ЖЭТФ, 2017, том 152, вып. 6 (12), стр. 1362–1373

РАМАНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА КВАНТОВЫМИ КОЛЬЦАМИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Р. З. Витлина [a*], *Л. И. Магарилл* [a,b**], *А. В. Чаплик* [a,b***]

[a] *Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения Российской академии наук 630090, Новосибирск, Россия*

[b] *Новосибирский государственный университет 630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 25 августа 2017 г.

Теоретически исследовано влияние кулоновского взаимодействия в промежуточном состоянии на неупругий резонансный процесс рассеяния света электронами в квантовых кольцах в магнитном поле, нормальном к плоскости кольца. В качестве примеров рассматриваются одно- и двухэлектронные квантовые кольца.

DOI: 10.7868/S0044451017120203

1. ВВЕДЕНИЕ

При резонансном неупругом рассеянии света в твердых телах промежуточное состояние отличается от начального и конечного присутствием в нем виртуальной электрон-дырочной пары. Естественно, возникает проблема учета кулоновского взаимодействия как внутри пары, так и с имевшимися в начальном состоянии частицами. Во многих работах [1–14] отмечается недостаточность упрощенного подхода, игнорирующего кулоновские эффекты и, следовательно, сложную структуру энергетического спектра промежуточного состояния. Получаемые на этом пути результаты применимы лишь при достаточно большой отстройке от резонанса (в полупроводниках это разность энергии падающего фотона и эффективной ширины запрещенной зоны). Нам известна только работа Ивченко [15], в которой кулоновское взаимодействие в промежуточном состоянии учтено по теории возмущений на примере неупругого рассеяния света на примесном центре. В нашей недавней работе [16] мы рассматривали тот же эффект на доноре в двумерной системе и показали, что существуют определенные соотношения между поляризацией и интенсивностью рассеянного света, которые не зависят от используемого приближения для учета межчастичного взаимодействия.

В предлагаемой работе рассматривается неупругое рассеяние света квантовыми кольцами (КК), когда в начальном и конечном состояниях зона проводимости заселена электронами. Неупругий эффект при рассеянии света связан с возбуждением этой электронной системы.

Для дифференциального сечения рассеяния (на одно КК) можно написать следующее выражение [5]:

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1}|\Gamma_{FI}|^2\delta(E_F - E_I - \omega), \qquad (1)$$

где введена амплитуда рассеяния Γ_{FI}, для которой имеем в резонансном приближении

$$\Gamma_{FI} = \frac{e^2}{c^2}\sum_M \langle F|\sum_i\{\mathbf{v}_i, e^{-i\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{R}_i}\}\mathbf{e}_2^*|M\rangle\langle M| \times \\ \times \sum_i\{\mathbf{v}_i, e^{i\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{R}_i}\}\mathbf{e}_1|I\rangle\,(E_I - E_M + \omega_1)^{-1}. \qquad (2)$$

Здесь $\{A,B\} = (AB+BA)/2$, $\mathbf{R}_i = (\mathbf{r}_i, z_i)$ — пространственный 3D-вектор, соответствующий координате i-й частицы, $\mathbf{r} = (\rho,\varphi)$ — 2D-вектор в плоскости кольца, $\omega_{1,2}$, $\mathbf{e}_{1,2}$, $\mathbf{Q}_{1,2}$ — соответственно частоты, векторы поляризации, волновые векторы падающего и рассеянного света, $\omega = \omega_1 - \omega_2$ — сдвиг частоты при неупругом рассеянии, $\mathbf{v}_i$ — оператор скорости i-й частицы, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}, Q_z)$; ось z выбрана

[*] E-mail: ritta@isp.nsc.ru

[**] E-mail: levm@isp.nsc.ru

[***] E-mail: chaplik@isp.nsc.ru

вдоль нормали к плоскости кольца. Здесь и далее $\hbar = 1$. Индексы «I, F, M» соответствуют начальным, конечным и промежуточным состояниям системы, E_I, E_F, E_M — энергии этих состояний. В качестве конкретных примеров, демонстрирующих роль кулоновских эффектов, мы рассмотрим КК с одним и двумя электронами. Соответственно, в промежуточных состояниях фигурируют трехчастичная (два электрона + дырка) и четырехчастичная (три электрона + дырка) системы.

2. РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ОДНОЭЛЕКТРОННОМ КОЛЬЦЕ

В этом разделе рассматривается рамановское резонансное рассеяние (РРР) света электроном в КК с участием валентной зоны. В начальном состоянии имеются размерно-квантованный электрон в зоне проводимости и заполненная валентная зона. То же относится и к конечному состоянию, только электрон будет занимать другой уровень. В промежуточном состоянии имеем два электрона в зоне проводимости и дырку в валентной зоне. Учет кулоновского взаимодействия этих трех частиц приводит к сложной структуре энергетического спектра промежуточного состояния. Спектр этот, очевидно, дискретен ввиду финитности движения в кольце. Если линия возбуждения достаточно узкая, то, настраиваясь частотой падающего света (или внешними полями, влияющими на положение уровней) на резонанс с тем или иным уровнем промежуточного состояния, можно, как показывают расчеты, обнаружить изменения в интенсивности и поляризационных свойствах рассеянного излучения. Разумеется, эта информация теряется в теориях, не учитывающих кулоновское взаимодействие в промежуточном состоянии.

Физически ясно, что низшим по энергии состоянием системы «дырка + два электрона» является трион (принятое обозначение X^-). Из вариационных расчетов энергии триона для прямолинейной квантовой проволоки [17] следует, что связанное состояние триона существует лишь при нулевом суммарном спине электронов, когда координатная часть волновой функции симметрична по электронным координатам. Предполагая радиус КК большим по сравнению с эффективным боровским радиусом a_B и учитывая, что в 1D-системе размеры как экситона, так и триона меньше a_B [17], будем считать, что и в КК триону отвечает синглетное состояние, т. е. симметричная по электронам координатная волновая функция, а триплетному состоянию электронной пары соответствует экситон и делокализованный на кольце электрон (при этом волновая функция антисимметрична по электронам).

Главная трудность задачи состоит в построении корректной волновой функции такого трехчастичного комплекса с учетом кулоновского взаимодействия между частицами. Ниже вычисляются и сравниваются сечения РРР для двух моделей промежуточного состояния: невзаимодействующие частицы и частицы, образующие трион. В приближении эффективной массы выпишем выражения для блоховских функций начального, конечного и промежуточного состояний. Волновая функция начального состояния имеет вид

$$|I\rangle = \Psi^I_{m,\mu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3) = \psi^c_m(\varphi_1)\delta(\varphi_2 - \varphi_3) \times \\ \times f^c(z_1) f^v(z_2) f^v(z_3) g^c(\rho_1) g^v(\rho_2) g^v(\rho_3) u^c_\mu(\mathbf{R}_1) \times \\ \times \sum_{\lambda'} u^v_{\lambda'}(\mathbf{R}_2) u^{v*}_{-\lambda'}(\mathbf{R}_3)/\sqrt{2}. \quad (3)$$

Здесь индексы «1, 2» относятся к электронам, «3» — к дырке, $\psi^c_m(\varphi) = e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ — одночастичная орбитальная волновая функция электрона в кольце, $u^c_\mu(\mathbf{R})$, $u^v_\lambda(\mathbf{R})$ — амплитуды блоховских функций в зоне проводимости и в валентной зоне, $\mu = \pm 1$, $\lambda = \pm 1$ — спиновые индексы, $f^{c,v}(z)$ — размерно-квантованная функция поперечного движения по z, $g^{c,v}(\rho)$ — размерно-квантованная функция в плоскости, ограничивающая радиальное движение электронов в кольце (мы рассматриваем одномерное кольцо).

Далее в качестве примера будет рассматриваться РРР с участием спин-отщепленной ветви валентной зоны, для которой

$$u^v_\lambda(\mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(Z(\mathbf{R})\xi_\lambda + (\lambda X(\mathbf{R}) + iY(\mathbf{R}))\xi_{-\lambda}). \quad (4)$$

Блоховская амплитуда электрона зоны проводимости равна $u^c_\mu = S(\mathbf{R})\xi_\mu$, $S(\mathbf{R})$ — сферически-симметричная функция, ξ_μ — спиноры вида

$$\xi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Блоховскую функцию конечного состояния Ψ^F можно определить, используя выражение (3) с заменой $m \to m'$, $\mu \to \mu'$.

