

ПЕРЕХОДЫ ХОЛЕСТЕРИК–НЕМАТИК, ИНДУЦИРОВАННЫЕ СДВИГОВЫМ ПОТОКОМ И МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

*А. Н. Захлевных**, *Д. В. Макаров*, *А. А. Новиков*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2017 г.

Теоретически изучено раскручивание спиральной структуры холестерического жидкого кристалла под действием магнитного поля и сдвигового течения. Оба фактора способны индуцировать переход холестерик–нематик независимо друг от друга, однако различие ориентирующих воздействий магнитного поля и сдвигового потока приводит к конкуренции между магнитными и гидродинамическими механизмами влияния на холестерический жидкий кристалл. Проанализированы различные ориентации магнитного поля относительно направления течения в плоскости сдвига. В ряде предельных случаев получены аналитические зависимости для шага холестерической спирали, деформированной сдвиговым течением. Рассчитаны фазовые диаграммы переходов холестерик–нематик и шаг холестерической спирали для различных значений напряженности и угла ориентации магнитного поля, градиента скорости течения и реактивного параметра. Показано, что магнитное поле, стабилизируя ориентацию директора в сдвиговом потоке, расширяет границы области ориентируемости холестериков. Установлено, что сдвиговое течение приводит к смещению критического значения напряженности магнитного поля перехода. Показано, что поворотом магнитного поля в определенных интервалах значений напряженности поля и градиента скорости сдвигового течения можно индуцировать последовательность возвратных ориентационных переходов холестерик–нематик–холестерик.

DOI: 10.7868/S0044451017100157

1. ВВЕДЕНИЕ

Наличие спонтанного ориентационного порядка хиральных молекул, организующих спиральную структуру в холестерических жидких кристаллах (ХЖК), придает последним такие уникальные оптические свойства, как селективное отражение света и сильное вращение его плоскости поляризации внутри жидкокристаллического образца, которые широко используются в различных инженерных устройствах и приложениях (дисплеях, термометрах, оптических носителях, датчиках и т. д.) [1–3]. Этими свойствами можно управлять путем обратимого изменения шага спирали холестерика при помощи полей различной природы.

Например, включение магнитного (электрического) поля перпендикулярно оси спирали ХЖК, обладающего положительной диамагнитной (диэлектрической) анизотропией, вызывает поворот

молекул холестерика в направлении поля, деформируя его спиральную структуру. Увеличение напряженности поля приводит к росту шага спирали и обращению его в бесконечность при некотором критическом значении поля, что отвечает фазовому переходу холестерик–нематик [4, 5].

Наряду с этим известно, что гидродинамические течения жидких кристаллов (ЖК) существенно влияют на формируемые в них ориентационные структуры [1]. Так, поведение нематического жидкого кристалла (НЖК) в сдвиговом потоке зависит от величины реактивного параметра λ [1–3]. Если $\lambda \geq 1$, то в потоке с постоянным градиентом скорости молекулы НЖК ориентируются под некоторым углом к скорости потока (углом Лесли). Такие ЖК называют ориентируемыми течением. При $0 < \lambda < 1$ постоянный ориентационный порядок в сдвиговом потоке нематика не устанавливается, что отвечает ЖК, не ориентируемым течением.

Указанные выше границы между ориентируемыми и неориентируемыми ЖК могут измениться при дополнительном воздействии на систему. Известно, что наличие внешнего магнитного [6–9] или элект-

* E-mail: anz@psu.ru

рического [10, 11] поля оказывает стабилизирующее влияние на ориентационную структуру нематика, подверженного сдвиговому течению. В результате происходит расширение области ориентируемости, поэтому сдвиговым потоком становится возможным ориентировать нематики даже с реактивным параметром $\lambda < 1$.

В ХЖК сдвиговое течение приводит к различным деформациям их надмолекулярной структуры [12–16]. Как показано в работах [17–19], сдвиговым течением можно раскрутить спиральную структуру ориентируемого ($\lambda \geq 1$) ХЖК, вызвав переход холестерик–нематик. Совместное действие осциллирующего сдвигового потока и электрического поля индуцирует переходы между различными ориентационными текстурами холестерика [20]. Критические параметры перехода холестерик–нематик в сдвиговом потоке и магнитном поле впервые были вычислены в работе [21].

В настоящей работе решается задача о совместном конкурирующем воздействии сдвигового потока и магнитного поля на ориентационную структуру холестерика. Исследуются условия раскручивания спирали при различных значениях реактивного параметра и ориентациях магнитного поля в плоскости сдвига.

2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Рассмотрим сдвиговое течение со скоростью $\mathbf{v} = [0, u(x), 0]$ в неограниченном ХЖК, ось спирали которого ориентирована вдоль оси z ортогонально плоскости сдвига xy (рис. 1).

Величину градиента скорости сдвигового потока $A = du(x)/dx$ будем считать постоянной во всем образце. Как известно [2], такое течение приводит к упорядочению молекул ЖК в плоскости сдвига под некоторым углом φ_0 относительно направления потока. В рассматриваемой системе координат угол Лесли φ_0 определяется соотношением [7]

$$\cos 2\varphi_0 = -\frac{1}{\lambda}, \quad (1)$$

где $\lambda = -\gamma_2/\gamma_1$ – реактивный параметр, γ_i – коэффициенты вращательной вязкости ЖК ($\lambda > 0$ в ЖК, образованном палочкообразными молекулами [2]).

Ортогонально оси спирали холестерика под некоторым углом φ_H в плоскости сдвига xy приложим магнитное поле $\mathbf{H} = H(\cos \varphi_H, \sin \varphi_H, 0)$. Анизотропию диамагнитной восприимчивости χ_a ЖК будем

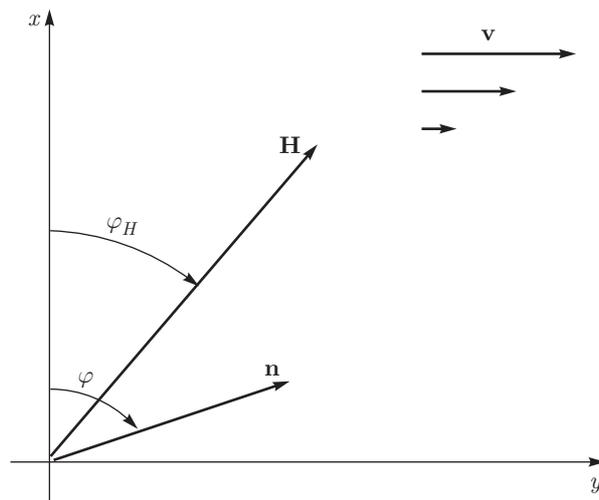


Рис. 1. Ориентация ХЖК в магнитном поле и сдвиговом потоке

считать положительной, поэтому директор \mathbf{n} стремится ориентироваться по полю, тогда магнитное поле и сдвиговое течение оказывают конкурирующее действие на холестерик. Каждое из этих воздействий ориентирует директор холестерика в своем направлении в плоскости xy , вызывая раскручивание его спиральной ориентационной структуры.

Для описания динамики ориентационной структуры ХЖК воспользуемся континуальной теорией Эриксона и Лесли [2], в которой уравнение движения и условие несжимаемости записываются следующим образом:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \nabla_k \sigma_{ki}, \quad (2)$$

$$\nabla_i v_i = 0, \quad (3)$$

где ρ , v_i и $\sigma_{ki} = \sigma'_{ki} + \sigma_{ki}^{(e)}$ – плотность, скорость и тензор напряжений ЖК; $d/dt = \partial/\partial t + v_k \nabla_k$ – полная производная по времени. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся тензорным индексам.

