

ИЗЛУЧЕНИЕ КАСКАДА ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА И В ПЛОСКОМ СЛОЕ

В. А. Рябов, В. А. Чечин*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 июня 2017 г.

В настоящее время для обнаружения космических лучей и нейтрино сверхвысоких энергий разработан ряд экспериментов, основанных на регистрации радиоизлучения каскадов, которые были порождены этими частицами в плотных средах, таких как наземные ледяные массивы или лунный реголит. В большинстве экспериментов радиоизлучение регистрируется не в самой плотной среде, а при выходе в атмосферу или космическое пространство. Поэтому возникает задача расчета излучения каскада с учетом границы раздела двух сред, которая обычно решается численно с использованием метода Монте-Карло. Получено простое аналитическое выражение для поля излучения в волновой зоне менее плотной среды при условии развития каскада в более плотной среде и пересечении излучением границы раздела двух сред. Также рассмотрено влияние дополнительной третьей среды на поле излучения каскада.

DOI: 10.7868/S0044451018010042

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы для обнаружения космических лучей и нейтрино сверхвысоких энергий ($E \geq 10^{19}$ эВ) широкое распространение получил метод, основанный на регистрации когерентного радиоизлучения каскадов, порожденных такими частицами. Идеи радиометода восходят к работе Аскарьяна [1], в которой было показано, что в результате взаимодействия каскадных частиц с электронами атомов среды возникает избыток электронов в каскаде. Соответственно, в диапазоне достаточно длинных волн каскад можно рассматривать как объемный переменный движущийся заряд. Как следует из ряда вычислений, величина избыточного отрицательного заряда составляет порядка 20–30 % от полного числа электронов в каскаде [2].

Важнейшим преимуществом радиометода является возможность просмотра огромных объемов прозрачных для радиоизлучения сред и регистрации редких событий. Применение радиометода наиболее целесообразно при ультравысоких энергиях, поскольку мощность когерентного радиосигнала растет квадратично с увеличением энергии каскада. В настоящее время радиометод положен в основу ряда экспериментов по регистрации частиц сверхвы-

соких энергий в таких радиопрозрачных природных средах, как ледяные щиты Антарктиды и Гренландии и лунный реголит. Поиск радиоимпульсов, которые могли быть вызваны взаимодействием нейтрино сверхвысоких энергий в наземных ледяных мишенях, проводился в экспериментах FORTE [3], RICE [4] и ANITA [5]. В Антарктиде планируются установки нового поколения — ARA [6] и ARIANNA [7]. В экспериментах с наземными ледяными мишенями возможно регистрировать только каскады, инициированные нейтрино сверхвысоких энергий, так как космические лучи (протоны и ядра) не достигают ледяной мишени, начиная взаимодействовать уже в верхних слоях атмосферы Земли.

Другой перспективной мишенью большого объема для взаимодействия частиц сверхвысоких энергий и наблюдения радиоизлучения является приповерхностный слой лунного грунта — радиопрозрачный реголит. Поскольку у Луны отсутствует атмосфера, в экспериментах с лунной мишенью возможно регистрировать радиоизлучение от каскадов, инициированных как нейтрино, так и космическими лучами. Радиометод регистрации каскадов из лунного реголита был использован в экспериментах с наземными радиотелескопами GLUE [8], LUNASKA [9] и NuMoon [10]. Рассматривается возможность использования для этих же целей новых наземных радиомассивов LOFAR [11] и SKA [12]. Концепция ре-

* E-mail: ryabov@x4u.lebedev.ru

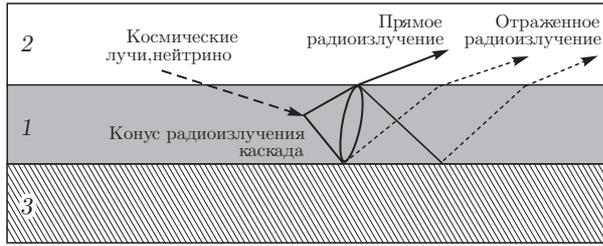


Рис. 1. Схема расположения рассматриваемых сред с плотностями $\rho_2 < \rho_1 < \rho_3$, например: 1 — лед или лунный реголит, 2 — воздух или вакуум, 3 — плотная подложка подо льдом или реголитом. Также показано направление падения частиц (космических лучей или нейтрино) и направления прямого и отраженного радиоизлучения. Радиоизлучение генерируется каскадом от первичной частицы в области углов вблизи черенковского конуса. Прямое радиоизлучение — это часть излучения из верхней части конуса, которое после преломления на границе сред 1–2 регистрируется в среде 2. Под отраженным радиоизлучением понимается часть радиоизлучения из верхней части конуса, отраженного на границе раздела сред 1–2, а также часть радиоизлучения из нижней части конуса, которое после отражения на границе 1–3 и преломления на границе 1–2 также регистрируется в среде 2

гистрации каскадов от взаимодействия космических частиц сверхвысоких энергий со спутника, выведенного на окололунную орбиту, была впервые предложена в рамках эксперимента ЛОРД [13,14], который подготавливается в настоящее время [15]. Обсуждаются и вопросы использования орбитальных радиодетекторов и ледяных спутников планет Солнечной системы в качестве мишеней для регистрации частиц сверхвысоких энергий [16].

При подготовке экспериментов по регистрации космических частиц сверхвысоких энергий на основе радиометода возникает задача вычисления радиоизлучения от каскадов в плотной среде 1, такой как природный ледяной массив на Земле или лунный реголит. Если излучение наблюдается в воздухе или в вакууме, т. е. в менее плотной среде 2, то необходимо учесть влияние границы раздела на электромагнитное поле. Схема расположения рассматриваемых сред, а также направления падения частиц и распространения радиоизлучения представлены на рис. 1. В настоящее время задача расчета излучения каскада с учетом границы раздела двух сред обычно решается численно с использованием метода Монте-Карло [17–21]. В данной работе получено простое аналитическое выражение для поля излучения в волновой зоне менее плотной среды при условии развития каскада в более плотной среде и пересечении излучением границы раздела двух сред.