Трехчастичную волновую функцию промежуточного состояния, антисимметричную относительно электронов, можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&|M\rangle = \Psi^M_{\gamma,S,\nu,\lambda}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3) = \\
&\quad = f^c(z_1)f^c(z_2)f^v(z_3)g^c(\rho_1)g^c(\rho_2)g^v(\rho_3)\times \\
&\times\Bigg[F^{as}_\gamma(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\delta_{S,1}\Bigg(\sum_{\pm}\delta_{\nu,\pm1}u^c_{\pm1}(\mathbf{R}_1)u^c_{\pm1}(\mathbf{R}_2)\ + \\
&\quad+\frac{\delta_{\nu,0}}{\sqrt{2}}\big(u^c_{+1}(\mathbf{R}_1)u^c_{-1}(\mathbf{R}_2)+u^c_{-1}(\mathbf{R}_1)u^c_{+1}(\mathbf{R}_2)\big)\Bigg)+ \\
&+\frac{\delta_{S,0}\delta_{\nu,0}}{\sqrt{2}}F^s_\gamma(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\big(u^c_{+1}(\mathbf{R}_1)u^c_{-1}(\mathbf{R}_2)-u^c_{-1}(\mathbf{R}_1)\times \\
&\qquad\times u^c_{+1}(\mathbf{R}_2)\big)\Bigg]u^{v*}_{-\lambda}(\mathbf{R}_3), \quad (6)
\end{aligned}
$$

где S — полный спин двух электронов, ν — его проекция, γ — набор орбитальных квантовых чисел, описывающих состояния трехчастичного комплекса; $F^{as(s)}_\gamma$ — огибающая координатная волновая функция промежуточного состояния антисимметричная (симметричная) относительно φ_1 и φ_2. Используя выражения (3), (6), из (2) получаем

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{m',\mu';m,\mu} = \frac{e^2P^2}{6c^2}\sum_\gamma\Bigg[\frac{D^{as}_{m',\gamma}(\mathbf{q}_2)D^{as*}_{m,\gamma}(\mathbf{q}_1)}{\varepsilon^c_m - E^{as}_\gamma+\omega_1}\times \\
&\times\Big(3(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\delta_{\mu'\mu}+i(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\mu'\mu}\Big)+\frac{D^{s}_{m',\gamma}(\mathbf{q}_2)D^{s*}_{m,\gamma}(\mathbf{q}_1)}{\varepsilon^c_m - E^{s}_\gamma+\omega_1}\times \\
&\qquad\times\Big((\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\delta_{\mu'\mu}-i(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\mu'\mu}\Big)\Bigg]. \quad (7)
\end{aligned}
$$

Здесь $P = i\langle\mathcal{S}|v_x|X\rangle$ — кэйновский параметр, $\mathbf{A} = [\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2^*}]$, $E^{as(s)}$ — энергия антисимметричного (симметричного) промежуточного состояния, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ — вектор матриц Паули. Поскольку спектр не зависит от проекций спинов ν, λ, выражение (2) по ним может быть просуммировано и для амплитуды рассеяния получаем (7). Входящие в (7) величины $D^{as(s)}_{m,\gamma}(\mathbf{q})$ определяются выражением

$$
\begin{aligned}
&D^{as(s)}_{m,\gamma}(\mathbf{q}) = \int\limits_0^{2\pi}\psi^{c*}_m(\varphi_1)F^{as(s)}_\gamma(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\times \\
&\times\exp(-iqR\cos(\varphi_2-\theta_q))\,\delta(\varphi_2-\varphi_3)\,d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3. \quad (8)
\end{aligned}
$$

Здесь $\theta_{\mathbf{q}}$ — полярный угол вектора $\mathbf{q}$, R — радиус кольца. При получении (8) было учтено, что в строго одномерном кольце $(f^{c,v}(z))^2, (g^{c,v}(\rho))^2$ ведут себя как дельта-функции $\delta(z), \delta(\rho)$.

Амплитуда рассеяния существенно зависит от того, через какое промежуточное состояние (симметричное или асимметричное) идет процесс рассеяния. Как следует из формулы (7), при прохождении через резонанс с участием асимметричного промежуточного состояния сечение будет в девять раз больше, если векторы поляризации падающего и рассеянного света параллельны, чем если они взаимно перпендикулярны. Для симметричного промежуточного состояния сечение будет одинаковым при параллельных и взаимно перпендикулярных векторах поляризации. С учетом кулоновского взаимодействия энергии E^s_γ и E^{as}_γ различны, поэтому разные промежуточные состояния соответствуют разным резонансным частотам падающего излучения. Подобный результат был получен в работе [16] при рассмотрении задачи о неупругом рассеянии света на донорном центре в двумерной системе.

Чтобы определить $D^{as(s)}_{m,\gamma}(\mathbf{q})$, необходимо найти координатные волновые функции трехчастичной системы. Для решения этой проблемы, следуя [18], удобно перейти к новым угловым переменным:

$$
\begin{aligned}
\varphi_c &= (m_e(\varphi_1+\varphi_2)+m_h\varphi_3)/M, \\
\alpha &= (\varphi_1+\varphi_2)/2-\varphi_3, \quad \beta=\varphi_1-\varphi_2.
\end{aligned} \quad (9)
$$

В новых переменных полную волновую функцию можно представить в виде

$$
F = \frac{e^{iL\varphi_c+i\Lambda\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\chi(\alpha,\beta). \quad (10)
$$

Здесь $M = 2m_e+m_h$, $m_{e,h}$ — масса электрона (дырки), $\Lambda = -2\bar\Phi(1-c_e)$, $c_e = m_e/M$, $\bar\Phi$ — магнитный поток в единицах кванта потока $\Phi_0 = 2\pi c/e$, $e^{iL\varphi_c}/\sqrt{2\pi}$ -волновая функция центра масс трехчастичного комплекса, $L = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Волновая функция $\chi(\alpha,\beta)$ удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{2}W_e+W_h\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha^2}-2W_e\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}+ \\
&\qquad+U(\alpha,\beta)\chi=\varepsilon^{int}\chi, \quad (11)
\end{aligned}
$$

$$
U(\alpha,\beta) = V(\beta)-V(\alpha+\beta/2)-V(\alpha-\beta/2), \quad (12)
$$

где ε^{int} — энергия относительного движения, а потенциал кулоновского взаимодействия V равен

$$
V(x) = \frac{e^2}{2\kappa R|\sin(x/2)|}. \quad (13)
$$

Здесь

$$
W_{e,h} = 1/(2m_{e,h}R^2),
$$

κ — фоновая диэлектрическая постоянная. Поскольку $U(\alpha,\beta)$ периодическая функция α, β, уравнение (11) описывает движение частицы с анизотропной массой в двумерной решетке в плоскости (α,β). Базисные векторы этой решетки могут быть выбраны следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = \pi(\boldsymbol{\alpha}_0 + 2\boldsymbol{\beta}_0), \quad \mathbf{e}_2 = 2\pi\boldsymbol{\alpha}_0, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\beta}_0$ — орты декартовой системы координат в плоскости α, β. Волновая функция относительного движения $\chi(\alpha, \beta)$ должна иметь блоховский вид. Соответствующий волновой вектор $\mathbf{p} = p_1\boldsymbol{\alpha}_0 + p_2\boldsymbol{\beta}_0$. Периодичность полной волновой функции (10) по углам $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ с периодом 2π накладывает ограничения на возможные значения квазиимпульса $\mathbf{p}$:

$$\begin{gathered} Lc_e + \frac{\Lambda + p_1}{2} + p_2 = N_1, \\ Lc_e + \frac{\Lambda + p_1}{2} - p_2 = N_2, \\ L(1 - 2c_e) - \Lambda - p_1 = N_3 \end{gathered} \tag{15}$$

(N_1, N_2, N_3 — целые числа). Из условий (15) следует, что L и $2p_2$ — целые числа.