Тензор вязких напряжений σ'_{ki} , входящий в σ_{ki} , имеет вид

$$\sigma'_{ki} = \alpha_1 n_k n_i n_l n_m A_{lm} + \alpha_2 n_k N_i + \alpha_3 n_i N_k + \alpha_4 A_{ki} + \alpha_5 n_k n_l A_{li} + \alpha_6 n_i n_l A_{lk}, \quad (4)$$

где α_s – коэффициенты вязкости Лесли [2], связанное соотношением Пароди $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_6 - \alpha_5$, n_i – директор ЖК. Вектор $N_i = dn_i/dt - \Omega_{ik} n_k$ определяет скорость изменения директора n_i относительно движущейся среды. Тензоры $A_{ik} = (\nabla_k v_i + \nabla_i v_k)/2$

и $\Omega_{ik} = (\nabla_k v_i - \nabla_i v_k)/2$ представляют собой симметричную и антисимметричную части тензора градиентов скоростей.

Тензор напряжений Эриксона $\sigma_{ki}^{(e)}$, входящий в σ_{ki} , определяется выражением

$$\sigma_{ki}^{(e)} = -P\delta_{ki} - \frac{\partial F_V}{\partial(\nabla_k n_i)} \nabla_i n_k, \quad (5)$$

где P — давление, δ_{ki} — символ Кронекера, F_V — объемная плотность свободной энергии холестерика в магнитном поле, которая имеет вид [2]

$$\begin{aligned} F_V &= F_1 + F_2, \\ F_1 &= \frac{1}{2} [K_{11}(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + q_0)^2 + \\ &\quad + K_{33}(\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2], \\ F_2 &= -\frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь K_{11} , K_{22} , K_{33} — константы Франка, q_0 — волновое число невозмущенной спиральной структуры ХЖК (для определенности будем считать его положительным).

Слагаемое F_1 в плотности свободной энергии (6) отвечает энергии ориентационно-упругих деформаций поля директора, вклад F_2 представляет собой объемную плотность энергии взаимодействия магнитного поля \mathbf{H} с ХЖК.

Уравнение движения директора n_i [2] имеет вид

$$h_i^{(n)} = \gamma_1 N_i + \gamma_2 n_k A_{ki}, \quad (7)$$

где $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ и $\gamma_2 = \alpha_3 + \alpha_2$ — коэффициенты вращательной вязкости ЖК. Молекулярное поле $h_i^{(n)}$, действующее на директор, определяется следующим образом:

$$h_i^{(n)} = -\frac{\partial F_V}{\partial n_i} + \nabla_k \frac{\partial F_V}{\partial(\nabla_k n_i)}.$$

Варьирование свободной энергии при вычислении молекулярного поля $h_i^{(n)}$, входящего в уравнение (7), необходимо проводить при дополнительном условии $\mathbf{n}^2 = 1$.

3. ХОЛЕСТЕРИК В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ И МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для однородного стационарного сдвигового потока с постоянным градиентом скорости A условие несжимаемости (3) выполняется тождественно, а уравнение движения (2) позволяет вычислить давление в системе. В рассматриваемой геометрии (см. рис. 1) директор можно искать в следующем виде:

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z), \sin \varphi(z), 0]. \quad (8)$$

Тогда объемная плотность свободной энергии холестерика (6) примет вид

$$F_V = \frac{K_{22}}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} - q_0 \right)^2 - \frac{\chi_a H^2}{2} \cos^2(\varphi - \varphi_H). \quad (9)$$

Уравнение (7) с учетом (8) приводит к следующему уравнению для угла $\varphi(z)$, описывающего ориентацию директора в магнитном поле и стационарном сдвиговом потоке:

$$\begin{aligned} K_{22} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{\chi_a H^2}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_H) + \\ + \frac{A}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 \cos 2\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем безразмерные величины

$$\zeta = q_0 z, \quad h = \frac{H}{H_q}, \quad u = \frac{A}{A_0}. \quad (11)$$

Здесь $\zeta = q_0 z$ — безразмерная координата, h — безразмерная напряженность магнитного поля. В качестве единицы измерения поля выбрана величина $H_q = q_0 \sqrt{K_{22}/\chi_a}$, полученная из сопоставления диамагнитного вклада F_2 в свободную энергию (6) и вклада энергии кручения F_1 . Эта величина определяет поле перехода холестерик–нематик $H_c = \pi H_q/2$ [2]. Параметр u является безразмерным значением градиента скорости сдвигового потока, в качестве единицы измерения которого выбрана величина $A_0 = K_{22} q_0^2 / |\gamma_2|$. Здесь коэффициент вращательной вязкости холестерика γ_2 взят по абсолютной величине, поскольку $\gamma_2 < 0$ для ЖК с палочкообразными молекулами [2].

Сделаем оценки безразмерных параметров (11). Полагая, согласно [1], $\chi_a \approx 10^{-7}$, $q_0 \approx 10^4$ см⁻¹, $K_{22} \approx 10^{-7}$ дин, $\gamma_1, \gamma_2 \approx 10^{-1}$ П и выбирая $A \approx 1$ с⁻¹, $H \approx 10^4$ Э, получаем $\zeta \approx 1$, $h \approx 1$ и $u \approx 10^{-2}$.

В терминах безразмерных величин (11) уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - \frac{h^2}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_H) + \frac{u}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \cos 2\varphi \right) = 0. \quad (12)$$

Это уравнение определяет стационарные значения угла ориентации директора в магнитном поле и однородном сдвиговом потоке с постоянным градиентом скорости. Его можно получить иначе, применяя подход, использованный в работах [17, 19, 22, 23]. Для этого введем эффективную плотность свободной энергии, которая в безразмерной форме (в еди-

ницах $K_{22}q_0^2$) может быть записана следующим образом:

$$F_{eff} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\zeta} - 1 \right)^2 - \frac{h^2}{2} \cos^2(\varphi - \varphi_H) - \frac{u}{2} \left(\sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{\lambda} \right). \quad (13)$$

Уравнение (12), определяющее угол φ ориентации директора как функцию напряженности h и угла ориентации φ_H магнитного поля, реактивного параметра λ и интенсивности сдвигового потока u , получается из условия минимума: $\delta F_{eff} / \delta \varphi = 0$.

Как отмечалось выше, холестерическую спираль можно раскрутить как магнитным полем [4, 5], так и сдвиговым потоком [17]. В первом случае при $H > H_c$ директор \mathbf{n} будет направлен вдоль поля \mathbf{H} , т. е. $\varphi = \varphi_H$. Во втором — в раскрученной фазе директор ориентируется сдвиговым течением под углом φ_0 , заданным соотношением (1).

Проанализируем совместное действие сдвигового течения и магнитного поля на спиральную структуру холестерика при различных направлениях поля в плоскости сдвига xy (см. рис. 1).

В раскрученной (нематической) фазе при наличии магнитного поля и сдвигового потока директор ориентируется во всем образце под некоторым углом φ_c , зависящим от напряженности h и угла ориентации φ_H магнитного поля, а также интенсивности сдвигового течения u и реактивного параметра λ . Значение φ_c находится из уравнения (12) и определяется соотношением

$$h_c^2 \sin 2(\varphi_c - \varphi_H) = u_c (1/\lambda + \cos 2\varphi_c), \quad (14)$$

где h_c и u_c — критические значения напряженности магнитного поля и величины градиента скорости сдвигового потока, при которых происходит раскручивание спирали холестерика. Из формулы (14) видно, что $\varphi_c = \varphi_H$ в отсутствие сдвигового течения, т. е. когда $u = 0$, а в отсутствие магнитного поля $\varphi_c = \varphi_0$, где φ_0 определено формулой (1).