Если глубина каскада порядка длины волны, то граница раздела оказывается в ближней зоне по отношению к источнику излучения и возникает естественное сомнение в применимости стандартных формул для излучения и преломления волн, поскольку в данном случае невозможно разделить эти процессы. Это действительно так, если расстояние до точки наблюдения поля порядка длины волны и глубины каскада. В этой области поле описывается запаздывающими потенциалами в неоднородной среде с плоской границей раздела. Точное решение этой задачи для вектор-потенциала $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$ и электрического поля $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ записывается как суперпозиция решений волнового уравнения, которые зависят (при заданной частоте ω) от двух параметров $\kappa = (\kappa_x, \kappa_y)$, т. е. в виде двойного интеграла. При произвольных расстояниях от каскада и точки наблюдения до границы раздела найти значение этого интеграла можно только численно.

Задача существенно упрощается, если расстояние от границы раздела до точки наблюдения много больше длины волны, а также глубины и размеров каскада. В этом случае двойной интеграл по κ можно оценить с помощью метода перевала. Результат таких вычислений лишь внешне похож на решение задачи о преломлении плоских волн: на самом деле вместо известных френелевских коэффициентов прохождения $T_{\parallel}^{12}, T_{\perp}^{12}$ плоских волн из среды 1 в среду 2 появляются «обратные» коэффициенты $T_{\parallel}^{21}, T_{\perp}^{21}$.

Радиоизлучение от каскадов, инициированных частицами, падающими из менее плотной среды 2, очень сильно подавляется из-за полного внутреннего отражения на границе раздела. Прямое радиоизлучение регистрируется в узком диапазоне углов падения частиц из среды 2 в среду 1 и в большинстве случаев порождается почти горизонтальными частицами. Если на некоторой глубине имеется более плотная «подложка» (среда 3), то ситуация существенно улучшается, так как большой вклад дают волны, отражающиеся на границе раздела 1–3. Это обусловлено тем, что отраженное радиоизлучение может быть зарегистрировано от частиц, которые приходят в среду 1 в более широком диапазоне углов относительно нормали в точке падения.

В данной работе получено аналитическое решение задачи для поля излучения в волновой зоне менее плотной среды при условии развития каскада в более плотной среде, а также рассмотрено влияние дополнительной третьей среды на поле излучения каскада.

2. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ, СОЗДАВАЕМЫЙ ЗАДАНЫМ ТОКОМ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ВЕЩЕСТВА

Рассмотрим неоднородную среду с двумя плоскими границами раздела $z = 0$ и $z = z_1 = -a < 0$ декартовой системы координат $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$. В этом случае диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_3\theta(z_1 - z) + \varepsilon_1\theta(-z)\theta(z - z_1) + \varepsilon_2\theta(z),$$

где $\theta(z > 0) = 1$ и $\theta(z < 0) = 0$.

Пусть в среде 1 задан фурье-образ плотности внешнего тока $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \exp(i\omega t) dt.$$

Для краткости индекс ω у всех величин будет пока опускаться.

Определим вектор-потенциал, создаваемый этим источником в среде 2 (т.е. при $z \geq 0$). Именно этот случай интересен для экспериментов, упомянутых выше. В такой постановке задача похожа на стандартные задачи теории переходного излучения, в которых обычно рассматривается движение точечного заряда, пересекающего границы раздела [22]. Мы же предполагаем, что ток отличен от нуля только в области $z_1 < z < 0$. Более того, будем считать, что в среде 1 имеются области толщиной $\delta > 0$ вблизи границ раздела 1–2 и 1–3, в которых ток равен нулю. Существование этих областей (между источником поля и границами раздела) важно для рассматриваемой задачи.

Вектор-потенциал в лоренцевой калибровке в среде 1 удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$(\Delta + k_1^2)\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

В средах 2 и 3 нет источников поля, поэтому в этих областях

$$(\Delta + k_{2,3}^2)\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad k_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_s}\omega}{c} = \frac{n_s\omega}{c}, \quad (1a)$$

$$s = 1, 2, 3.$$

Частное решение уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z_1 < z < 0) = \frac{1}{c} \iiint G_1(R)\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r', \quad (2)$$

$$G_1(R) = \frac{\exp(ik_1 R)}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

К выражению (2) нужно добавить такое свободное решение уравнения (1), чтобы вместе с решениями однородных уравнений (1a) удовлетворить условиям на границах раздела. Сделать это можно разными способами, но проще всего использовать известное представление функции Грина $G_1(R)$ в виде двойного интеграла [23]:

$$G_1(R) = \iint \frac{i}{2\pi\lambda_1} \times \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') + i\lambda_1|z - z'|) d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (3)$$

В этом представлении функция $\lambda_1 = \sqrt{k_1^2 - \kappa^2}$ определена на комплексной плоскости κ с разрезом от точки ветвления $\kappa_0 = k_1 + i\delta$ до $\infty + i\delta$, $\delta > 0$. Положительный знак мнимой части κ_0 объясняется тем, что всегда $\text{Im} \varepsilon_1(\omega > 0) > 0$. При интегрировании по κ контур интегрирования проходит по нижнему берегу разреза, где $\text{Im} \lambda_1 = \sqrt{\kappa^2 - k_1^2} > 0$. Такое определение обеспечивает быструю сходимость интеграла (3). То же самое относится к функциям $\lambda_{2,3} = \sqrt{k_{2,3}^2 - \kappa^2}$. Подставив (3) в (2), запишем вектор-потенциал в среде 1 между источником поля и границами раздела 1–2 и 1–3 в виде

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z' < z < 0) = \iint \mathbf{J}^+ \exp(i\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d^2\boldsymbol{\kappa}, \quad (4a)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z_1 < z < z') = \iint \mathbf{J}^- \exp(i\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}) d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (4b)$$

Здесь

$$\mathbf{J}^\pm = \frac{i}{2\pi\lambda_1 c} \mathbf{j}^\pm, \quad (5)$$

$$\mathbf{j}^\pm = \iiint \exp(-i\mathbf{k}_1^\pm \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r',$$

$$\mathbf{k}_s^\pm = \{\boldsymbol{\kappa}, \pm\lambda_s\}, \quad s = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Различие в формулах (4a) и (4b) объясняется тем, что из-за величины $|z - z'|$ в показателе экспоненты в (3) необходимо различать область $z' < z < 0$, где $|z - z'| = z - z'$, и область $z_1 < z < z'$, где $|z - z'| = z' - z$. Начало отсчета $\boldsymbol{\rho}_0 = (0, 0)$ координат $\boldsymbol{\rho}'$ и $\boldsymbol{\rho}$ выбирается так, чтобы в интеграле (5) характерные значения $\boldsymbol{\rho}'$ были сосредоточены около $\boldsymbol{\rho}_0$.