В приближении сильной связи ($a_B \ll 2\pi R$, $a_B = \kappa/\mu e^2$ — экситонный боровский радиус, $\mu = m_e m_h/(m_e + m_h)$), функция $\chi(\alpha, \beta)$ может быть записана в виде

$$\chi(\alpha, \beta) = \sum_{n_1, n_2} \exp\{i\pi p_1(n_1 + 2n_2) + 2i\pi p_2 n_1\} \times \\ \times f_0(\alpha - \pi(n_1 + 2n_2), \beta - 2\pi n_1). \tag{16}$$

Здесь $f_0(\alpha, \beta)$ — «атомная» (узловая) функция.

Далее мы ограничимся вкладом в амплитуду рассеяния (7), обусловленным переходом через симметричное промежуточное состояние. Для вычисления величины $D_m^{(s)}(\mathbf{q})$ необходимо знать волновую функцию синглетного триона. Узловую волновую функцию в вариационном приближении выбираем в простейшем виде:

$$f_0(\alpha, \beta) = a \exp\{-a(|\alpha + \beta/2| + |\alpha - \beta/2|)\}. \tag{17}$$

Здесь a — вариационный параметр. В логарифмическом приближении имеем для $a = -(3R/2a_B) \times \ln(d/a_B) \gg 1$, где d — радиус обрезки одномерного кулоновского потенциала в (13), $d \ll a_B$. Подставляя (16) в (8), после довольно громоздких вычислений окончательно получаем для $D^s_{m,L}(\mathbf{q}_2)$:

$$D^s_{m,L}(\mathbf{q_2}) = \frac{2a^2}{a^2 + b^2_{L,m}(\bar\Phi)} \exp\{i(L-m)(\pi/2 - \theta_{q_2})\} \times \\ \times J_{L-m}(q_2 R) K(a, B_L(\bar\Phi)), \tag{18}$$

$$K(x,y) = 1 + \frac{e^{-\pi x}\cos(\pi y) - e^{-2\pi x}}{(1 - e^{-\pi x}\cos(\pi y))^2 + e^{-2\pi x}\sin(\pi y)^2}.$$

Здесь $b_{L,m} = (L + \bar\Phi)c_e - (m + \bar\Phi)$, $B_L = (L + \bar\Phi)(1 - c_e)$.

Используя (18), находим вклад в сечение РРР для перехода $m \to m'$, соответствующий синглетному триону в промежуточном состоянии:

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = \frac{4e^4P^4}{9c^4}\frac{\omega_2}{\omega_1} \times \\ \times \left| \sum_L \frac{J_{L-m'}(q_2R)J_{L-m}(q_1R)\exp(iL\theta)K^2(a, B_L(\bar\Phi))}{\varepsilon^c_m(\bar\Phi) - \varepsilon^{cm}_L(\bar\Phi) - \varepsilon^{int}_L(\bar\Phi) + \omega_1 - E_g} \right|^2 \times \\ \times \left(\frac{a^4}{(a^2 + b^2_{L,m'}(\bar\Phi))(a^2 + b^2_{L,m}(\bar\Phi))} \right)^2 \times \\ \times (|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*|^2 + |\mathbf{A}|^2)\delta(\varepsilon^c_{m'}(\bar\Phi) - \varepsilon^c_m(\bar\Phi) - \omega), \tag{19}$$

где $\theta = \theta_{q_1} - \theta_{q_2}$ — угол между векторами $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$,

$$\varepsilon^c_m(\bar\Phi) = W_e(m + \bar\Phi)^2$$

— энергия электрона в зоне проводимости, $\varepsilon^{cm}_L(\bar\Phi) = W_{tr}(L + \bar\Phi)^2$ — энергия центра масс триона, $W_{tr} = 1/2MR^2$, $\varepsilon^{int}_L(\bar\Phi)$ — внутренняя энергия триона, E_g — ширина запрещенной зоны. Выражение ε^{int}_L в приближении сильной связи дано в [18]. Поскольку энергии $\varepsilon^c_{m'}(\bar\Phi)$, $\varepsilon^c_m(\bar\Phi)$ не зависят от μ', μ, сечение просуммировано по этим переменным.

Если кулоновское взаимодействие в промежуточном состоянии не учитывается, энергия состояния становится суммой одночастичных энергий электронов и дырки. Волновая функция промежуточного состояния становится линейной комбинацией одночастичных волновых функций. Выражение для сечения РРР значительно упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\omega d\Omega} = \frac{e^4P^4}{9c^4}\frac{\omega_2}{\omega_1} \times \\ \times \left| \sum_n \frac{J_{n-m}(q_2R)J_{n-m'}(q_1R)e^{in\theta}}{\varepsilon^v_n(\bar\Phi) - \varepsilon^c_{m'}(\bar\Phi) + \omega_1 - E_g} \right|^2 \times \\ \times \delta(\varepsilon^c_{m'}(\bar\Phi) - \varepsilon^c_m(\bar\Phi) - \omega)(|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*|^2 + |\mathbf{A}|^2). \tag{20}$$

Здесь $\varepsilon^v_n(\bar\Phi) = -W_h(n + \bar\Phi)^2$ — энергия электрона в валентной зоне.

Из (19), (20) следует периодичность этих выражений как функций $\bar\Phi$ с периодом Φ_0. Действительно, сдвинем $\bar\Phi \to \bar\Phi + 1$, $L \to L - 1$, $n \to n - 1$ в суммах по L и n и также $m \to m - 1$, $m' \to m' - 1$ (чтобы не изменились начальная и конечная энергии). Видим, что после таких преобразований сечения рассеяния не меняются. Кроме того, эти выражения демонстрируют четность относительно $\bar\Phi$. Изменяя $\bar\Phi$ на $-\bar\Phi$ и соответственно L, n, m', m на $-L$, $-n$, $-m'$, $-m$, получим аналогичные выражения. Таким образом, зависимость сечений от магнитного потока может рассматриваться только в интервале $0 < \bar{\Phi} \le 1/2$. Основное состояние в этом интервале по $\bar{\Phi}$ соответствует $m = 0$. Сечение рассеяния для перехода из $m = 0$ в возбужденное состояние m' $(0 \to m')$, равно

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = \frac{4e^4P^4}{9c^4}\,\frac{\omega_2}{\omega_1} \times \\ \times \left|\sum_L \frac{J_{L-m'}(q_2R)J_L(q_1R)K^2(a, B_L(\bar{\Phi})\exp(iL\theta))}{\varepsilon_0^c(\bar{\Phi}) - \varepsilon_L^{cm}(\bar{\Phi}) - \varepsilon_L^{int}(\bar{\Phi}) + \omega_1 - E_g}\right|^2 \times \\ \times \left(\frac{a^4}{(a^2 + b^2_{L,m'}(\bar{\Phi}))(a^2 + b^2_{L,0}(\bar{\Phi}))}\right)^2 \times \\ \times (|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*|^2 + |\mathbf{A}|^2)\delta(\varepsilon^c_{m'}(\bar{\Phi}) - \varepsilon^c_0(\bar{\Phi}) - \omega). \quad (21)$$

В качестве примера рассмотрим случай простой геометрии рассеяния: волновой вектор падающего света нормален к плоскости кольца, в то время как волновой вектор рассеянной волны образует некоторый угол ϑ с нормалью, $\cos\vartheta = q_2/Q_2$. Для такой геометрии $q_1 = 0$, в суммах по L, n остаются только члены с $L = 0, n = m'$, и (21), (20) принимают следующий вид:

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = \frac{4e^4P^4}{9c^4}\,\frac{\omega_2}{\omega_1} \times \\ \times \left|\frac{J_{m'}(q_2R)K^2(a, B_0(\bar{\Phi}))}{\varepsilon_0^c(\bar{\Phi}) - \varepsilon_0^{cm}(\bar{\Phi}) - \varepsilon_0^{int}(\bar{\Phi}) + \omega_1 - E_g}\right|^2 \times \\ \times \left(\frac{a^4}{(a^2 + b^2_{0,m'}(\bar{\Phi}))(a^2 + b^2_{0,0}(\bar{\Phi}))}\right)^2 \times \\ \times (|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*|^2 + |\mathbf{A}|^2)\delta(\varepsilon^c_{m'}(\bar{\Phi}) - \varepsilon^c_0(\bar{\Phi}) - \omega), \quad (22)$$