Однократное интегрирование уравнения (12) дает

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \pm \sqrt{R}, \quad (15)$$

$$R = C - h^2 \cos^2(\varphi - \varphi_H) - u(\sin \varphi \cos \varphi + \varphi/\lambda).$$

Поскольку невозмущенной ($h = u = 0$) структуре холестерика отвечает $\varphi(z) = \zeta = q_0 z$ [1], при $q_0 > 0$ в уравнении (15) следует выбрать знак плюс. Константа интегрирования C , являющаяся функцией h ,

φ_H , u и λ , в отсутствие поля и сдвига должна равняться единице.

Найдем шаг p спирали холестерика. Интегрирование по периоду структуры $p/2$ соответствует изменению угла φ на π , поэтому

$$p = 2 \int_0^{p/2} d\zeta = 2 \int_{\varphi_c - \pi}^{\varphi_c} \left(\frac{d\zeta}{d\varphi} \right) d\varphi = 2 \int_{\varphi_c - \pi}^{\varphi_c} \frac{d\varphi}{\sqrt{R}}. \quad (16)$$

Здесь в качестве верхнего предела интегрирования удобно [17] выбрать φ_c — угол, под которым ориентирован директор в раскрученной (нематической) фазе.

Константа интегрирования C может быть найдена из условия минимума эффективной свободной энергии, приходящейся на один полувиток спиральной структуры:

$$F_{p/2} = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} F_{eff} d\zeta = \frac{2}{p} \int_{\varphi_c - \pi}^{\varphi_c} \sqrt{R} d\varphi - \frac{2\pi}{p} + \frac{1 - C}{2}.$$

Условие минимума $dF_{p/2}/dC = 0$ с учетом соотношений (15), (16) дает уравнение для C :

$$\int_{\varphi_c - \pi}^{\varphi_c} \sqrt{R} d\varphi = \pi. \quad (17)$$

Критическое значение C_c , соответствующее обращению шага спирали в бесконечность, может быть получено из уравнения (15). В раскрученной (нематической) фазе $d\varphi/d\zeta = 0$, поэтому

$$C_c = h_c^2 \cos^2(\varphi_c - \varphi_H) + u_c (\sin \varphi_c \cos \varphi_c + \varphi_c/\lambda).$$

Подставляя C_c в (17), получим уравнение

$$\int_{\varphi_c - \pi}^{\varphi_c} \sqrt{R(C_c)} d\varphi = \pi, \quad (18)$$

$$R(C_c) = h_c^2 [\cos^2(\varphi_c - \varphi_H) - \cos^2(\varphi - \varphi_H)] + u_c [\sin \varphi_c \cos \varphi_c - \sin \varphi \cos \varphi + (\varphi_c - \varphi)/\lambda],$$

определяющее совместно с условием (14) критические значения u_c и h_c , отвечающие переходу холестерик-нематик.

Уравнение (14), определяющее угол φ_c при раскручивании спиральной структуры холестерика, совпадает с полученным в работе [7] для угла ориентации директора нематика в сдвиговом потоке и магнитном поле. Это уравнение имеет решения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_c &= \frac{-\cos 2\varphi_H \pm Q}{U - U/\lambda + \sin 2\varphi_H}, \\ Q &= \sqrt{1 + U^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2U \sin 2\varphi_H}, \\ U &= u_c/h_c^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Устойчивым по отношению к малым возмущениям является решение со знаком плюс [7]. Из соотношения (19) видно, что при раскручивании спирали магнитным полем ($U = 0$) критический угол ориентации директора определяется только направлением приложенного поля: $\varphi_c = \varphi_H$. При раскручивании спирали сдвиговым течением ($U = \infty$) из (19) получаем выражение

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \sqrt{(\lambda + 1)/(\lambda - 1)},$$

откуда видно, что в отсутствие магнитного поля при $\lambda < 1$ подкоренное выражение становится отрицательным и вещественные решения для φ_c исчезают. Однако включение магнитного поля приводит к появлению дополнительных вкладов в (19), которые могут компенсировать отрицательные слагаемые в подкоренном выражении, уменьшая допустимые значения λ для режима ориентирования холестерика сдвиговым потоком. Минимально возможное значение реактивного параметра λ в этом случае находится из условия $Q = 0$. Таким образом, постоянное направление директора в сдвиговом потоке и магнитном поле устанавливается для холестериков при

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{U^2}{1 + U^2 + 2U \sin 2\varphi_H}}. \quad (20)$$

На рис. 2 показана поверхность, определяемая формулой (20), которая отделяет ориентируемые течениям ЖК от неориентируемых при наличии магнитного поля в пространстве параметров $\lambda-U-\varphi_H$. Область над поверхностью соответствует ориентируемым ЖК, область под поверхностью — неориентируемым ЖК. Видно, что при наличии магнитного поля значение реактивного параметра, допускающее раскручивание спиральной структуры, может быть меньше, чем в случае ориентирования ЖК только сдвиговым потоком (см. формулу (1)), т. е. допустимы величины $\lambda < 1$. Уменьшение критического значения λ соответствует расширению области ориентируемых ЖК и происходит при приложении магнитного поля под углом $\varphi_H \in [0, \pi/2]$. Именно в этом диапазоне лежат все значения угла φ_0 (1), определяющие устойчивые положения директора в сдвиговом потоке. Кроме того, по мере уменьшения пара-

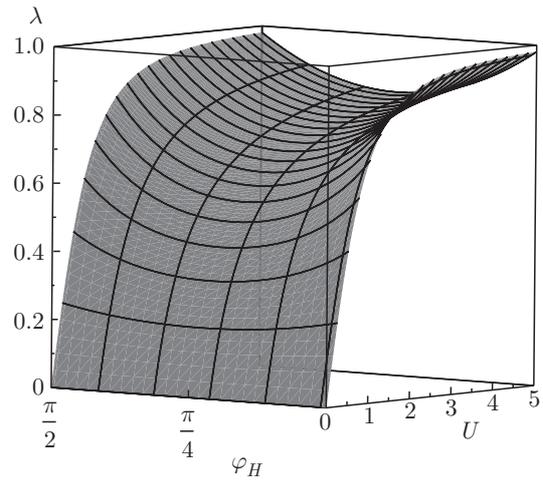


Рис. 2. Трехмерная фазовая диаграмма состояний директора в пространстве параметров $\lambda-U-\varphi_H$ при наличии сдвигового потока и магнитного поля

метра U , т. е. уменьшения величины градиента сдвига или увеличения напряженности магнитного поля, минимально возможное значение λ стремится к нулю.

3.1. Раскручивание спирали холестерика магнитным полем

При воздействии на ориентационную структуру холестерика только магнитного поля h , т. е. при $u = 0$, система уравнений (14)–(18), определяющая шаг спирали холестерика, существенно упрощается и может быть записана в следующем виде

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 E(k)K(k), \quad (21)$$

$$h = \frac{\pi k}{2E(k)}, \quad (22)$$

где $p_0 = 2\pi$ — шаг невозмущенной спирали холестерика, $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода [24]. Соотношения (21) и (22) совпадают с выражениями, полученными в работе [4]. Из этих соотношений следует, что в слабых магнитных полях ($h \ll 1$) шаг холестерической спирали медленно растет с увеличением напряженности,

$$\frac{p}{p_0} \simeq 1 + \frac{h^4}{32}, \quad (23)$$

а вблизи перехода холестерик–нематик логарифмически расходится:

$$\frac{p}{p_0} \simeq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \ln \frac{4}{\sqrt{1 - h^2/h_{c0}^2}}. \quad (24)$$