К выражениям (4a) и (4b) добавляем свободное решение в среде 1 в виде суперпозиции функций $\exp(i\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r})$ и $\exp(i\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r})$, а решения свободных уравнений (1a) в средах 2 и 3 выбираем в виде суперпозиции функций $\exp(i\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r})$ и $\exp(i\mathbf{k}_3^- \cdot \mathbf{r})$ соответственно. Здесь учтено условие излучения: в средах

2 и 3 рассматриваются только волны, уходящие от границ раздела, а в среде 1 — волны обоих направлений [23]. Напомним, что $\text{Re } \lambda_s > 0$ при $\kappa < k_s$. Следовательно, общее решение уравнений (1) и (1а) ищем в виде

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) = \iint \mathbf{T} \exp(i\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}) d^2\kappa, \quad (7a)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, -\delta < z < 0) = \iint [(\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}) \exp(i\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{R} \exp(i\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r})] d^2\kappa, \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z_1 < z < z_1 + \delta) = \\ = \iint [(\mathbf{J}^- + \mathbf{R}) \exp(i\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}) + \\ + \mathbf{Q} \exp(i\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r})] d^2\kappa, \quad (7c) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z < z_1) = \iint \tilde{\mathbf{T}} \exp(i\mathbf{k}_3^- \cdot \mathbf{r}) d^2\kappa. \quad (7d)$$

Неопределенные пока функции от ω и $\boldsymbol{\kappa}$ (векторные амплитуды) \mathbf{R} , \mathbf{Q} , \mathbf{T} и $\tilde{\mathbf{T}}$ подбираются так, чтобы выражения (7а) и (7б) сшивались при $z \rightarrow 0$, а выражения (7с) и (7д) — при $z \rightarrow z_1$. Согласно [24] (гл. 23, §2), на границе раздела двух сред должны быть непрерывны следующие величины:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z), \frac{\partial A_x(\boldsymbol{\rho}, z)}{\partial z}, \frac{\partial A_y(\boldsymbol{\rho}, z)}{\partial z}, \frac{\text{div } \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z)}{\varepsilon(z)}. \quad (8)$$

Используя эти условия в подынтегральных выражениях (7а) и (7б) при $z \rightarrow 0$, получим шесть алгебраических уравнений для амплитуд \mathbf{R} , \mathbf{Q} и \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^+ + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{T}, \quad \lambda_1(J_x^+ + Q_x - R_x) = \lambda_2 T_x, \\ \lambda_1(J_y^+ + Q_y - R_y) = \lambda_2 T_y, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1} [\lambda_1(J_z^+ + Q_z - R_z) + \kappa_x(J_x^+ + Q_x + R_x) + \\ + \kappa_y(J_y^+ + Q_y + R_y)] = \frac{1}{\varepsilon_2} (\lambda_2 T_z + \kappa_x T_x + \kappa_y T_y). \end{aligned}$$

Из этих уравнений следуют два соотношения:

$$\mathbf{T} = \hat{T}_{12}(\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}), \quad (10a)$$

$$\mathbf{R} = \hat{R}_{12}(\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}), \quad (10b)$$

где

$$\hat{T}_{12} = \begin{pmatrix} T_{\perp}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & T_{\perp}^{12} & 0 \\ S^{12}\kappa_x & S^{12}\kappa_y & T_{\parallel}^{12}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\hat{R}_{12} = \hat{T}_{12} - \hat{I} = \begin{pmatrix} R_{\perp}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\perp}^{12} & 0 \\ S^{12}\kappa_x & S^{12}\kappa_y & R_{\parallel}^{12} \end{pmatrix}.$$

Здесь \hat{I} — единичная матрица,

$$\begin{aligned} T_{\parallel}^{12} = \frac{2\lambda_1\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\lambda_1 + \varepsilon_1\lambda_2}, \quad T_{\perp}^{12} = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\ R_{\parallel}^{12} = \frac{\varepsilon_2\lambda_1 - \varepsilon_1\lambda_2}{\varepsilon_2\lambda_1 + \varepsilon_1\lambda_2}, \quad R_{\perp}^{12} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (12a) \end{aligned}$$

$$S^{12} = \frac{2\lambda_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\varepsilon_2\lambda_1 + \varepsilon_1\lambda_2)}. \quad (12b)$$

В случае одной границы раздела 1–2 эти формулы решают поставленную задачу, так как по условию излучения в среде 1 надо рассматривать только волну, уходящую от границы. Поэтому $\mathbf{Q} = 0$, а исконая амплитуда \mathbf{T} находится из (10а).

Для определения амплитуды \mathbf{Q} в случае двух границ раздела применим условия непрерывности величин (8) на границе 1–3, т.е. в интегралах (7с) и (7д) при $z = z_1$. В результате получаются шесть уравнений, аналогичных (9), но их даже не стоит выписывать. Действительно, из сравнения интегралов (7б) и (7с), а также (7а) и (7д) видно, что эти уравнения получаются из (9) с помощью замены

$$\varepsilon_2, \lambda_2 \rightarrow \varepsilon_3, \lambda_3, \quad (13a)$$

$$\lambda_s \rightarrow -\lambda_s, \quad (13b)$$

$$\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q} \rightarrow (\mathbf{J}^- + \mathbf{R}) \exp(-i\lambda_1 z_1), \quad (13c)$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q} \exp(i\lambda_1 z_1), \quad \mathbf{T} \rightarrow \tilde{\mathbf{T}} \exp(-i\lambda_3 z_1).$$

В результате вместо (10б) приходим к уравнению

$$\mathbf{Q} = \hat{R}_{13}(\mathbf{J}^- + \mathbf{R})P, \quad (14a)$$

$$P = \exp(-2i\lambda_1 z_1) = \exp(2i\lambda_1 a),$$

$$\hat{R}_{13} = \begin{pmatrix} R_{\perp}^{13} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\perp}^{13} & 0 \\ -S^{13}\kappa_x & -S^{13}\kappa_y & R_{\parallel}^{13} \end{pmatrix}. \quad (14b)$$

Здесь $R_{\parallel,\perp}^{13}$, S^{13} получаются из (12а) и (12б) при очевидной замене (13а). Отрицательный знак перед коэффициентом S^{13} появляется из-за замены (13б).