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\omega d\Omega} = \frac{e^4P^4}{9c^4}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\left|\frac{J_{m'}(q_2R)}{\varepsilon^v_{m'}(\bar{\Phi}) - \varepsilon^c_{m'}(\bar{\Phi}) + \omega_1 - E_g}\right|^2 \times \\ \times (|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*|^2 + |\mathbf{A}|^2)\delta(\varepsilon^c_{m'}(\bar{\Phi}) - \varepsilon^c_0(\bar{\Phi}) - \omega). \quad (23)$$

При $a \gg b_{0,m'}$ $K(a, B_L(\bar{\Phi})) \to 1$ и тогда сравнение выражений (22) и (23) показывает, что сечение рассеяния с образованием триона в четыре раза больше сечения в отсутствие кулоновского взаимодействия в промежуточном состоянии (если рассеяние не сопровождается переходом в высокие m'). Коэффициент «четыре» связан с конкретным видом волновой функции триона (17). Расчет показывает, что, например, для гауссовской модели

$$f_0(\alpha, \beta) = \sqrt{2a/\pi}\exp(-a((\alpha + \beta/2)^2 + (\alpha - \beta/2)^2))$$

этот коэффициент равен двум.

3. РАССЕЯНИЕ СВЕТА КОЛЬЦОМ С ДВУМЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Переходим ко второй части работы: рассеяние света на двухэлектронном кольце. В промежуточном состоянии имеются три электрона и дырка.

Функцию начального состояния можно представить в виде

$$|I\rangle = \Psi^I_{\alpha,\Sigma,\mu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \\ = \frac{\mathcal{S}(\mathbf{R}_1)\mathcal{S}(\mathbf{R}_2)}{\sqrt{2}}\delta(\varphi_3 - \varphi_4) \times \\ \times \sum_{\lambda'} u^v_{\lambda'}(\mathbf{R}_3)u^{v*}_{-\lambda'}(\mathbf{R}_4)f^c(z_1)f^c(z_2)f^v(z_3)f^v(z_4) \times \\ \times g^c(\rho_1)g^c(\rho_2)g^v(\rho_3)g^v(\rho_4) \times \\ \times \Big(\Phi^{as}_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)\delta_{\Sigma,1}\eta_\mu^{(\Sigma=1)}(1,2) + \\ + \Phi^s_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)\delta_{\Sigma,0}\eta_\mu^{(\Sigma=0)}(1,2)\Big), \quad (24)$$

где $\Phi^{as(s)}_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)$ — огибающие функции двухэлектронной системы в кольце (индексы «$as(s)$» обозначают антисимметрию (симметрию) функции по аргументам φ_1, φ_2), α — набор орбитальных квантовых чисел, $\lambda = \pm 1$ — спиновый индекс, Σ — полный спин двухэлектронной системы ($\Sigma = 0$ и 1), μ — проекция полного спина (для $\Sigma = 1$ $\mu = \pm 1, 0$; для $\Sigma = 0$ $\mu = 0$), $\eta_\mu^{(\Sigma)}$ — спиновые функции двухэлектронной системы:

$$\eta_\mu^{(\Sigma=1)} = \sum_\pm \delta_{\mu,\pm 1}\xi_{\pm 1}(1)\xi_{\pm 1}(2) + \\ + \frac{\delta_{\mu,0}}{\sqrt{2}}(\xi_{+1}(1)\xi_{-1}(2) + \xi_{-1}(1)\xi_{+1}(2)), \quad (25)$$

$$\eta_\mu^{(\Sigma=0)} = \frac{\delta_{\mu,0}}{\sqrt{2}}(\xi_{+1}(1)\xi_{-1}(2) - \xi_{-1}(1)\xi_{+1}(2)).$$

Антисимметричная по электронам (индексы «1, 2, 3» относятся к электронам, «4» — к дырке) четырехчастичная волновая функция промежуточного состояния имеет вид

$$
\begin{aligned}
|M\rangle = \Psi^{M}_{\gamma,S,\nu,\lambda,t}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3,\mathbf{R}_4) = \\
= \mathcal{S}(\mathbf{R}_1)\mathcal{S}(\mathbf{R}_2)\mathcal{S}(\mathbf{R}_3)u^{v*}_{-\lambda}(\mathbf{R}_4)f^c(z_1)f^c(z_2)\times \\
\times f^c(z_3)f^v(z_4)g^c(\rho_1)g^c(\rho_2)g^c(\rho_3)g^v(\rho_4)\times \\
\times\Big[\delta_{S,3/2}\zeta^{(3/2)}_{\nu}(1,2,3)\Xi^{(as)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)+ \\
+\delta_{S,1/2}N^{(t)}_{\gamma}\Big(\Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}(1,2,3)+ \\
+\Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_2,\varphi_3,\varphi_1,\varphi_4)\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}(2,3,1)+ \\
+\Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4)\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}(3,1,2)\Big)\Big]. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Здесь γ — набор орбитальных квантовых чисел промежуточного состояния, S — полный спин трехэлектронной системы ($S=3/2$ или $S=1/2$), по нему идет классификация четырехчастичных волновых функций системы. Проекция полного спина ν составляет: для $S=3/2$ $\nu=\pm3/2$, $\pm1/2$; для $S=1/2$ $\nu=\pm1/2$. Состояние с $S=1/2$ является дублетным, $t=1,2$ нумерует состояния дублета. Огибающая координатная функция четырехчастичной системы, отвечающая полному спину 3/2, $\Xi^{(as)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$, полностью антисимметрична по электронным координатам (т. е. по первым трем аргументам), а соответствующая ей спиновая функция имеет вид

$$
\begin{aligned}
\zeta^{(S=3/2)}_{\nu}(1,2,3) = \sum_{\pm}\delta_{\nu,\pm3/2}\xi_{\pm1}(1)\xi_{\pm1}(2)\xi_{\pm1}(3)+ \\
+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\pm}\delta_{\nu,\pm1/2}\Big[\xi_{\pm1}(1)\xi_{\pm1}(2)\xi_{\mp1}(3)+ \\
+\xi_{\pm1}(1)\xi_{\mp1}(2)\xi_{\pm1}(3)+\xi_{\mp1}(1)\xi_{\pm1}(2)\xi_{\pm1}(3)\Big]. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Для дублета с $S=1/2$ полная волновая функция строится по схеме второго слагаемого в квадратных скобках выражения (26). Координатные множители выбраны антисимметричными ($t=1$) или симметричными ($t=2$) по второму и третьему аргументам, а спиновые множители даются формулами

$$
\begin{aligned}
\zeta^{(S=1/2)}_{(t=1)\nu}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{\pm}\delta_{\nu,\pm1/2}\times \\
\times\Big[\xi_{\pm1}(1)\Big(\xi_{\pm1}(2)\xi_{\mp1}(3)+\xi_{\mp1}(2)\xi_{\pm1}(3)\Big)- \\
-2\xi_{\mp1}(1)\xi_{\pm1}(2)\xi_{\pm1}(3)\Big], \qquad (28) \\
\zeta^{(S=1/2)}_{(t=2)\nu}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\pm}\delta_{\nu,\pm1/2}\xi_{\pm1}(1)\times \\
\times\Big[\xi_{\pm1}(2)\xi_{\mp1}(3)-\xi_{\mp1}(2)\xi_{\pm1}(3))\Big].
\end{aligned}
$$

Функции $\zeta^{(1/2)}_{(1,2)\nu}(1,2,3)$ симметричны (антисимметричны) по второму и третьему аргументам. Нетрудно показать, что функции $\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}(1,2,3)+\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}(2,3,1)+\zeta^{(1/2)}_{(t)\nu}(3,1,2)=0, \\
\zeta^{(1/2)}_{(1)\nu}(1,2,3)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta^{(1/2)}_{(2)\nu}(1,2,3)+ \qquad (29) \\
+2\zeta^{(1/2)}_{(2)\nu}(3,1,2)).
\end{aligned}
$$