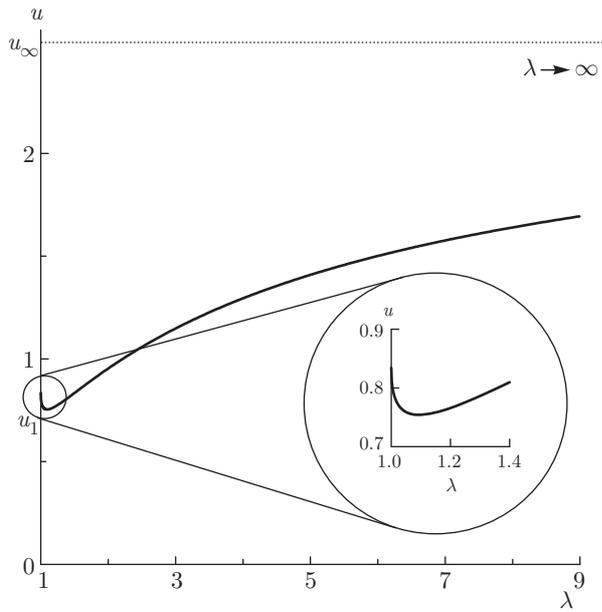


Рис. 3. Диаграмма перехода холестерик–нематик, индуцированного сдвиговым течением. Область ориентируемых течением ЖК соответствует $\lambda \geq 1$. Здесь $u_1 = 0.834$, $u_\infty = \pi^2/4$

Здесь критическая величина безразмерной напряженности магнитного поля $h_{c0} = \pi/2$.

3.2. Раскручивание спирали холестерика сдвиговым потоком

В отсутствие магнитного поля ($h = 0$), когда спираль холестерика раскручивается только сдвиговым потоком, критическую величину градиента скорости сдвига u_{c0} , при которой шаг спирали расходится, можно найти из выражения

$$\frac{\pi}{\sqrt{u_{c0}}} = \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi}{2} + \frac{\varphi_0 - \varphi}{\lambda}} d\varphi, \quad (25)$$

где угол поворота директора в раскрученной (нематической) фазе, φ_0 , определен соотношением (1). Критическое значение величины градиента сдвига u_{c0} и шаг спирали p для $\lambda = 1.026$ были рассчитаны ранее в работе [17].

Функция $u_{c0}(\lambda)$, заданная соотношением (25), показана на рис. 3. На этом рисунке область под кривой соответствует холестерической фазе, область над кривой — нематической фазе. Наименьшему возможному значению реактивного параметра $\lambda = 1$, при котором ХЖК ориентируется сдвиговым течением, соответствуют значение угла $\varphi_0 = \pi/2$ и критическая величина градиента сдвига $u_1 = 0.834$.

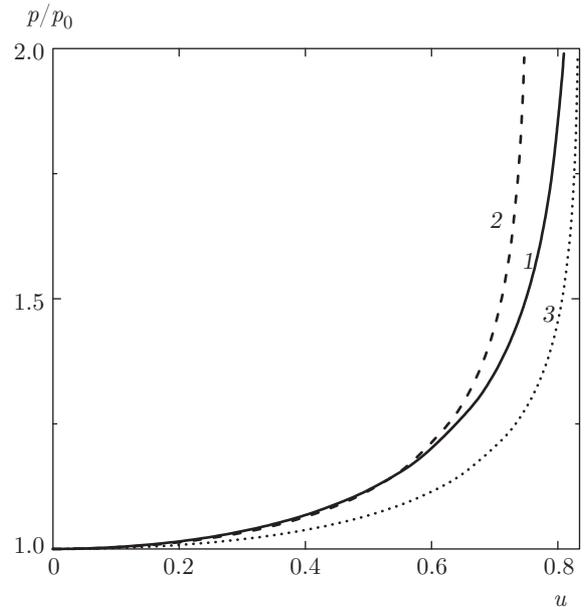


Рис. 4. Зависимости шага спирали холестерика от величины градиента скорости u сдвигового течения при значениях $\lambda = 1.0$ (кривая 1), 1.094 (2), 1.5 (3); $p_0 = 2\pi$ — шаг невозмущенной спирали холестерика

На рис. 3 видно, что с увеличением λ порог перехода холестерик–нематик сначала понижается до $u_{min} = 0.754$ при $\lambda_{min} = 1.094$, а затем повышается, асимптотически стремясь к значению $u_\infty = \pi^2/4$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

При $h = 0$ выражения (16) и (17) для шага спирали упрощаются и могут быть представлены в параметрическом виде:

$$p = \frac{2}{\pi} I_1(a) I_2(a), \quad (26)$$

где определены функции

$$I_1(a) = \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0} \sqrt{1 - a(\sin \varphi \cos \varphi + \varphi/\lambda)} d\varphi,$$

$$I_2(a) = \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a(\sin \varphi \cos \varphi + \varphi/\lambda)}}.$$

Здесь параметр

$$a = u \left(\frac{I_1(a)}{\pi} \right)^2 \quad (27)$$

меняется от нуля до $(\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \varphi_0/\lambda)^{-1}$ при изменении величины градиента скорости u от нуля до критического значения u_{c0} .

Результаты численного решения уравнений (26) и (27), определяющие зависимость приведенного шага спирали холестерика p/p_0 от величины градиента скорости u сдвигового течения для различных значений λ , представлены на рис. 4. Видно, что с увеличением u при малых градиентах сдвига ($u \ll \ll 1$) шаг спирали медленно растет, а при $u \rightarrow u_{c0}$ расходится. Заметим, что наблюдаемое на диаграмме перехода холестерик–нематик (см. рис. 3) немонотонное поведение критической величины сдвига u_{c0} при $\lambda \gtrsim 1$ проявляется и в зависимости $p = p(u)$ на рис. 4.

Изучим поведение шага холестерической спирали как функции градиента скорости сдвига u в ряде предельных случаев.

При малой величине градиента скорости сдвигового течения ($u \ll 1$) параметр a мал, поэтому, раскладывая функции $I_1(a)$ и $I_2(a)$ в ряды и учитывая формулу (1), из соотношений (26) и (27) для шага спирали получаем

$$\frac{p}{p_0} \simeq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2 + 6}{3\lambda^2} \right) \frac{u^2}{16}. \quad (28)$$

Из формулы (28) видно, что при слабых сдвиговых течениях шаг спирали ($p - p_0 \propto A^2$) увеличивается квадратично с ростом величины градиента скорости сдвига (см. рис. 4).

Отметим следующую аналогию в поведении шага спирали холестерика при слабых сдвиговых течениях соответствующим зависимостям в слабых магнитных полях. При $\lambda \rightarrow \infty$ ($\varphi_0 = \pi/4$), формула (28) в точности совпадает с формулой (23), описывающей полевую зависимость шага спирали холестерика $p = p(h)$, если в последней осуществить замену h на \sqrt{u} .

В предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ шаг спирали $p(u)$, определяемый формулой (26), может быть представлен следующим образом:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 E(k)K(k), \quad (29)$$

$$u = \left(\frac{\pi k}{2E(k)} \right)^2, \quad (30)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго родов [24]. В точке перехода холестерик–нематик шаг спирали p обращается в бесконечность. Этому значению, как видно из соотношений (29) и (30), отвечает $k = 1$, при котором $K(1) = \infty$ и $E(1) = 1$. Критическая величина градиента скорости сдвига в этом случае принимает значение $u_\infty = \pi^2/4$.