Подстановка (10б) в (14а) приводит к системе трех алгебраических уравнений для амплитуды \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \hat{R}_{13} \left[\mathbf{J}^- + \hat{R}_{12}(\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}) \right] P. \quad (14c)$$

Решив эту систему и подставив найденную амплитуду \mathbf{Q} в (10а), находим амплитуду \mathbf{T} и вектор-потенциал (7а) в среде 2:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) = \iint \exp(i\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}) \hat{T}_{12}(\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}) d^2\kappa. \quad (15)$$

Точно так же находится вектор-потенциал (7б)–(7д) в средах 1 и 3, но эти формулы здесь не выписываются.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЗАДАННЫМ ТОКОМ В КОНЕЧНОМ СЛОЕ ВЕЩЕСТВА

Найдем электрическое поле $\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, z > 0)$, соответствующее вектор-потенциалу (15). Скалярный потенциал $\varphi(\boldsymbol{\rho}, z > 0)$ определяется из условия Лоренца: $\text{div } \mathbf{A} - i\omega\epsilon_2\varphi/c = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) = \frac{i\omega}{c} \left(\mathbf{A} + \frac{\text{grad}(\text{div } \mathbf{A})}{k_2^2} \right).$$

Выполнив дифференцирование в (15), получим

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) = \frac{i\omega}{c} \int \exp(i\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}) \times \hat{P}_2 \hat{T}_{12} (\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}) d^2\kappa, \quad (16)$$

где матрица $\hat{P}_2 = \hat{I} - (\mathbf{k}_2^+ \otimes \mathbf{k}_2^+)/k_2^2$. Здесь введено прямое произведение векторов: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{il} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_l$ ($i, l = 1, 2, 3$), т. е. столбец \mathbf{a} умножается на строку \mathbf{b} .

Преобразуем произведение матриц $\hat{P}_2 \hat{T}_{12}$ в (16), введя единичные по модулю векторы поляризации \mathbf{e}_j^+ и \mathbf{e}_\perp ($j = 1, 2$), ортогональные векторам \mathbf{k}_j^+ (6):

$$\mathbf{e}_j^+ = \frac{\kappa_x \lambda_j, \kappa_y \lambda_j, -\kappa^2}{\kappa k_j}, \quad \mathbf{e}_\perp = \frac{-\kappa_y, \kappa_x, 0}{\kappa}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j^+ \cdot \mathbf{e}_j^+ &= 1, & \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_\perp &= 1, & \mathbf{e}_j^+ \cdot \mathbf{e}_\perp &= 0, \\ \mathbf{e}_j^+ \cdot \mathbf{k}_j^+ &= 0, & \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{k}_j^+ &= 0. \end{aligned}$$

Единичную матрицу \hat{I} можно разложить по ортонормированному базису $\mathbf{e}_2^+, \mathbf{e}_\perp, \mathbf{k}_2^+/k_2$:

$$\hat{I} = (\mathbf{k}_2^+ \otimes \mathbf{k}_2^+)/k_2^2 + (\mathbf{e}_2^+ \otimes \mathbf{e}_2^+) + (\mathbf{e}_\perp \otimes \mathbf{e}_\perp).$$

Поэтому

$$\hat{P}_2 = (\mathbf{e}_2^+ \otimes \mathbf{e}_2^+) + (\mathbf{e}_\perp \otimes \mathbf{e}_\perp).$$

Легко доказать, что $\mathbf{e}_2^+ \hat{T}_{12} = T_{\parallel}^{12} \mathbf{e}_1^+$ и $\mathbf{e}_\perp \hat{T}_{12} = T_{\perp}^{12} \mathbf{e}_\perp$, т. е.

$$\hat{P}_2 \hat{T}_{12} = T_{\parallel}^{12} (\mathbf{e}_2^+ \otimes \mathbf{e}_1^+) + T_{\perp}^{12} (\mathbf{e}_\perp \otimes \mathbf{e}_\perp).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) &= \frac{i\omega}{c} \int \exp(i\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}) \times \\ &\times \left[\mathbf{e}_2^+ T_{\parallel}^{12} (J_{\parallel}^+ + Q_{\parallel}) + \mathbf{e}_\perp T_{\perp}^{12} (J_{\perp}^+ + Q_{\perp}) \right] d^2\kappa, \quad (18) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_{\parallel}^+ + Q_{\parallel} &= \mathbf{e}_1^+ \cdot (\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}), \\ J_{\perp}^+ + Q_{\perp} &= \mathbf{e}_\perp \cdot (\mathbf{J}^+ + \mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (19)$$

Для определения амплитуды Q_{\perp} умножим обе части уравнения (14с) на вектор \mathbf{e}_\perp и учтем, что $\mathbf{e}_\perp \hat{R}_{13} = R_{\perp}^{13} \mathbf{e}_\perp$ и $\mathbf{e}_\perp \hat{R}_{12} = R_{\perp}^{12} \mathbf{e}_\perp$. В результате получается одно уравнение для Q_{\perp} :

$$Q_{\perp} = R_{\perp}^{13} [J_{\perp}^- + R_{\perp}^{12} (J_{\perp}^+ + Q_{\perp})] P.$$

Следовательно,

$$J_{\perp}^+ + Q_{\perp} = \frac{J_{\perp}^- + PR_{\perp}^{13} J_{\perp}^-}{1 - q_{\perp}}, \quad (20)$$

где

$$q_{\perp} = R_{\perp}^{13} R_{\perp}^{12} P, \quad J_{\perp}^{\pm} = \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{J}^{\pm}. \quad (21)$$

Чуть сложнее проектирование уравнений (14с) на вектор \mathbf{e}_1^+ . Учтем, что $\mathbf{e}_1^+ \hat{R}_{13} = R_{\parallel}^{13} \mathbf{e}_1^+$ и $\mathbf{e}_1^+ \hat{R}_{12} = R_{\parallel}^{12} \mathbf{e}_1^+$, где \mathbf{e}_1^+ — единичный вектор, ортогональный вектору \mathbf{k}_1^+ (6):

$$\mathbf{e}_1^- = \frac{-\kappa_x \lambda_1, -\kappa_y \lambda_1, -\kappa^2}{\kappa k_1}, \quad \mathbf{e}_1^- \cdot \mathbf{k}_1^- = 0. \quad (22)$$