Функции $\Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ предполагаются нормированными. При этом для нормировочного множителя $N^{(t)}_{\gamma}$ имеем

$$
\begin{aligned}
N^{(t)}_{\gamma} = \Big[3\Big(1-\mathrm{Re}\int d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4\times \\
\times\Xi^{(t)*}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\times \\
\times\Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_2,\varphi_3,\varphi_1,\varphi_4)\Big)\Big]^{-1/2}. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Функцию $\Xi^{(as)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
\Xi^{(as)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) = \\
= N^{(as)}_{\gamma}[\Xi^{(1)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)+ \\
+\Xi^{(1)}_{\gamma}(\varphi_2,\varphi_3,\varphi_1,\varphi_4)+\Xi^{(1)}_{\gamma}(\varphi_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4)], \\
N^{(as)}_{\gamma} = \Big[3\Big(1+2\,\mathrm{Re}\int d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4\times \qquad (31) \\
\times\Xi^{(1)*}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\times \\
\times\Xi^{(1)}_{\gamma}(\varphi_2,\varphi_3,\varphi_1,\varphi_4)\Big)\Big]^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

Существуют четыре типа переходов в зависимости от полного спина начального и конечного состояний: $1\to1$, $0\to1$, $1\to0$, $0\to0$. Формулы для соответствующих матричных элементов и сечений чрезвычайно громоздки, и мы их здесь не выписываем (они даны в Приложении). Приведем лишь множители, описывающие поляризационную структуру рассеянного света.

Переход $1\to1$, резонанс на уровне $S=3/2$ промежуточного состояния:

$$
\frac{d^2\sigma}{d\omega\,d\Omega}^{(1\to1)} = 12T_1|\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^*_2|^2+2T_1|\mathbf{A}|^2. \qquad (32)
$$

Переход $1\to1$, резонанс на уровне $S=1/2$ промежуточного состояния:

$$
\frac{d^2\sigma}{d\omega\,d\Omega}^{(1\to1)} = 3T_2|\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^*_2|^2+2T_2|\mathbf{A}|^2. \qquad (33)
$$

Здесь коэффициенты T_1 и T_2 определяются интегралами от произведений огибающих волновых функций двухэлектронной системы и четырехчастичного комплекса (см. формулу (A.12)).

При переходе $0 \to 0$ резонансы возможны лишь на компонентах дублетного уровня $S = 1/2$ ($t = 1$ или $t = 2$). При любом t сечение содержит лишь фактор $|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*|^2$, рассеяние в скрещенные поляризации запрещено.

При переходах $0 \to 1$ и $1 \to 0$ резонансы также возможны лишь на уровнях $S = 1/2$, однако теперь запрещено рассеяние с параллельными поляризациями, т. е. сечение пропорционально $|\mathbf{A}|^2$.

Подчеркнем еще раз, что сформулированные выше поляризационные характеристики неупругого рассеяния света не связаны с конкретным видом волновых функций промежуточного состояния. Они определяются лишь спиновой структурой блоховских функций валентной зоны и, разумеется, тем фактом, что кулоновское взаимодействие расщепляет уровни энергии комплекса четырех частиц в промежуточном состоянии по полному спину и предполагается возможным настраивать частоту падающей волны на каждый из уровней возникшей структуры.

Если пренебречь кулоновским взаимодействием в начальном, конечном и промежуточном состояниях, то энергия начального состояния равна сумме одночастичных энергий двух электронов, а энергия промежуточного состояния — сумме одночастичных энергий трех электронов и дырки. При этом для заданных наборов квантовых чисел начального и промежуточного состояний все знаменатели в (A.12)–(A.15) становятся равными. Волновые функции, входящие в выражения для величин D, B и C, даются линейными комбинациями одночастичных волновых функций. Формулы (A.12)–(A.15) сильно упрощаются, а поскольку в резонансе (при данной частоте падающей волны) находятся все четыре перехода, то сечение дается суммой правых частей (A.12)–(A.15). В результате выражение для сечения имеет общий поляризационный фактор ($|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*|^2 + |\mathbf{A}|^2$). Таким образом, отношение сечений при $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$ равно единице.

В качестве конкретного примера рассчитаем сечения переходов $0 \to 0$ и $0 \to 1$ с учетом сильного взаимодействия частиц. Прежде всего, необходимо найти орбитальные функции $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\Xi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, что требует решения соответствующих уравнений Шредингера. Поведение двух взаимодействующих электронов в квантовом кольце изучалось в работах [19, 20]. Электроны формируют вигнеровскую молекулу, которая вращается как целое и совершает относительное колебательное движение около положения равновесия, когда угловое расстояние между электронами равно π, где потенциал (13) имеет минимум. Разлагая потенциал в окрестности минимума, получаем одномерное уравнение осциллятора. Таким образом, волновые функции относительного движения двухэлектронной системы в кольце есть осцилляторные функции. Это «осцилляторное» приближение опирается на малость колебательной энергии по сравнению с типичной кулоновской энергией. В приближении сильной связи двухэлектронная волновая функция записывается в виде решеточной суммы (1D-решетка с периодом 2π), в которой в роли «атомной» функции выступает осцилляторная функция от $(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma_n)$

$$\Phi_{L,j,k}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\exp(iL(\varphi_1 + \varphi_2)/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \times \\ \times \sum_n \exp(ik\gamma_n)\eta_j\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma_n}{\xi}\right). \quad (34)$$

Здесь $\gamma_n = \pi(2n+1)$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$), k — волновое число, L — угловой момент двухэлектронной системы, $\eta_j(t)$ — осцилляторная функция, j — осцилляторное квантовое число,

$$\xi = 2(a_e/R)^{1/4}, \quad \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{e^2/\kappa m_e R^3},$$

$a_e = \kappa/(m_e e^2)$ — электронный боровский радиус. В приближении сильной связи $(a_e/R) \ll 1$, $\xi \ll 1$.

Энергия двухэлектронной системы равна

$$\mathcal{E} = W_e(L + 2\bar{\Phi})^2/2 + \Omega(j + 1/2), \quad \Omega = 2/(m_e \xi^2 R^2).$$

Из требования периодичности полной волновой функции (34) по углам φ_1, φ_2 с периодом 2π следует соотношение $L/2 + k = N$, где N — целое число. Заметим, что для синглетного состояния двухэлектронной системы ($\Sigma = 0$) L и j имеют одинаковую четность, а для триплетного состояния ($\Sigma = 1$) L и j имеют противоположную четность.

При рассмотрении четырехчастичного комплекса удобно перейти к новым переменным:

$$\begin{gathered} \Theta = \frac{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)m_e + \varphi_4 m_h}{3m_e + m_h}, \\ \alpha = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} - \varphi_4, \quad \beta = \varphi_2 - \varphi_3, \\ \gamma = \varphi_1 - \frac{(\varphi_2 + \varphi_3)m_e + \varphi_4 m_h}{2m_e + m_h}. \end{gathered} \quad (35)$$

Полную волновую функцию такой системы в новых переменных можно представить в виде

$$\Xi(\alpha,\beta,\gamma,\Theta)=\frac{e^{(i\tilde{L}\Theta)}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i(\Lambda\alpha+\tilde{\Lambda}\gamma)}\chi(\alpha,\beta,\gamma), \qquad (36)$$

где $e^{(i\tilde{L}\Theta)}/\sqrt{2\pi}$ — волновая функция движения центра масс, $\tilde{L}$ — угловой момент четырехчастичного комплекса. Энергия центра масс

$$E^{cm}=W_4(\tilde{L}+2\bar{\Phi})^2,$$

где

$$W_4=1/2R^2(M+m_e),$$
$$\tilde{\Lambda}=-\bar{\Phi}(1-2d_e),\quad \Lambda=-2\bar{\Phi}(1-c_e),$$
$$d_e=m_e/(M+m_e).$$

Заметим, что введение в (36) экспоненциального множителя $e^{i(\Lambda\alpha+\tilde{\Lambda}\gamma)}$ приводит к независимости χ от магнитного потока.