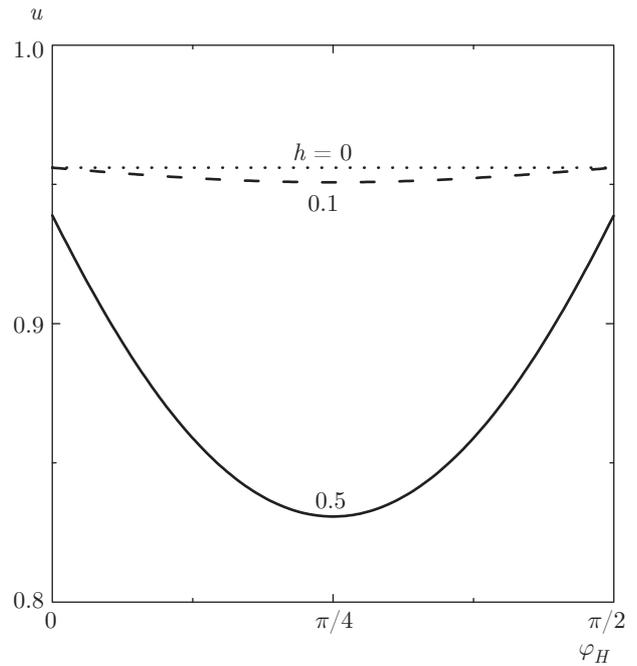


Рис. 5. Диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-\varphi_H$ при различных значениях магнитного поля h для $\lambda = 2$

Вблизи порога перехода холестерик–нематик, т.е. при $u \lesssim u_\infty$, параметр $k^2 \lesssim 1$. Подставляя асимптотические разложения для эллиптических функций [24]

$$K(k) \simeq \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \dots, \quad E(k) \simeq 1 + \dots$$

в соотношения (29) и (30), получаем

$$\frac{p}{p_0} \simeq \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \ln \frac{4}{\sqrt{1-u/u_\infty}}. \quad (31)$$

Таким образом, вблизи перехода холестерик–нематик, индуцированного сдвиговым потоком, шаг спирали логарифмически расходится, как и при переходе в магнитном поле [4].

3.3. Раскручивание спирали холестерика сдвиговым потоком и магнитным полем

Обратимся теперь к случаю совместного действия сдвигового течения и магнитного поля на холестерик.

Уравнения (14) и (18), определяющие кривые ориентационного перехода холестерик–нематик, решались численно. Полученные фазовые диаграммы представлены на рис. 5–10. Области под кривыми

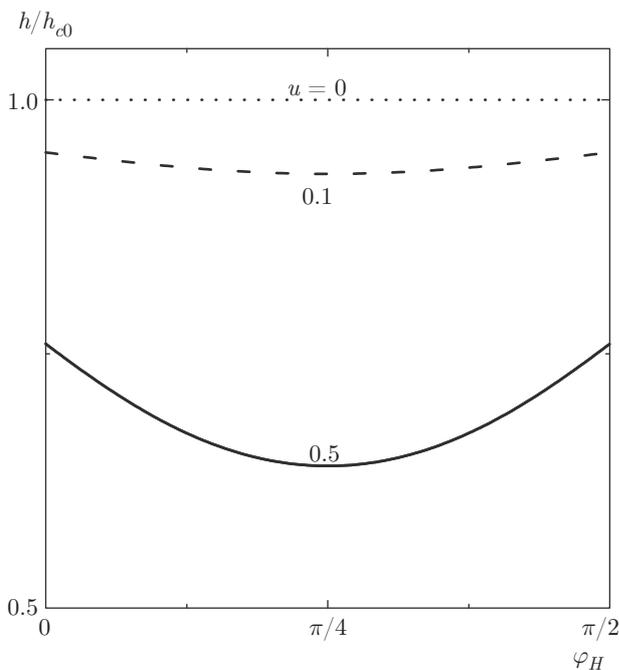


Рис. 6. Диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $h-\varphi_H$ при различных значениях величины градиента скорости u для $\lambda = 2$

отвечают холестерической фазе, а внешние по отношению к кривым области соответствуют нематической фазе.

На рис. 5 изображены диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-\varphi_H$ при различных значениях напряженности магнитного поля h . На рис. 5 видно, что критическое значение u_c в отсутствие магнитного поля ($h = 0$), как это и должно быть, не зависит от угла ориентации поля. С ростом поля h порог u_c перехода холестерик–нематик понижается для $\varphi_H \in [0, \pi/2]$, достигая минимального значения при ориентации магнитного поля под углом $\varphi_H = \pi/4$. Характерной особенностью диаграммы является наличие области неоднозначности при $h \neq 0$, в которой одному и тому же значению u_c соответствуют два значения угла ориентации поля. Это означает, что при фиксированных значениях u и h поворотом магнитного поля можно индуцировать последовательность возвратных переходов холестерик–нематик–холестерик. Причина появления возвратных ориентационных переходов связана с конкуренцией между магнитным и гидродинамическим механизмами воздействия, которые стремятся раскрутить спиральную структуру в разных направлениях.

На рис. 6 изображены диаграммы ориентационных переходов на плоскости $h - \varphi_H$. На ней видно,

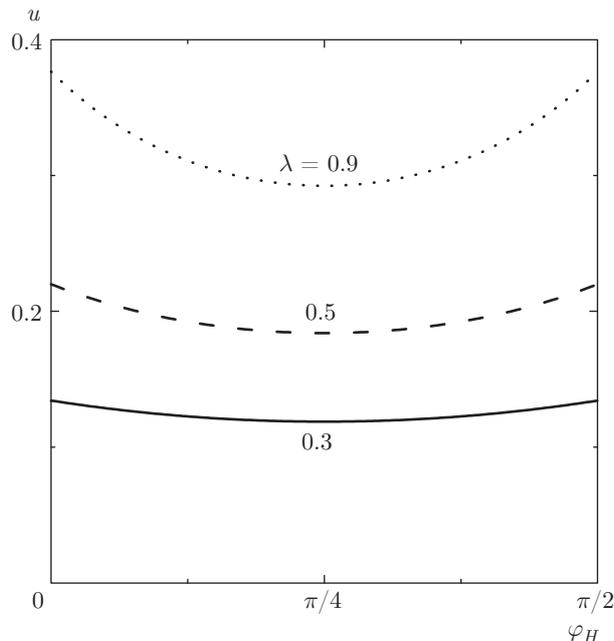


Рис. 7. Диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-\varphi_H$ для $h = 1$ при различных значениях реактивного параметра $\lambda < 1$

что критическое значение магнитного поля в отсутствие сдвигового течения ($u = 0$) не зависит от угла ориентации поля φ_H . При наличии течения с ростом градиента скорости критическое поле h_c уменьшается и на диаграмме появляются области неоднозначности, отвечающие возвратным переходам, которые происходят при повороте магнитного поля. Диапазон значений магнитного поля, допускающий возвратную холестерическую фазу, расширяется с ростом u , т. е. с увеличением градиента скорости сдвига.

На рис. 7 представлены диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-\varphi_H$ для $h = 1$ при различных значениях реактивного параметра $\lambda < 1$, соответствующих ЖК, неориентируемым сдвиговым потоком (1). Как показано выше, магнитное поле стабилизирует ориентационную структуру в сдвиговом потоке, расширяя область допустимых значений реактивного параметра (20), для которых существуют стационарные состояния директора. Это приводит к возможности раскручивания спиральной структуры холестериков с $\lambda < 1$. На рис. 7 видно, что уменьшение λ понижает критическое значение u_c , кривая переходов становится более плоской и пороговая величина градиента скорости сдвига слабо зависит от ориентации внешнего поля.