Эти соотношения приводят к условиям $\lambda_1 (R_{\perp}^{1j} + R_{\parallel}^{1j}) = -\kappa^2 S^{1j}$, $j = 2, 3$, которые легко проверяются. В результате получаются формулы (20), (21) с заменой $\perp \rightarrow \parallel$, причем $J_{\perp}^{\pm} = \mathbf{e}_1^{\pm} \cdot \mathbf{J}^{\pm}$. Подставив эти выражения в (18) и возвращаясь к обозначениям (5), приходим к окончательной формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) &= \\ &= \frac{i\omega}{c^2} \left[\iint \frac{i \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} + i\lambda_2 z)}{2\pi\lambda_2} d^2\kappa \mathbf{j}_{\text{tot}}(\boldsymbol{\kappa}) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{tot}}(\boldsymbol{\kappa}) &= \mathbf{e}_2^+ T_{\parallel}^{21} \frac{j_{\parallel}^+ + PR_{\parallel}^{13} j_{\parallel}^-}{1 - q_{\parallel}} + \\ &+ \mathbf{e}_\perp T_{\perp}^{21} \frac{j_{\perp}^+ + PR_{\perp}^{13} j_{\perp}^-}{1 - q_{\perp}}. \quad (24) \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в отличие от формул (5) и (3) в знаменателе (23) стоит λ_2 , а не λ_1 , а множитель λ_2/λ_1 вынесен в определение (24). В результате в (24) входят обратные коэффициенты прохождения (т. е. из среды 2 в среду 1), так как $(\lambda_2/\lambda_1) T_{\parallel, \perp}^{12} = T_{\parallel, \perp}^{21}$.

Два члена в (24) описывают параллельную и поперечную компоненты электрического поля (т. е. вдоль \mathbf{e}_2^+ и \mathbf{e}_\perp соответственно). Параллельная компонента содержит вклады прямой и обратной волн, пропорциональные соответственно $j_{\parallel}^+ = \mathbf{e}_1^+ \cdot \mathbf{j}^+$ и

$j_{\parallel}^{-} = \mathbf{e}_{\parallel}^{-} \cdot \mathbf{j}^{-}$. Вклад обратной волны содержит коэффициент отражения R_{\parallel}^{13} от границы 1–3 и фазовый множитель P , описывающий задержку обратной волны по отношению к прямой волне. Множитель $1/(1 - q_{\parallel}) \approx 1 + q_{\parallel} + q_{\parallel}^2 + \dots$ дает суммарный вклад волн, испытывающих кратное отражение внутри слоя. То же самое относится к поперечной компоненте, содержащей проекции тока $j_{\perp}^{\pm} = \mathbf{e}_{\perp} \cdot \mathbf{j}^{\pm}$.

Формула (23) описывает электрическое поле в среде 2, создаваемое произвольным током (5) в слое $z_1 < z < 0$. Если граница раздела 1–3 отсутствует, т. е. $n_3 = n_1$, то $R_{\perp, \parallel}^{13} = 0$ и формула (23) дает поле при наличии одной границы раздела 1–2. Подчеркнем, что векторы $\mathbf{k}_{1,2}^{\pm}$, $\mathbf{e}_{1,2}^{\pm}$ и \mathbf{e}_{\perp} пока не имеют стандартного геометрического смысла: это просто тройки функций от ω , $\boldsymbol{\kappa}$.

Важно, что в формулу (24) входят проекции фурье-образа (5) тока \mathbf{j}^{\pm} на векторы \mathbf{e}_{\perp}^{\pm} , \mathbf{e}_{\perp} , которые ортогональны векторам \mathbf{k}_{\perp}^{\pm} , а координатная зависимость поля в среде 2 определяется вектором \mathbf{k}_{\perp}^{\pm} . Таким образом, задача определения поля в среде 2 разбивается на две части.

Во-первых, нужно вычислить фурье-образ (5) внешнего тока в среде 1, причем интеграл (5) определяется только свойствами тока и среды 1 и не зависит от наличия границ раздела. Во-вторых, требуется вычислить двойной интеграл (23).

Формулу (23) можно получить другим способом, используя граничные условия для электрического и магнитного полей ($\mathbf{H}_j = \sqrt{\varepsilon_j}[\mathbf{k}_j \times \mathbf{E}_j]/k_j$): на границах должны быть непрерывны E_x , E_y , εE_z , \mathbf{H} . Так обычно делается в теории переходного излучения (см., например, [17]).

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ В СРЕДЕ 2

Рассмотрим теперь поле в среде 2 на луче $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n}_{\rho} R_2 \sin \theta_2$, $z = R_2 \cos \theta_2$ при $R_2 \rightarrow \infty$, где θ_2 — угол относительно полуоси $+z$ и $\mathbf{n}_{\rho} = (\cos \varphi_2, \sin \varphi_2)$. Подчеркнем, что расстояние $R_2 = \sqrt{\boldsymbol{\rho}^2 + z^2}$ отсчитывается не от источника (как R в формуле (2)), а от начала координат $\mathbf{R}_0 = (0, 0, 0)$ на плоскости раздела 1–2. Поглощение в среде 2 не учитывается.

Подынтегральное выражение в (23) зависит от двумерного вектора $\boldsymbol{\kappa}$ тройко. Во-первых, имеется зависимость в коэффициентах отражения и прохождения и в $\mathbf{e}_{1,2}^{\pm}$, \mathbf{e}_{\perp} . Здесь характерные значения $\boldsymbol{\kappa}$ порядка волновых чисел k_s : $\kappa_0 \sim k_s$. Во-вторых, в фурье-образе (5) тока и в фазовом множителе (14а) характерные значения $\kappa_1 \sim \{1/\Delta\rho', 1/\Delta z', 1/h, 1/a\}$

определяются размерами $\Delta\rho'$, $\Delta z'$ области, где ток отличен от нуля, расстоянием h этой области от границы раздела $z = 0$ и толщиной слоя a . В-третьих, если поле (23) вычисляется в точке $\boldsymbol{\rho}$, $z > 0$, то характерные значения $\kappa_2 \sim \{1/\rho, 1/z\}$. Если $\kappa_0 \sim \kappa_1 \sim \kappa_2$, то поле (23) можно найти лишь численно.