Волновая функция $\chi(\alpha,\beta,\gamma)$ удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$-\left(\frac{1}{2}W_e+W_h\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha^2}-2W_e\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}-(W_e+W_{tr})\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}+ +U(\alpha,\beta,\gamma)\chi=E^{rel}\chi, \qquad (37)$$

$$U(\alpha,\beta,\gamma)=V(\beta)-V\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-V\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)- -V\left(\gamma+\frac{2m_e\alpha}{M}\right)+\sum_{\pm}V\left(\gamma\pm\frac{\beta}{2}-\frac{m_h\alpha}{M}\right). \qquad (38)$$

Здесь E^{rel} — энергия относительного движения в четырехчастичной системе. Полная энергия четырехчастичного комплекса $E=E^{cm}+E^{rel}$. Поскольку $U(\alpha,\beta,\gamma)$ периодическая функция α,β,γ, $\chi(\alpha,\beta,\gamma)$ является блоховской в пространстве α,β,γ с трехмерной решеткой, базисные векторы которой $\mathbf{e}_i$ могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{1,3}&=\pi\left(\boldsymbol{\alpha}_0\pm2\boldsymbol{\beta}_0+2\boldsymbol{\gamma}_0\left(1-c_e\right)\right),\\ \mathbf{e}_2&=2\pi\left(\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\gamma}_0(1-2c_e)\right),\end{aligned} \qquad (39)$$

где $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\gamma}_0$ — орты осей α, β, γ.

Аналогично (15), периодичность полной волновой функции (36) по углам ($\varphi_i, i=1,2,3,4$) с периодом 2π дает следующие соотношения:

$$\begin{gathered}d_e\tilde{L}+\tilde{\Lambda}+p_3=N_1,\\ d_e\tilde{L}+\Lambda/2-c_e\tilde{\Lambda}+p_1/2\pm p_2-c_ep_3=N_{2,3},\\ (1-3d_e)\tilde{L}-\Lambda-(1-2c_e)\tilde{\Lambda}-p_1-(1-2c_e)p_3=N_4.\end{gathered} \qquad (40)$$

Здесь N_1, N_2, N_3, N_4 — целые числа, $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$ — квазиимпульс. Из выражения (40) следует, что угловой момент четырехчастичного комплекса $\tilde{L}$ — целое число.

Для блоховской функции относительного движения на 3D-решетке в приближении сильной связи решение ищем в виде

$$\chi(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{\mathbf{n}}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a_n})\times \times f(\alpha-\mathbf{a_n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_0,\beta-\mathbf{a_n}\cdot\boldsymbol{\beta}_0,\gamma-\pi-\mathbf{a_n}\cdot\boldsymbol{\gamma}_0), \qquad (41)$$

где $f(\alpha,\beta,\gamma)$ — узловая функция, $\mathbf{a_n}$ — вектор 3D-решетки ($\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$, n_i — целые числа),

$$\mathbf{a_n}=\sum_{i=1}^{3}n_i\mathbf{e}_i.$$

В кольце три частицы (два электрона и дырка) могут сблизиться и образовать связанное состояние (отрицательно заряженный трион), а оставшийся электрон, благодаря кулоновскому отталкиванию, стремится максимально удалиться (на угловое расстояние приблизительно равное π) от триона. Поэтому приближенно в качестве «атомной» (узельной) функции $f(\alpha,\beta,\gamma)$ можно использовать произведение узельной функции триона на осцилляторную функцию, описывающую относительное движение электрона с массой m_e и триона как отрицательно заряженной частицы с массой M. Тогда $\chi(\alpha,\beta,\gamma)$ приобретает вид:

$$\chi(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{\mathbf{n}}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a_n})\times \times f_{tr}(\alpha-\mathbf{a_n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_0,\beta-\mathbf{a_n}\cdot\boldsymbol{\beta}_0)\eta_l\left(\frac{\gamma-\pi-\mathbf{a_n}\cdot\boldsymbol{\gamma}_0}{\tilde{\xi}}\right)\frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}}}, \qquad (42)$$

где $\tilde{\xi}=(8\kappa/e^2R\tilde{\mu})^{1/4}$, $f_{tr}(\alpha,\beta)$ — узловая функция триона, l — номер осцилляторного уровня ($l=0,1,2,\ldots$). Энергия относительного движения четырехчастичного комплекса равна

$$E^{rel}=\tilde{\Omega}(l+1/2)+\varepsilon_{\tilde{L}}^{int}(\bar{\Phi}),$$

где $\varepsilon_{\tilde{L}}^{int}(\bar{\Phi})$ — внутренняя энергия триона,

$$\tilde{\Omega}=\sqrt{e^2/8\kappa R^3\tilde{\mu}},\quad \tilde{\mu}=m_eM/(m_e+M).$$

Далее найдем амплитуды неупругого резонансного рассеяния для случая перехода через промежуточное состояние, являющееся симметричным дублетом с орбитальной функцией $\Xi^{(2)}$. В этом случае выражения для амплитуд рассеяния при переходах $\Sigma = 0 \to \Sigma' = 0$ и $\Sigma = 0 \to \Sigma' = 1$ имеют вид

$$\Gamma^{(0\to 0)}_{L'j';Lj} = \frac{e^2P^2}{9c^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\times \times\sum_{\tilde{L},l}\frac{B^{(2)}_{L'j';\tilde{L}l}(\mathbf{q}_2)B^{(2)*}_{Lj;\tilde{L}l}(\mathbf{q}_1)}{Z^{(0,1/2;2)}_{Lj;\tilde{L}l}}, \quad (43)$$

$$\Gamma^{(0\to 1)}_{L'j';Lj;\mu'} = \frac{ie^2P^2}{9c^2}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}_{\mu'})\times \times\sum_{\tilde{L},l}\frac{C^{(2)}_{L'j';\tilde{L}l}(\mathbf{q}_2)B^{(2)*}_{Lj;\tilde{L}l}(\mathbf{q}_1)}{Z^{(0,1/2;2)}_{Lj;\tilde{L}l}}. \quad (44)$$

Используя в качестве f_{tr} в выражении (42) вариационную функцию (17), получаем

$$B^{(2)}_{L'j';\tilde{L}l}(\mathbf{q}) = J_{L'-\tilde{L}}(q)\exp\left(i\left(\theta_q+\frac{\pi}{2}\right)(\tilde{L}-L')\right)\times \times\frac{4a^2}{a^2+g^2_{L',\tilde{L}}}G_{L'j';\tilde{L}l}, \quad (45)$$

где L', j' имеют одинаковую четность. Величина $C^{(2)}_{L'j';\tilde{L}l}(\mathbf{q})$ дается тем же выражением, но теперь L', j' имеют различную четность. Для входящей в (45) величины $G_{L'j';\tilde{L}l}$ имеем

$$G_{L'j';\tilde{L}l} = 2\sqrt[4]{4u_1u_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\gamma\exp\left(ih_{L',\tilde{L}}\,\gamma\right)\times \times\eta_{j'}\left(\sqrt{2u_1}(\gamma-\pi)\right)\eta_l\left(\sqrt{2u_2}(\gamma-\pi)\right). \quad (46)$$

Здесь

$$u_1 = 1/(2\xi^2),\quad u_2 = 1/(2\tilde{\xi}^2),\quad u_2 = vu_1,\quad v\sim 1,$$
$$g_{L',\tilde{L}}(\bar{\Phi}) = d_e\tilde{L}+\Lambda/2-c_e\tilde{\Lambda}-L'/2;$$
$$h_{L',\tilde{L}}(\bar{\Phi}) = d_e\tilde{L}+\tilde{\Lambda}-L'/2.$$

Учтено, что функции η_l и $\eta_{j'}$ локализованы вблизи $\gamma\approx\pi$, так как $u_{1,2}\gg 1$ $(\xi\sim\tilde{\xi}\sim(a_B/R)^{1/4}\ll 1)$.