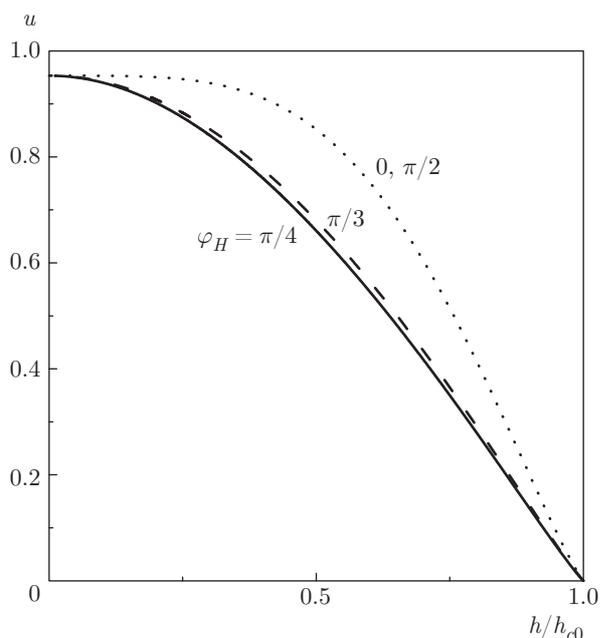


Рис. 8. Диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-h$ при различных значениях угла φ_H ориентации магнитного поля для реактивного параметра $\lambda = 2$

На рис. 8 представлены диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-h$ при различных значениях угла φ_H ориентации магнитного поля. Расчеты выполнены для реактивного параметра $\lambda = 2$, соответствующего углу ориентации директора в потоке $\varphi_0 = \pi/3$. При изменении угла φ_H ориентации поля от нуля до $\pi/4$, происходит монотонное уменьшение критического градиента сдвига u_c . Дальнейшее увеличение угла φ_H от $\pi/4$ до $\pi/2$, напротив, приводит к увеличению u_c , возвращая кривую переходов в состояние, соответствующее углу $\varphi_H = 0$.

На рис. 9 изображены диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-h$ для угла ориентации магнитного поля $\varphi_H = \varphi_0$ при различных значениях реактивного параметра λ . Как видно на диаграмме, в отсутствие сдвигового течения ($u = 0$) раскручивание спирали холестерика происходит при $h_{c0} = \pi/2$, что совпадает с известным результатом [2]. При включении сдвигового потока критическое магнитное поле уменьшается, обращаясь в нуль при критическом значении градиента скорости u_{c0} , зависящем от реактивного параметра λ . Таким образом, для рассматриваемой ориентации магнитного поля течение помогает раскрутить спираль холестерика. Увеличение реактивного параметра (уменьшение коэффициента вращательной

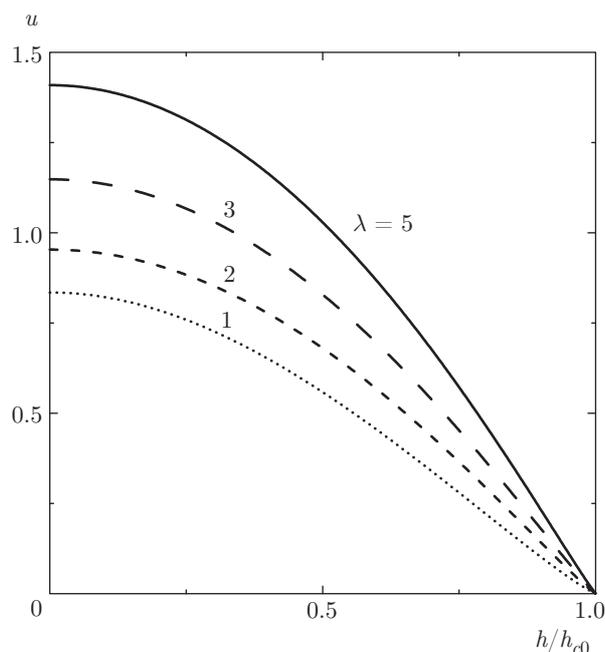


Рис. 9. Диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости $u-h$ для угла ориентации магнитного поля $\varphi_H = \varphi_0$ при различных значениях реактивного параметра λ

вязкости γ_1) приводит к росту критического значения градиента скорости сдвига.

Как видно на диаграмме переходов холестерик–нематик, отвечающей ориентации магнитного поля по направлению градиента скорости под углом $\varphi_H = 0$ (рис. 10), линии ориентационных переходов аналогичны тем, что были получены для угла $\varphi_H = \varphi_0$ (см. рис. 9).

Шаг спирали холестерика может быть найден из системы уравнений (14)–(18). На рис. 11–13 изображены зависимости шага p спирали от интенсивности сдвигового течения u , напряженности h и угла φ_H ориентации магнитного поля, построенные путем численного решения этой системы уравнений.

На рис. 11 представлены зависимости шага спирали холестерика от угла φ_H ориентации магнитного поля для параметров, соответствующих области существования возвратных ориентационных переходов (см. рис. 5). При фиксированных значениях поля h и градиента скорости u течения, когда холестерическая спираль деформирована ($p > p_0$), поворот магнитного поля, т. е. увеличение угла φ_H , приводит к более эффективному совместному воздействию поля и течения на холестерик, раскручивая спираль и вызывая ориентационный переход холестерик–нематик. Последующее увеличение угла

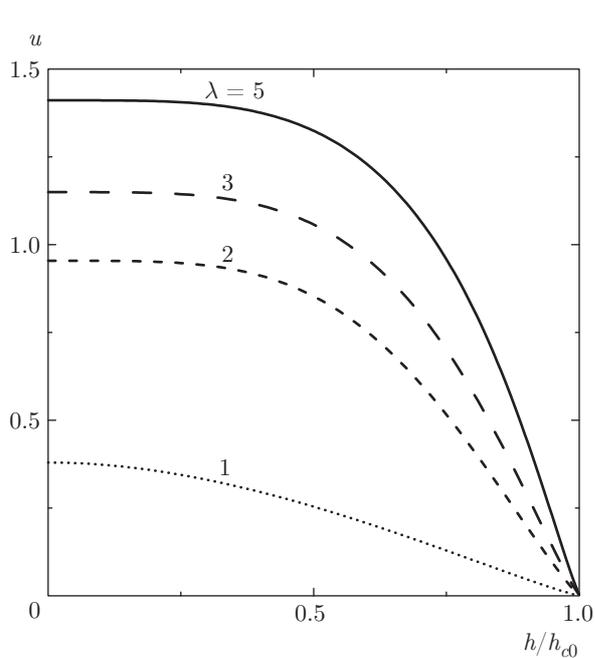


Рис. 10. Диаграммы фазового перехода холестерик–нематик на плоскости u - h для угла ориентации магнитного поля $\varphi_H = 0$ при различных значениях реактивного параметра λ

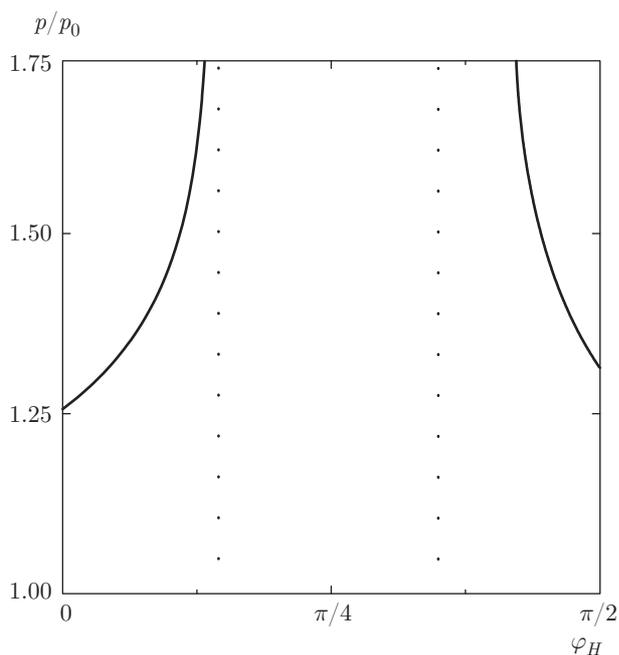


Рис. 11. Зависимости шага спирали холестерика от угла ориентации магнитного поля φ_H для $\lambda = 2$, $h = 0.5$, $u = 0.85$; $p_0 = 2\pi$ — шаг невозмущенной спирали холестерика