Экспонента в (23) является более резкой функцией переменной $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ по сравнению с функцией (24), если конечный источник поля находится на конечном расстоянии от границы 1–2 в слое конечной толщины и требуется найти поле на асимптотике $R_2 \rightarrow \infty$ в среде 2. Иначе говоря, расстояние R_2 должно быть много больше всех характерных размеров задачи (включая длину волны). В этом случае интеграл (23) можно оценить методом перевала. Запишем (23) в виде

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, z > 0) = \frac{i\omega}{c^2} \left[\int_0^{\infty} \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} d\psi \times \frac{i \exp(i\kappa R_2 \sin \theta_2 \cos \psi + i\lambda_2 R_2 \cos \theta_2)}{2\pi\lambda_2} \times \mathbf{j}_{tot}(\boldsymbol{\kappa}) \right], \quad (25)$$

где $\cos \psi = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{n}_{\rho}/\kappa$. Будем предполагать, что $\cos \theta_2$ и $\sin \theta_2$ не слишком малы, так что оба слагаемых в показателе экспоненты велики при $R_2 \rightarrow \infty$. При $\kappa R_2 \sin \theta_2 \gg 1$ вклад в интеграл по углу ψ дают две точки перевала: $\psi_0 = 0$ и $\psi_{\pi} = \pi$. Интегрирование вблизи первой точки дает

$$\int_0^{2\pi} d\psi \exp(i\kappa R_2 \sin \theta_2 \cos \psi) \approx \exp\left(i\kappa R_2 \sin \theta_2 - \frac{i\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa R_2 \sin \theta_2}}.$$

Оставшийся интеграл по κ также вычисляется тем же методом в окрестности точки перевала $\kappa_2 = k_2 \sin \theta_2$, где фаза $R_2 (\kappa \sin \theta_2 + \sqrt{k_2^2 - \kappa^2} \cos \theta_2)$ имеет максимум. В итоге двойной интеграл в (25) сводится к интегрированию вблизи точки перевала $\boldsymbol{\kappa}_2 = \mathbf{n}_{\rho} k_2 \sin \theta_2$ и на асимптотике стремится к $\mathbf{j}_{tot}(\boldsymbol{\kappa}_2) \exp(ik_2 R_2)/R_2$. Легко проверить, что вклад точки перевала $\psi_{\pi} = \pi$ можно опустить при $R_2 \rightarrow \infty$.

Если бы функция (24) не зависела от $\boldsymbol{\kappa}$, то интеграл был бы точно равен $\exp(ik_2 R_2)/R_2$ (см. формулу (3)). На асимптотике $R_2 \rightarrow \infty$ экспонента в (23) «навязывает» значение $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_2$ в плавной, по

предположению, функции (24). Именно такая задача здесь и рассматривается: найти поле на асимптотике в среде 2 от конечного тока, находящегося на конечном расстоянии от границ раздела в среде 1. Окончательно в волновой зоне в среде 2 координатно-угловая зависимость поля приобретает простой вид:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n}_\rho R_2 \sin \theta_2, z = R_2 \cos \theta_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{E}_\omega \approx \frac{i\omega}{c^2} \frac{\exp(ik_2 R_2)}{R_2} \mathbf{j}_{tot}(\boldsymbol{\kappa}_2), \quad (26)$$

где

$$\boldsymbol{\kappa}_2 = \mathbf{n}_\rho k_2 \sin \theta_2. \quad (27)$$

Только теперь введенные выше вектор-функции приобретают стандартный смысл и выражаются через сферические углы θ_2, φ_2 направления излучения в среде 2. В частности,

$$\mathbf{k}_2^+ = k_2(\mathbf{n}_\rho \sin \theta_2, \cos \theta_2),$$

$$\mathbf{e}_2^+ = (\mathbf{n}_\rho \cos \theta_2, -\sin \theta_2),$$

$$\mathbf{e}_\perp = (-\sin \varphi_2, \cos \varphi_2, 0)$$

— волновой вектор и векторы поляризации излучения в среде 2.

Удобно ввести углы θ_1 и θ_3 : $n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3 = n_2 \sin \theta_2$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = k_{1,2} \cos \theta_{1,2},$$

$$\mathbf{k}_1^\pm = \{\boldsymbol{\kappa}_2, \pm \lambda_1\} = k_1 \{\mathbf{n}_\rho \sin \theta_1, \pm \cos \theta_1\},$$

$$\mathbf{e}_1^\pm = \{\pm \mathbf{n}_\rho \cos \theta_1, -\sin \theta_1\}.$$

Векторы $\mathbf{k}_2^+, \mathbf{e}_2^+, \mathbf{k}_1^\pm, \mathbf{e}_1^\pm$ лежат в плоскости преломления, проходящей через ось z и вектор \mathbf{n}_ρ , а вектор \mathbf{e}_\perp перпендикулярен этой плоскости. Векторы $\mathbf{k}_1^\pm, \mathbf{e}_1^\pm$ задают направление и поляризацию излучения в среде 1 для прямой (в сторону границы 1–2) и обратной (в сторону границы 1–3) волн соответственно. Эти векторы определяют фурье-образ (5) внешнего

тока и его проекции, входящие в (24). Теперь коэффициенты прохождения и отражения (12a) и (12b) принимают стандартный вид [23]:

$$T_{\parallel}^{21} = \frac{2n_2 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \\ T_{\perp}^{21} = \frac{2n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \\ R_{\parallel}^{12} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \\ R_{\perp}^{12} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \\ R_{\parallel}^{13} = \frac{n_3 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_3}{n_3 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_3}, \\ R_{\perp}^{13} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1 + n_3 \cos \theta_3}. \quad (28)$$

Подчеркнем, что здесь не использовались физические соображения об излучении и преломлении плоских волн. Эти формулы справедливы на асимптотике в среде 2 и лишь внешне похожи на соотношения, которые могли быть получены из таких соображений. Действительно, вместо обычных коэффициентов прохождения Френеля $T_{\parallel, \perp}^{12}$ возникают обратные коэффициенты $T_{\parallel, \perp}^{21}$. Более того, приведенная оценка интеграла (25) методом перевала справедлива, если размеры $\Delta\rho', \Delta z'$ и глубина h источника, а также толщина слоя a (и длина волны) малы по сравнению с расстоянием R_2 до точки наблюдения. Только в этом случае фурье-образ тока (24) в подынтегральном выражении в (25) можно считать медленной функцией от $\boldsymbol{\kappa}$ по сравнению с экспонентой $\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} + i\lambda_2 z)$ и не включать эту зависимость в определение точки перевала. Соответственно, формула (26) верна с точностью до членов порядка $O(\Delta\rho'/R_2), O(\Delta z'/R_2), O(h/R_2), O(a/R_2)$.

