, оказывается заметно меньше значения R_2^{Sp} , найденного по спектральному критерию (31) для модельного профиля параметра порядка (14), (15) в окрестности полости. Различие значений R_2^* и R_2^{Sp} отражает влияние эффекта Крамера–Пеша (Kramer–Pesch effect) [22, 75], учитывающего самосогласованную модификацию спектра подщелевых состояний в вихре Абрикосова при низких температурах. Аналогичные расчеты, выполненные для трехквантового вихря, дают значение критического радиуса $R_3^* \simeq 0.93\xi_0$, при котором вихрь в полости еще сохраняет свою устойчивость.

³⁾ Направления циркуляции фазы в вихре и антивихре определяются знаком завихренности M исходного двухквантового вихря, захваченного полостью. Для $M > 0$ циркуляция фазы при обходе по контуру вокруг антивихря равна -2π .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе приведены результаты теоретических исследований индивидуального пиннинга многоквантового вихря в цилиндрической непроводящей полости с характерными размерами порядка сверхпроводящей длины когерентности ξ_0 при низких температурах $T \ll T_c$. Выполнены квазиклассические расчеты спектра элементарных возбуждений квазичастиц в вихре с произвольной завихренностью M . Изучена модификация аномальных ветвей спектра многоквантового вихря из-за нормального отражения квазичастиц от поверхности дефекта, качественно изменяющая вид спектра для малых значений углового момента. Трансформация спектра сопровождается разрывом аномальных веток спектра, пересекающих область сверхпроводящей щели. Предложен спектральный критерий устойчивости многоквантового вихря в полости, согласно которому для захвата (пиннинга) вихря с M квантами магнитного потока радиус полости должен превышать критическое значение R_M^{Sp} , при котором у всех M аномальных ветвей спектра отсутствуют состояния на уровне Ферми и в спектре элементарных возбуждений формируется минищель вблизи уровня Ферми. Выполненные расчеты показали, что критический радиус R_M^{Sp} , вычисленный в соответствии с предложенным критерием, линейно зависит от завихренности M и оказывается существенно меньше аналогичного значения, определяемого из простейших феноменологических моделей, которые не учитывают особенностей элементарных возбуждений в вихре. В рамках квазиклассической теории Эйленберге-ра выполнены самосогласованные расчеты плотности состояний $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$ для двух- и трехквантового вихрей в цилиндрической полости и исследовано, как зависит устойчивость такого вихря от радиуса полости. В сверхчистом пределе и для низких температур $T \ll T_c$ обнаружены особенности распределения локальной плотности состояний $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$, показывающие отсутствие состояний на уровне Ферми в устойчивом M -квантовом вихре, захваченном полостью, что согласуется с предложенным спектральным критерием.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №17-12-01383 (разд. 2, 3, 4.2), гранта развития теоретической физики «Базис» и гранта РФФИ №15-42-02195 (разд. 4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кемпбел, Дж. Иветс, *Критические токи в сверхпроводниках*, Мир, Москва (1975).
2. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
3. P. Yang and Ch. M. Lieber, *Science* **273**, 1836 (1996).
4. M. Peurla, H. Huhtinen, M. A. Shakhov, K. Traito, Yu. P. Stepanov, M. Safonchik, P. Paturi, Y. Y. Tse, R. Palai, and R. Laiho, *Phys. Rev. B* **75**, 184524 (2007).
5. A. F. Hebard, A. T. Fiory, and S. Somekh, *IEEE Trans. Magn.* **1**, 589 (1977).
6. A. N. Lykov, *Sol. St. Comm.* **86**, 531 (1993).
7. M. Baert, V. V. Metlushko, R. Jonckheere, V. V. Moshchalkov, and Y. Bruynseraede, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3269 (1995).
8. L. Civale, A. D. Marwick, M. W. McElfresh, T. K. Worthington, A. P. Malozemoff, F. H. Holtzberg, J. R. Thompson, and M. A. Kirk, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1164 (1990).
9. L. Civale, A. D. Marwick, T. K. Worthington, M. A. Kirk, J. R. Thompson, L. Krusin-Elbaum, Y. Sun, J. R. Clem, and F. H. Holtzberg, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 648 (1991).
10. C. P. Bean and J. D. Livingston, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 14 (1971).
11. Г. С. Мкртчян, В. В. Шмидт, *ЖЭТФ* **61**, 367 (1971).
12. М. Тинкхам, *Введение в сверхпроводимость*, Атомиздат, Москва (1980).
13. H. Nordborg and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. B* **62**, 12408 (2000).
14. A. Buzdin and D. Feinberg, *Physica C* **256**, 303 (1996).
15. A. Buzdin and M. Daumens, *Physica C* **294**, 257 (1998).
16. A. Buzdin and M. Daumens, *Physica C* **332**, 108 (2000).
17. A. A. Bespalov and A. S. Melnikov, *Supercond. Sci. Technol.* **26**, 085014 (2013).
18. S. M. Maurer, N.-C. Yeh, and T. A. Tombrello, *Phys. Rev. B* **54**, 15372 (1996).
19. S. M. Maurer, N.-C. Yeh, and T. A. Tombrello, *J. Phys. Condens. Matter* **10**, 7429 (1998).