Амплитуду рассеяния для переходов из основного состояния двухэлектронного кольца с $L = j = 0$ через симметричное дублетное состояние $(t = 2)$ с квантовыми числами $\tilde{L} = l = 0$ в конечное состояние (L', j') можно окончательно представить в виде

$$\Gamma^{(\Sigma=0\to\Sigma'=0)}_{L'j';00} = \frac{4e^2P^2}{9c^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\frac{\exp\left(-iL'(\pi/2+\theta_{q_2})\right)}{Z^{(0,1/2;2)}}\times \times J_{L'}(q_2)J_0(q_1)\frac{a^4}{(a^2+g^2_{L',0})(a^2+g^2_{0,0})}\times \times G_{L'j';00}G^*_{00;00}, \quad (47)$$

где L' и j' имеют одинаковую четность. Выражение для $\Gamma^{(\Sigma=0\to\Sigma'=1)}_{L'j'\mu';00}$ дается формулой (47) с заменой $(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\to(i\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}_{\mu'})$, но для этого перехода L' и j' имеют разную четность. Нетрудно показать, что, как и в случае одноэлектронного кольца, имеют место периодичность выражения (47) как функции магнитного потока Φ с периодом Φ_0 и ее четность относительно Φ. Таким образом, зависимость сечений от магнитного потока достаточно рассматривать в интервале $0<\Phi\le\Phi_0/2$.

Итак, в работе на примере квантового кольца показано, что учет кулоновского взаимодействия в промежуточном состоянии при неупругом рассеянии света в наноструктурах качественно меняет результаты. Расщепление уровней по полному спину промежуточного комплекса приводит к своеобразной «тонкой структуре» линии рассеянного излучения, причем различные ее компоненты характеризуются разными поляризационными зависимостями. Разумеется, для наблюдения этих эффектов резонанс должен быть достаточно острым: узкая линия возбуждающей волны и малая ширина уровней энергии многочастичного комплекса. Наименьший интервал между этими уровнями имеет масштаб вращательного кванта $\hbar^2/m^*R^2 \sim 0.25$ мэВ (R — радиус кольца) для $R = 50$ нм, $m^* = 0.1m_0$, что и определяет допустимое уширение уровней.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках программы фундаментальных исследований СОРАН (0306-2015-0017).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приводим вывод общих выражений для сечения рассеяния в двухэлектронном квантовом кольце. Используя (24)–(28), матричный элемент перехода между конечным и промежуточным состояниями можно представить следующим образом:

$$\langle F|\sum_i\{\mathbf{v}_i,e^{-i\mathbf{q}_2\mathbf{r}_i}\}\mathbf{e}_2^*|M\rangle = \frac{iP}{\sqrt{6}}\times \times\Big(\delta_{\Sigma',1}\delta_{S,3/2}D_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})[e^*_{2z}c_{\nu,\lambda,\mu'}+(\lambda e^*_{2x}-ie^*_{2y})c_{\nu,-\lambda,\mu'}]+ +\delta_{\Sigma',0}\delta_{S,1/2}\Big(N^{(1)}_\gamma\sqrt{3}C^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})\delta_{t,1}-N^{(2)}_\gamma B^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})\delta_{t,2}\Big)\times \times[e^*_{2z}b_{\nu,\lambda,\mu'}+(\lambda e^*_{2x}-ie^*_{2y})b_{\nu,-\lambda,\mu'}]+\sqrt{2/3}\delta_{\Sigma',1}\delta_{S,1/2}\times \times\Big(N^{(1)}_\gamma B^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})\delta_{t,1}+N^{(2)}_\gamma\sqrt{3}C^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})\delta_{t,2}\Big)\times \times[e^*_{2z}a_{\nu,\lambda,\mu'}+(\lambda e^*_{2x}-ie^*_{2y})a_{\nu,-\lambda,\mu'}]\Big). \quad (A.1)$$

Величины a, b, c даются выражениями

$$a_{\nu,\lambda,\mu} = \sum_{\pm} \delta_{\nu,\pm 1/2} \left(\delta_{\mu,\pm 1}\delta_{\lambda,\mp 1} - \frac{\delta_{\mu,0}}{\sqrt{2}}\delta_{\lambda,\pm 1} \right),$$
$$b_{\nu,\lambda,\mu} = \delta_{\mu,0}(\delta_{\lambda,+1}\delta_{\nu,+1/2} - \delta_{\lambda,-1}\delta_{\nu,-1/2}),$$
$$c_{\nu,\lambda,\mu} = \sum_{\pm} \delta_{\nu,\pm 3/2}\delta_{\mu,\pm 1}\delta_{\lambda,\pm 1} + \tag{A.2}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\pm} \delta_{\nu,\pm 1/2} \left(\delta_{\mu,\pm 1}\delta_{\lambda,\mp 1} + \sqrt{2}\delta_{\mu,0}\delta_{\lambda,\pm 1} \right).$$

Матричный элемент перехода между промежуточным и начальным состояниями получается из комплексно-сопряженного выражения (A.1) с заменой $\mathbf{q}_2 \to \mathbf{q}_1$, $\mathbf{e}_2 \to \mathbf{e}_1$, $\alpha' \to \alpha$, $\Sigma' \to \Sigma$. Входящие в формулу (A.1) величины D, C, B даются интегралами

$$D_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^{(as)*}_{\alpha'}(\varphi_1,\varphi_2)\Xi^{(as)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) \times \delta(\varphi_3-\varphi_4)\exp\left(-i(\mathbf{q}\mathbf{r}_3)\right)d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4, \tag{A.3}$$

$$C^{(t)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\Phi^{(s)}_{\alpha'}(\varphi_1,\varphi_2)\delta_{t,1} + \Phi^{(as)}_{\alpha'}(\varphi_1,\varphi_2)\delta_{t,2}\right)^* \times \Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\delta(\varphi_3-\varphi_4) \times \exp\left(-i(\mathbf{q}\mathbf{r}_3)\right)d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4, \tag{A.4}$$

$$B^{(t)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\Phi^{(as)}_{\alpha'}(\varphi_1,\varphi_2)\delta_{t,1} + \Phi^{(s)}_{\alpha'}(\varphi_1,\varphi_2)\delta_{t,2}\right)^* \times \left(\Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) - \Xi^{(t)}_{\gamma}(\varphi_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4)\right) \times \delta(\varphi_3-\varphi_4)\exp\left(-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_3)\right)d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4. \tag{A.5}$$

Здесь

$$\exp\left(-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_3)\right) = \exp\left(-iqR\cos(\varphi_3-\theta_q)\right).$$

Существуют четыре типа переходов по полному спину начального и конечного состояний при рассеянии: триплет $\to$ триплет; синглет $\to$ синглет; синглет $\to$ триплет; триплет $\to$ синглет. Для амплитуд рассеяния $\Gamma^{(\Sigma\to\Sigma')}$ были получены следующие выражения:

$$\Gamma^{(1\to1)}_{\alpha',\mu';\alpha,\mu} = \frac{e^2P^2}{9c^2} \times \sum_{\gamma}\left(\frac{2D_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})D^*_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(1;3/2)}_{\alpha\gamma}} \left[(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\delta_{\mu',\mu} + \frac{i}{2}\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mu',\mu}\right] + \left(\frac{(N^{(1)}_{\gamma})^2 B^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(1;1/2,1)}_{\alpha\gamma}} + \frac{3(N^{(2)}_{\gamma})^2 C^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(1;1/2,2)}_{\alpha\gamma}} \right) \times \left[(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\delta_{\mu',\mu} - i\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mu',\mu}\right] \right), \tag{A.6}$$

$$\Gamma^{(0\to0)}_{\alpha',\mu';\alpha,\mu} = \frac{e^2P^2}{3c^2}\sum_{\gamma}\left(\frac{(N^{(2)}_{\gamma})^2 B^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(0;1/2,2)}_{\alpha\gamma}} + \frac{3(N^{(1)}_{\gamma})^2 C^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(0;1/2,1)}_{\alpha\gamma}} \right) \times (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)\delta_{\mu'0}\delta_{\mu0}, \tag{A.7}$$

$$\Gamma^{(0\to1)}_{\alpha',\mu';\alpha,\mu} = \frac{-ie^2P^2}{3c^2} \times \sum_{\gamma}\left(\frac{(N^{(1)}_{\gamma})^2 B^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(0;1/2,1)}_{\alpha\gamma}} - \frac{(N^{(2)}_{\gamma})^2 C^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(0;1/2,2)}_{\alpha\gamma}} \right)(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{\mu'})\delta_{\mu0}, \tag{A.8}$$