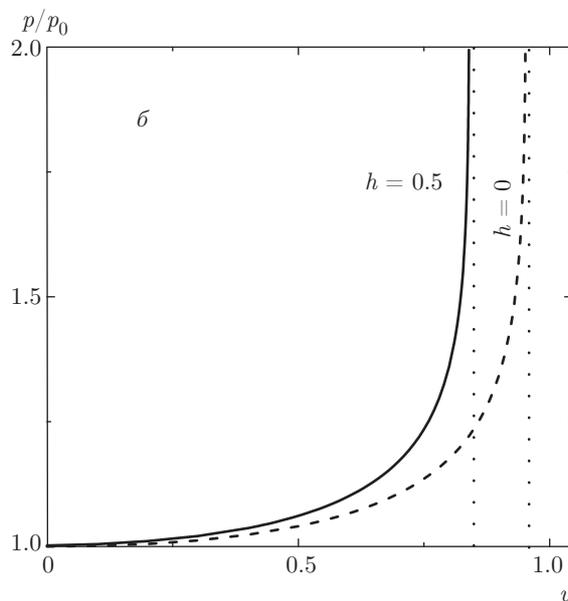
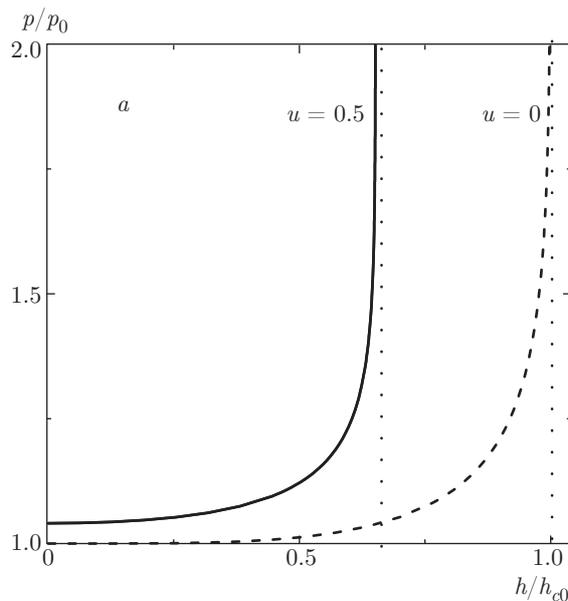


Рис. 12. Зависимости шага спирали холестерика от напряженности магнитного поля h (а) и от величины градиента скорости u сдвигового течения (б). Во всех случаях магнитное поле ориентировано под углом $\varphi_H = \varphi_0$, $\lambda = 2$; $p_0 = 2\pi$ — шаг невозмущенной спирали холестерика

φ_H ориентации поля уменьшает эффективное действие поля и течения на систему, и происходит возвратный переход в холестерическую фазу.

На рис. 12 показаны зависимости приведенного шага p/p_0 спирали холестерика от напряженности h магнитного поля и величины градиента скорости u сдвигового течения для угла ориентации магнитного поля $\varphi_H = \varphi_0$. Шаг частично раскрученной

сдвигом (рис. 12а, $u = 0.5$) или полем (рис. 12б, $h = 0.5$) холестерической спирали медленно растет в слабых полях h и при малых градиентах скорости u сдвига, но начинает сильно увеличиваться, приближаясь к критическим значениям h_c или u_c , при которых обращается в бесконечность. Значения h_c и u_c , как это и следует из рис. 9, меньше соответственно h_{c0} и u_{c0} . Напомним, что величиной h_{c0} обозначено критическое значение напряженности перехода холестерик–нематик в магнитном поле, а u_{c0} — критическая величина градиента скорости при переходе холестерик–нематик в сдвиговом потоке.

Зависимости шага спирали холестерика от напряженности магнитного поля h и величины градиента скорости u сдвигового течения для ориентации магнитного поля по направлению градиента скорости под углом $\varphi_H = 0$, как это видно из рис. 13, качественно похожи на те, что получены для случая $\varphi_H = \varphi_0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически исследовано совместное конкурирующее действие магнитного поля и сдвигового течения на спиральную ориентационную структуру ХЖК. Каждое из этих воздействий порознь приводит к раскручиванию спиральной структуры холестерика, если эти воздействия ортогональны оси спирали. Ось спирали холестерика была ориентирована перпендикулярно плоскости сдвигового потока, величина градиента скорости которого предполагалась постоянной во всем образце.

В работе рассмотрен случай положительной диамагнитной анизотропии ХЖК, когда директор стремится ориентироваться по полю. Аналогичное действие на ориентационную структуру оказывает и сдвиговое напряжение. Иными словами, рассматриваемые внешние воздействия (магнитное поле и/или сдвиговое напряжение), приложенные перпендикулярно оси спиральной структуры холестерика, вызывают ее раскручивание (фазовый переход холестерик–нематик). Этот переход является результатом конкуренции энергии ориентационно-упругих деформаций, описываемой градиентным инвариантом Лифшица (6) и стремящейся промодулировать структуру холестерика, и энергии холестерика во внешнем (магнитном и/или сдвиговом) поле, стремящейся создать нематическую фазу с однородной ориентацией директора. В окрестности этого перехода холестерик описывается с помощью решетки солитонов (доменных стенок между домена-

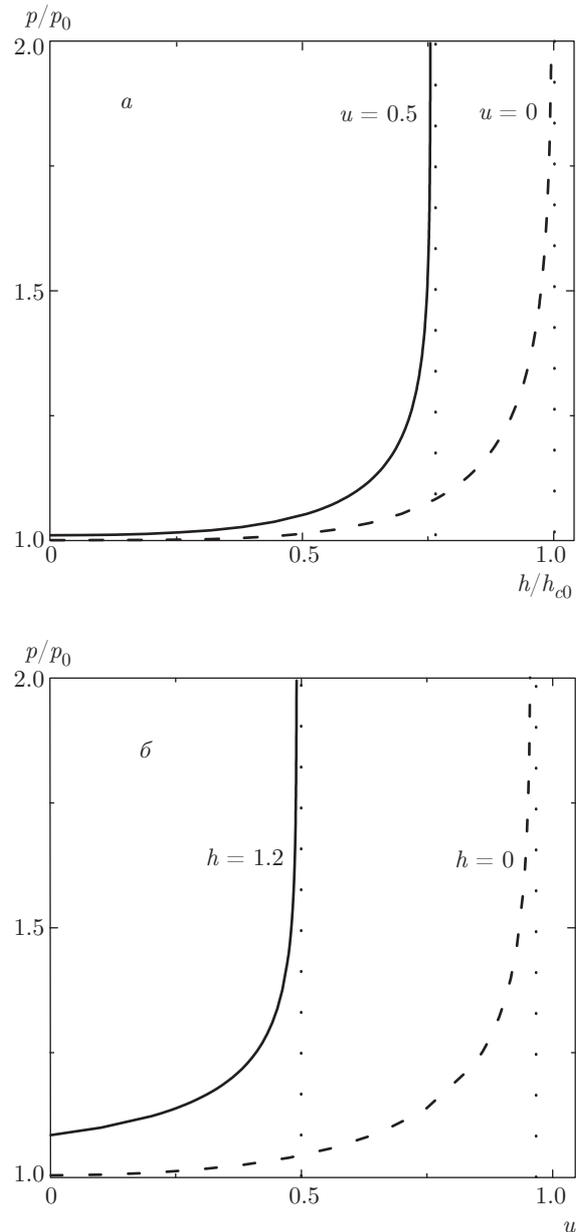


Рис. 13. Зависимости шага спирали холестерика от напряженности магнитного поля h (а) и от величины градиента скорости u сдвигового течения (б). Во всех случаях магнитное поле ориентировано под углом $\varphi_H = 0$, $\lambda = 2$; $p_0 = 2\pi$ — шаг невозмущенной спирали холестерика

ми нематической фазы с разными направлениями директора), вставленных в холестерическую фазу. С ростом поля толщина доменов однородной фазы растет, т. е. доменные стенки отталкиваются, что проявляется как увеличение шага спирали.