Следовательно, модуль комплексного вектора (26) электрического поля в среде 2 на асимптотике имеет вид

$$|\mathbf{E}_\omega| \approx \frac{\omega}{c^2} \frac{1}{R_2} \sqrt{(T_{\parallel}^{21})^2 \left| \frac{j_{\parallel}^+ + PR_{\parallel}^{13} j_{\parallel}^-}{1 - q_{\parallel}} \right|^2 + (T_{\perp}^{21})^2 \left| \frac{j_{\perp}^+ + PR_{\perp}^{13} j_{\perp}^-}{1 - q_{\perp}} \right|^2}. \quad (29)$$

Схема вычислений по формуле (29) такова. При заданном волновом векторе $\mathbf{k}_2^+ = k_2(\mathbf{n}_\rho \sin \theta_2, \cos \theta_2)$ излучения в среде 2 находятся полярные углы θ_1, θ_3 в плоскости преломления, коэффициенты прохож-

дения и отражения (28), единичные векторы поляризации $\mathbf{e}_1^\pm, \mathbf{e}_\perp$ в среде 1 и волновые векторы \mathbf{k}_1^\pm . Затем вычисляются проекции $j_{\parallel, \perp}^\pm$ фурье-образа (5) внешнего тока $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{j}^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_1^\pm \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) d^3r. \quad (29a)$$

5. ИЗЛУЧЕНИЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ ТОЧЕЧНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ЗАРЯДОМ

Проиллюстрируем полученные результаты простым примером. Пусть точечный переменный заряд $eN(t)$ движется в среде 1 с постоянной релятивистской скоростью \mathbf{v} , причем в начальный момент $t = 0$ он находится в точке $\mathbf{h} = (0, 0, -h)$ ($a > h > 0$), т. е.

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = evN(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{h} - \mathbf{v}t). \quad (30)$$

Тогда

$$\mathbf{j}^\pm = ev \exp(\pm i\lambda_1 h) \times \int_{-\infty}^{\infty} dt N(t) \exp[i\omega t(1 - n_1\beta \cos\theta^\pm)], \quad \beta = \frac{v}{c} \rightarrow 1,$$

где

$$\cos\theta^\pm = (\mathbf{k}_1^\pm \cdot \hat{\mathbf{v}})/k_1, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v. \quad (31)$$

Для того чтобы применить эти формулы для описания радиоизлучения отрицательного избытка каскада, положим $N(t) = N_0 \exp(-t^2 c^2 / 2L^2) / \sqrt{2\pi}$, где $L \approx 1-2$ м — эффективная длина развития каскада (а точнее, его отрицательного избытка) в среде с плотностью $\rho \approx 1$ г/см³. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\pm &= e\hat{\mathbf{v}}N_0L \exp(\pm i\lambda_1 h)\Phi^\pm, \\ \Phi^\pm &= \exp[-\alpha(\cos\theta_C - \cos\theta^\pm)^2], \quad (32) \\ \cos\theta_C &= 1/n_1, \end{aligned}$$

$$\alpha = 0.5(n_1\omega L/c)^2. \quad (33)$$

Подставив эти значения в (29), получим окончательную формулу:

$$|\mathbf{E}_\omega| \approx E_1 S, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{e2\pi f}{c^2} \frac{LN_0}{R_2} \approx \\ &\approx 10^{-7} f \frac{[\text{МГц}]L [\text{М}]N_0}{R_2 [\text{М}]} \text{ мкВ/м/МГц}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$S = |\exp(i\lambda_1 h)| \sqrt{(T_{\parallel}^{21})^2 |S_{\parallel}|^2 + (T_{\perp}^{21})^2 |S_{\perp}|^2}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= \\ &= \frac{(e_1^+ \cdot \hat{\mathbf{v}})\Phi^+ + (e_1^- \cdot \hat{\mathbf{v}})\Phi^- R_{\parallel}^{13} \exp(2i\lambda_1(a-h))}{1 - q_{\parallel}}, \quad (36a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\perp} &= \\ &= \frac{(e_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{v}}) [\Phi^+ + \Phi^- R_{\perp}^{13} \exp(2i\lambda_1(a-h))]}{1 - q_{\perp}}. \quad (36b) \end{aligned}$$

Напомним, что $2\pi e/c^2 \approx 10^{-7}$ мкВ/м/МГц².

Параметр (33) имеет решающее значение для данной задачи, так как согласно (32) он определяет угловой разброс поля излучения вблизи черенковского конуса $\cos\theta^\pm \approx \cos\theta_C$ для прямой и обратной волн. Как отмечалось выше, данный подход применим в предположении, что источник целиком расположен в среде 1. Между тем выбранная плотность тока (30) в общем случае не удовлетворяет этому условию, так как из-за гауссовского «хвоста» в $N(t)$ плотность тока остается ненулевой в средах 2 и 3. Физически ясно, что при $L \ll h/|\cos\theta_1|$, $L \ll (a-h)/|\cos\theta_1|$ это обстоятельство можно игнорировать. В прозрачных средах модуль множителя

$$\exp(i\lambda_1 h) = \exp\left(\frac{i h \omega \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2}}{c}\right)$$

равен единице, поскольку по предположению $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Применим эти формулы для конкретного случая (лунный реголит): $n_1 = 1.73$, $n_3 = 1.78$, $n_2 = 1$, $a = 20$ м, $h = 5$ м, $L = 1$ м (тогда $\alpha \approx 0.00066 f^2$ [МГц]), $LN_0/R_2 = 1$, поглощение излучения не учитывается, скорость заряда образует с осью $+z$ угол 120° (т. е. заряд падает из вакуума).