$$\Gamma^{(1\to0)}_{\alpha',\mu';\alpha,\mu} = \frac{-ie^2P^2}{3c^2} \times \sum_{\gamma}\left(\frac{(N^{(1)}_{\gamma})^2 C^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(1;1/2,1)}_{\alpha\gamma}} - \frac{(N^{(2)}_{\gamma})^2 B^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z^{(1;1/2,2)}_{\alpha\gamma}} \right)(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{\mu})\delta_{\mu'0}. \tag{A.9}$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\hat{\Sigma}_x,\ \hat{\Sigma}_y,\ \hat{\Sigma}_z)$ — вектор матриц спина 1, $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{R}_x,\ \hat{R}_y,\ \hat{R}_z)$ — спинорный вектор:

$$(\hat{\Sigma}_x)_{\mu'\mu} = \frac{\delta_{\mu',0}(1-\delta_{\mu,0}) + \delta_{\mu,0}(1-\delta_{\mu',0})}{\sqrt{2}},$$
$$(\hat{\Sigma}_y)_{\mu'\mu} = \frac{i(\mu\delta_{\mu'0} - \mu'\delta_{\mu0})}{\sqrt{2}},$$
$$(\hat{\Sigma}_z)_{\mu'\mu} = \mu\delta_{\mu'\mu}, \quad (\hat{R}_x)_{\mu} = \frac{-\mu}{\sqrt{2}}, \tag{A.10}$$
$$(\hat{R}_y)_{\mu} = \frac{i(1-\delta_{\mu,0})}{\sqrt{2}}, \quad (\hat{R}_z)_{\mu} = \delta_{\mu,0}.$$

Для переходов через промежуточное состояние с $S = 3/2$ энергетический знаменатель имеет вид

$$Z_{\alpha,\gamma}^{(\Sigma;S=3/2)} = \mathcal{E}_\alpha^{(\Sigma)} - E_\gamma^{(3/2)} + \omega_1, \qquad (\mathrm{A}.11)$$

а для переходов через состояния с $S = 1/2$ энергетический знаменатель получается из (A.11) заменой $(3/2) \to (1/2, t)$. Здесь индексы в скобках соответствуют полному спину начального и промежуточного состояний с энергиями $\mathcal{E}_\alpha^{(\Sigma)}$, $E_\gamma^{(3/2)}$ или $E_\gamma^{(1/2,t)}$.

Заметим, что промежуточное состояние с энергией E_γ из-за обменного взаимодействия расщепляется на три подуровня: $E_\gamma^{(3/2)}$, $E_\gamma^{(1/2,1)}$, $E_\gamma^{(1/2,2)}$. В принципе это дает возможность наблюдать процесс рассеяния через определенное промежуточное состояние.

Сечения рассеяния для рассмотренных выше переходов, просуммированные по проекциям спина μ, μ', даются формулами

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega\, d\Omega}^{(1\to1)} = \frac{e^4P^4}{81c^4}\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\left|\sum_\gamma\left[2\frac{D_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})D^*_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;3/2)}} + \left(\frac{(N_\gamma^{(1)})^2B^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;1/2,1)}} + \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{3(N_\gamma^{(2)})^2C^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;1/2,2)}}\right)\right]\right|^2 3|\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*|^2 + \left|\sum_\gamma\left[\frac{D_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})D^*_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;3/2)}} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left(\frac{(N_\gamma^{(1)})^2B^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;1/2,1)}} + \frac{3(N_\gamma^{(2)})^2C^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;1/2,2)}}\right)\right]\right|^2 2|\mathbf{A}|^2\right)\delta\left(\mathcal{E}_{\alpha'}^{(1)} - \mathcal{E}_\alpha^{(1)} - \omega\right), \qquad (\mathrm{A}.12)$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega\, d\Omega}^{(0\to0)} = \frac{e^4P^4}{9c^4}\frac{\omega_2}{\omega_1}\left|\sum_\gamma\left[\frac{(N_\gamma^{(2)})^2B^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(0;1/2,2)}} + \frac{3(N_\gamma^{(1)})^2C^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(0;1/2,1)}}\right]\right|^2 \times$$
$$\times |\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*|^2\delta\left(\mathcal{E}_{\alpha'}^{(0)} - \mathcal{E}_\alpha^{(0)} - \omega\right), \qquad (\mathrm{A}.13)$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega\, d\Omega}^{(0\to1)} = \frac{e^4P^4}{9c^4}\frac{\omega_2}{\omega_1}\left|\sum_\gamma\left[\frac{(N_\gamma^{(1)})^2B^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(0;1/2,1)}} - \frac{(N_\gamma^{(2)})^2C^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(0;1/2,2)}}\right]\right|^2 \times$$
$$\times |\mathbf{A}|^2\delta\left(\mathcal{E}_{\alpha'}^{(1)} - \mathcal{E}_\alpha^{(0)} - \omega\right), \qquad (\mathrm{A}.14)$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega\, d\Omega}^{(1\to0)} = \frac{e^4P^4}{9c^4}\frac{\omega_2}{\omega_1}\left|\sum_\gamma\left[\frac{(N_\gamma^{(1)})^2C^{(1)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})B^{(1)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;1/2,1)}} - \frac{(N_\gamma^{(2)})^2B^{(2)}_{\alpha'\gamma}(\mathbf{q_2})C^{(2)*}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q_1})}{Z_{\alpha\gamma}^{(1;1/2,2)}}\right]\right|^2 \times$$
$$\times |\mathbf{A}|^2\delta\left(\mathcal{E}_{\alpha'}^{(0)} - \mathcal{E}_\alpha^{(1)} - \omega\right). \qquad (\mathrm{A}.15)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Пинзак, Е. Бурштейн, в сб. *Рассеяние света в твердых телах*, под ред. М. Кардона, Мир, Москва (1979), вып. I, с. 38.

2. М. В. Клейн, в сб. *Рассеяние света в твердых телах*, под ред. М. Кардона, Мир, Москва (1979), вып. I, с. 174.

3. В. П. Макаров, ЖЭТФ **55**, 704 (1968).

4. Y. Yafet, Phys. Rev. **152**, 858 (1966).

5. F. A. Blum, Phys. Rev. B **1**, 1125 (1970).

6. F. T. Vasko and O. E. Raichev, *Quantum Kinetic Theory and Applications. Electrons, Photons, Phonons*, Springer-Verlag New York Inc., New York (2005).

7. E. L. Ivchenko, *Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures*, Alpha Science, Harrow, U.K. (2005).

8. Г. Абстрейтер, М. Кардона, А. Пинчук, в сб. *Рассеяние света в твердых телах*, под ред. М. Кардона, Мир, Москва (1986), вып. IV, с. 12.

9. P. Y. Yu, Phys. Rev. B **20**, 5286 (1979).

10. P. Y. Yu and L. M. Falicov, Phys. Rev. B **24**, 1144 (1981).

11. D. G. Thomas and J. J. Hopfield, Phys. Rev. **175**, 1021 (1968).

12. D. G. Thomas and J. J. Hopfield, Phys. Rev. **128**, 2135 (1962).

13. D. Munz and M. H. Pilkuhn, Sol. State Comm. **36**, 205 (1980).

14. R. I. Feigenblatt, Phys. Rev. B **32**, 8092 (1985).

15. Е. Л. Ивченко, ФТТ **39**, 477 (1992).

16. Р. З. Витлина, Л. И. Магарилл, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **102**, 775 (2015).

17. М. А. Семина, Р. А. Сергеев, Р. А. Сурис, ФТП **42**, 1459 (2008).

18. A. V. Chaplik and V. M. Kovalev, in *Physics of Quantum Rings*, Springer-Verlag, New York Inc., New York (2014), p. 221; A. V. Chaplik, Phys. Low-Dim. Struct. **9/10**, 131 (1999), ЖЭТФ **119**, 193 (2001).

19. L. Wendler, V. M. Fomin, A. V. Chaplik, and A. O. Govorov, Phys. Rev. B **54**, 4794 (1996).

20. L. Wendler, V. M. Fomin, A. V. Chaplik, and A. O. Govorov, Z. Phys. B **100**, 211 (1996).