20. D. J. Priour, Jr. and H. A. Fertig, *Phys. Rev. B* **67**, 054504 (2003).
21. B. Rosenstein, I. Shapiro, and B. Ya. Shapiro, *Phys. Rev. B* **81**, 064507 (2010).
22. N. B. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*, Clarendon Press, Oxford (2001).
23. C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon, *Phys. Lett.* **9**, 307 (1964).
24. F. Guinea and Yu. Pogorelov, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 462 (1995).
25. M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2640 (1997).
26. M. A. Skvortsov, D. A. Ivanov, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **67**, 014521 (2003).
27. A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **57**, 5457 (1998).
28. A. A. Koulakov and A. I. Larkin, *Phys. Rev. B* **59**, 12021 (1999).
29. N. B. Kopnin, *Phys. Rev. B* **60**, 581 (1999).
30. E. V. Thuneberg, J. Kurkijarvi, and D. Rainer, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1853 (1982).
31. E. V. Thuneberg, J. Kurkijarvi, and D. Rainer, *Phys. Rev. B* **29**, 3913 (1984).
32. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **55**, 2262 (1968).
33. G. Eilenberger, *Z. Phys.* **214**, 195 (1968).
34. E. V. Thuneberg, *J. Low Temp. Phys.* **57**, 415 (1984).
35. E. V. Thuneberg, *J. Low Temp. Phys.* **62**, 27 (1986).
36. M. Friesen and P. Muzikar, *Phys. Rev. B* **53**, R11953 (1986).
37. A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, and M. N. Zubarev, *Phys. Rev. B* **79**, 134529 (2009).
38. B. Rosenstein, I. Shapiro, E. Deutch, and B. Ya. Shapiro, *Phys. Rev. B* **84**, 134521 (2011).
39. Н. Н. Боголюбов, *ЖЭТФ* **34**, 58 (1958).
40. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
41. A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, and V. L. Vadimov, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 886 (2015).
42. V. L. Vadimov and A. S. Mel'nikov, *J. Low Temp. Phys.* **183**, 342 (2016).
43. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика т. 9, Статистическая физика, ч. 2*, Наука, Москва (1978).
44. A. S. Mel'nikov and A. V. Samokhvalov, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 823 (2011).
45. P. A. Ioselevich and M. V. Feigel'man, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 077003 (2011).
46. P. A. Ioselevich, P. M. Ostrovsky, and M. V. Feigel'man, *Phys. Rev. B* **86**, 035441 (2012).
47. A. L. Rakhmanov, A. V. Rozhkov, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **84**, 075141 (2011).
48. R. S. Akzyanov, A. V. Rozhkov, A. L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **89**, 085409 (2014).
49. G. Karapetrov, J. Fedor, M. Iavarone, D. Rosenmann, and W. K. Kwok, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 167002 (2005).
50. I. V. Grigorieva, W. Escoffier, V. R. Misko, B. J. Baerlus, F. M. Peeters, L. Y. Vinnikov, and S. V. Dubonos, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 147003 (2007).
51. A. V. Silhanek, S. Raedts, M. J. Van Bael, and V. V. Moshchalkov, *Phys. Rev. B* **70**, 054515 (2004).
52. A. I. Buzdin, *Phys. Rev. B* **47**, 11416 (1993).
53. V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and P. S. Deo, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2783 (1998).
54. A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, and P. P. Vysheslavtsev, *Phys. Rev. B* **65**, 140503 (2002).
55. A. Bezryadin, A. Buzdin, and B. Pannetier, *Phys. Lett. A* **195**, 373 (1994).
56. Г. Е. Воловик, *Письма в ЖЭТФ* **57**, 233 (1993).
57. Y. Tanaka, S. Kashiwaya, and H. Takayanagi, *Jpn. J. Appl. Phys.* **34**, 4566 (1995).
58. D. Rainer, J. A. Sauls, and D. Waxman, *Phys. Rev. B* **54**, 10094 (1993).
59. A. S. Mel'nikov and V. M. Vinokur, *Nature* **415**, 60 (2002).
60. A. S. Mel'nikov and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. B* **65**, 224514 (2002).
61. A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, and M. A. Silaev, *Phys. Rev. B* **78**, 064513 (2008).
62. S. M. M. Virtanen and M. M. Salomaa, *Phys. Rev. B* **60**, 145581 (1999).
63. M. A. Silaev and V. A. Silaeva, *J. Phys.: Condens. Matter* **25**, 225702 (2013).

64. M. Eschrig, D. Rainer, and J. A. Sauls, *Vortices in Unconventional Superconductors and Superfluids*, Springer-Verlag, Berlin (2001), p. 175.
65. N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, V. I. Pozdnyakova, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **95**, 197002 (2005).
66. N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, V. I. Pozdnyakova, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. B **75**, 024514 (2007).
67. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **46**, 1823 (1964).
68. A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, and M. A. Silaev, Phys. Rev. B **78**, 064513 (2008).
69. A. S. Mel'nikov and M. A. Silaev, Письма в ЖЭТФ **83**, 675 (2006).
70. H. F. Hess, R. B. Robinson, and J. V. Waszczak, Phys. Rev. Lett. **64**, 2711 (1990).
71. I. Guillamon, H. Suderow, S. Vieira, L. Cario, P. Diener, and P. Rodiere, Phys. Rev. Lett. **101**, 166407 (2008).
72. T. Cren, L. Serrier-Garcia, F. Debontridder, and D. Roditchev, Phys. Rev. Lett. **107**, 097202 (2011).
73. N. Schopohl and K. Maki, Phys. Rev. B **52**, 490 (1995).
74. N. Schopohl, arXiv:9804064 (1998).
75. L. Kramer and W. Pesch, Z. Phys. **269**, 59 (1974).