На рис. 2 показана частотная зависимость поля (34) в плоскости падения для трех полярных углов наблюдения в среде 2. Видно, что наличие границы раздела с оптически более плотной средой 3 кардинально меняет картину излучения в области больших частот за счет отражения обратной волны. В области малых частот, когда $\alpha \ll 1$ и $\Phi^\pm \approx 1$, отражение несущественно, так как при выбранных параметрах $R_{\parallel}^{13} \approx 0.01$. В области больших частот, когда $\alpha \gg 1$, вклады прямой и обратной волн зависят от соотношения углов θ^\pm (31). При заданных углах прямая волна излучается далеко за пределами черенковского конуса, так как $(\cos\theta_C - \cos\theta^+)^2 \approx 1.9, 1.2, 0.5$. Поэтому с ростом частоты ее амплитуда быстро уменьшается из-за коэффициента Φ^+ . В то же время, для обратной волны $(\cos\theta_C - \cos\theta^-)^2 \approx 0.2, 0.008, 0.05$. В результате вклад отраженной обратной волны может быть основным, если $\Phi^- R_{\parallel}^{13} / \Phi^+ \gg 1$. Это особенно заметно для угла наблюдения $\theta_2 = 0$.

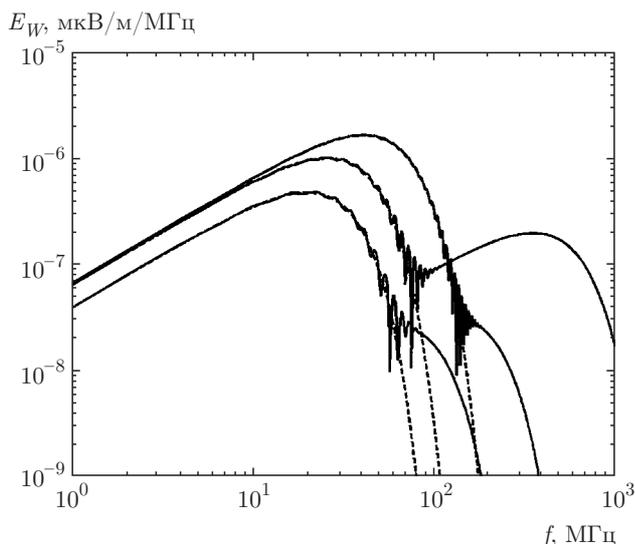


Рис. 2. Зависимость поля излучения (34) (при $LN_0/R_2 = 1$) от частоты для углов излучения в вакууме $\theta_2 = -45^\circ, 0, 45^\circ$ в плоскости падения заряда (кривые снизу вверх соответственно). Пунктирные кривые — без учета отражения, сплошные — с учетом отражения. Скорость заряда образует угол 120° относительно внешней нормали, $n_1 = 1.73, n_2 = 1, n_3 = 1.78, a = 20$ м, $h = 5$ м, $L = 1$ м

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе развит аналитический подход для расчета поля излучения от компактного источника на глубине $h < a$ в слое плотного вещества 1 толщиной a , который граничит с оптически более плотной средой 3 («подложкой»). На конечных расстояниях от границ раздела электромагнитное поле представляется в виде двукратного интеграла (23). Но на асимптотике в разреженной среде 2 поле излучения описывается физически прозрачными формулами (34)–(36), в которых учитывается отражение от подложки. В результате определение поля излучения в среде 2 от источника в среде 1 сводится к вычислению фурье-образа тока \mathbf{j}^\pm (29a) для прямой и обратной волн, т.е. фактически к вычислению частотно-угловой зависимости поля излучения в среде 1 .

Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН №3 «Физика фундаментальных взаимодействий и ядерные технологии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскармян, ЖЭТФ **41**, 616 (1961).
2. E. Zas, F. Halzen, and T. Stanev, Phys. Rev. D **45**, 362 (1992).

3. N. G. Lehtinen, P. W. Gorham, A. R. Jacobson et al., Phys. Rev. D **69**, 013008 (2004).
4. I. Kravchenko, S. Hussain, D. Seckel et al., Phys. Rev. D **85**, 062004 (2012).
5. P. W. Gorham, P. Allison, B. M. Baughman et al., Phys. Rev. D **82**, 022004 (2010).
6. P. Allison, J. Auffenberg, R. Bard et al., Astropart. Phys. **70**, 62 (2015).
7. S. W. Barwick, E. C. Berg, D. Z. Besson et al., Astropart. Phys. **70**, 12 (2015).
8. P. W. Gorham, C. L. Hebert, K. M. Liewer et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 041101 (2004).
9. J. D. Bray, R. D. Ekers, P. Roberts et al., Phys. Rev. D **91**, 063002 (2015).
10. O. Scholten, S. Buitink, J. Bacelar et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 191301 (2009).
11. M. Mevius, S. Buitink, H. Falke et al., Nucl. Instr. Meth. A **662**, S26 (2012).
12. R. Schilizzi, P. Dewdney, and T. Lazio, Proc. of SPIE **7733**, 773318 (2010).
13. Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, К. М. Пичхадзе и др., Космические исследования **44**, 22 (2006).
14. Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, К. М. Пичхадзе и др., ДАН **406**, 327 (2006).
15. V. A. Ryabov, V. A. Chechin, G. A. Gusev et al., Adv. Space Res. **58**, 464 (2016).
16. Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, В. А. Рябов, В. А. Чечин, УФН **180**, 957 (2010).
17. J. Alvarez-Muniz and E. Zas, Phys. Lett. B **434**, 396 (1998).
18. J. Alvarez-Muniz, E. Marques, R. A. Vazquez et al., Phys. Rev. D **68**, 043001 (2003).
19. J. Alvarez-Muniz, E. Marques, R. Vazquez et al., Phys. Rev. D **74**, 023007 (2006).
20. J. Alvarez-Muniz, A. Romero-Wolf, and E. Zas, Phys. Rev. D **84**, 103003 (2011).
21. J. Alvarez-Muniz, W. R. Carvalho, M. Tueros et al., Astropart. Phys. **35**, 287 (2012).
22. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, *Переходное излучение и переходное рассеяние*, Наука, Москва (1984).
23. Е. Л. Фейнберг, *Распространение радиоволн вдоль земной поверхности*, Наука, Москва (1999).
24. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*, ч. 2, ОНТИ, Москва (1937).