Показано, что в предельных случаях отсутствия сдвига или магнитного поля полученные результаты сводятся к известным решениям. В случае только

сдвигового течения обнаружена немонотонная зависимость критического значения градиента скорости от реактивного параметра. Для малых и больших градиентов сдвига получены аналитические выражения для шага холестерической спирали. Показано, что при слабых сдвиговых течениях шаг спирали зависит от градиента скорости сдвига квадратично, а вблизи перехода холестерик–нематик в сдвиговом потоке он расходится логарифмически.

Рассмотрены конфигурации, отвечающие различным ориентациям магнитного поля в плоскости сдвига: от направления вдоль градиента скорости ($\varphi_H = 0$) до направления вдоль сдвигового потока ($\varphi_H = \pi/2$). Для различных значений параметров системы построены диаграммы ориентационных переходов холестерик–нематик и зависимости шага спирали ориентационной структуры от величины градиента скорости сдвигового потока, реактивного параметра, напряженности и угла ориентации магнитного поля. Показано, что магнитное поле, стабилизируя ориентацию директора в сдвиговом потоке, расширяет границы области ориентируемости холестериков, что позволяет сдвиговым потоком раскручивать спиральную структуру холестериков с реактивным параметром $\lambda < 1$.

Установлено, что конкурирующее воздействие магнитного поля и сдвигового течения может привести к последовательности возвратных ориентационных переходов холестерик–нематик–холестерик, вызванных поворотом магнитного поля в плоскости сдвига. Наличие сдвигового течения в рассматриваемой геометрии приводит к понижению критической напряженности магнитного поля перехода холестерик–нематик.

Как известно [4, 5], непрерывное изменение шага спирали холестерика осуществляется в безграничных образцах. В ячейках, размер которых сопоставим с шагом невозмущенной структуры холестерика, внешние поля индуцируют ступенчатое раскручивание спирали [25, 26]. Исходное количество витков спирали внутри слоя может меняться дискретным образом. Такое равновесное изменение шага спирали с ростом напряженности поля требует квазистатического изменения поля и установления состояния термодинамического равновесия. Соответствующие времена релаксации оказываются очень велики [27]. В условиях реального эксперимента это не всегда выполнено. Однако в последние годы появились работы, в которых сообщается об экспериментальном наблюдении других режимов отклика на приложенное внешнее поле [20, 28–30]. Так, в работе [29] помимо флексоэлектрического [31] наблю-

дались два режима отклика на приложенное поле — с непрерывным изменением шага спирали и без его изменения. В последнем случае спираль деформируется, сохраняя шаг. Как показано в работе [28], первый из этих режимов включает медленную стадию формирования дефектов, так как существуют топологические ограничения на процесс раскручивания спиральной структуры [1, 32]. Второй режим — с деформированной спиральной структурой и неизменным шагом — оказывается многообещающим, поскольку имеет малое время электрооптического отклика [28, 30].

Рассмотренный в работе случай бесконечного образца является идеализацией реальной ячейки при изучении явлений вдали от ограничивающих ее стенок. Этот случай, тем не менее, приобретает все большее значение для анализа динамических явлений при быстром деформировании спиральной структуры, когда времена электрооптического отклика квадратично зависят от шага спирали и не зависят от толщины ячейки [28, 30].

В физике жидких кристаллов существует несколько методов экспериментальной реализации сдвигового течения. Наиболее близкими для рассматриваемой геометрии являются условия эксперимента с ХЖК, заключенным между двумя параллельными пластинами, движущимися друг относительно друга с постоянной скоростью [33], а также при низкочастотном осцилляционном движении одной из пластин [20, 29]. На расстояниях, много больших характерного размера пограничного слоя [2], можно пренебречь пристеночными эффектами, обусловленными сцеплением ХЖК с поверхностью, такими как обратное течение, инверсионные стенки и т.п. Тем самым, используемое в работе приближение постоянства градиента скорости потока справедливо вдали от ориентирующих стенок исследуемого образца.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.5977.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Блинов, *Жидкие кристаллы: структура и свойства*, URSS, Москва (2015).
2. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993).
3. L. M. Blinov and V. G. Chigrinov, *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials*, Springer-Verlag, New York (1994).

4. P. G. de Gennes, Sol. St. Comm. **6**, 163 (1968).
5. R. B. Meyer, Appl. Phys. Lett. **12**, 281 (1968).
6. F. M. Leslie, Rheol. Acta **10**, 91 (1971).
7. M. J. Stephen and J. P. Straley, Rev. Mod. Phys. **46**, 617 (1974).
8. D. V. Makarov and A. N. Zakhlevnykh, Phys. Rev. E **74**, 041710 (2006).
9. J. F. Fatriansyah and H. Orihara, Phys. Rev. E **88**, 012510 (2013).
10. T. Carlsson and K. Skarp, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **78**, 157 (1981).
11. J. F. Fatriansyah and H. Orihara, Phys. Rev. E **91**, 042508 (2015).
12. J. M. Pochan and P. F. Erhardt, Phys. Rev. Lett. **27**, 790 (1971).
13. J. M. Pochan and D. G. Marsh, J. Chem. Phys. **57**, 1193 (1972).
14. N. Scaramuzza, R. Barberi, F. Simoni et al., Phys. Rev. A **32**, 1134 (1985).
15. I. Jánossy, J. de Phys. **41**, 437 (1980).
16. D. G. Venhaus, K. S. Conatser, and M. J. Green, Liq. Cryst. **40**, 846 (2013).
17. G. Derfel, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **92**, 41 (1983).
18. A. D. Rey, Phys. Rev. E **53**, 4198 (1996).
19. G. Derfel, Liq. Cryst. **24**, 829 (1998).
20. Y. Inoue and H. Moritake, Appl. Phys. Express **8**, 071701 (2015).
21. А. Н. Захлевных, А. Н. Селиванов, Вестник Пермского ун-та, сер. Физика **6**, 46 (2000).
22. M. Büttiker and R. Landauer, Phys. Rev. A **23**, 1397 (1981).
23. L. Kai-Fu, J. Xiu-Li, and Y. Yu-Liang, Chin. Phys. B **17**, 2600 (2008).
24. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
25. R. Dreher, Sol. St. Comm. **13**, 1571 (1973).
26. A. N. Zakhlevnykh and V. S. Shavkunov, Phys. Rev. E **94**, 042708 (2016).
27. R. B. Meyer, Appl. Phys. Lett. **14**, 208 (1969).
28. S. P. Palto, M. I. Barnik, A. R. Geivandov et al., Phys. Rev. E **92**, 032502 (2015).
29. Y. Inoue and H. Moritake, Appl. Phys. Express **8**, 061701 (2015).
30. Y. Inoue, M. Hattori, and H. Moritake, Opt. Express **25**, 3566 (2017).
31. J. S. Patel and R. B. Meyer, Phys. Rev. Lett. **58**, 1538 (1987).
32. L. M. Blinov and S. P. Palto, Liq. Cryst. **36**, 1037 (2009).
33. E. Dubois-Violette, E. Guyon, I. Janossy et al., J. de Mech. **16**, 733 (1977).