

# ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ ПРИ ЦИКЛОТРОННЫХ РЕЗОНАНСАХ

*В. А. Буц<sup>a,b,c\*</sup>, В. В. Кузьмин<sup>a,c</sup>, А. П. Толстолужский<sup>a</sup>*

*<sup>a</sup> Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»  
61108, Харьков, Украина*

*<sup>b</sup> Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины  
61002, Харьков, Украина*

*<sup>c</sup> Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина  
61022, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 20 марта 2017 г.

Обсуждаются некоторые особенности динамики частиц и полей при циклотронных резонансах. Основное внимание обращается на режимы с динамическим хаосом. Показано, что известный критерий перехода регулярной динамики частиц к хаотической динамике при циклотронных резонансах не всегда правильно описывает этот переход. Выявлена причина такой особенности критерия. Исследована аномальная чувствительность динамики частиц к внешним флуктуациям при авторезонансе. Построена теория возбуждения электромагнитных волн пучком сфазированных осцилляторов в условиях изолированного нелинейного циклотронного резонанса. Показано, что за возникновение режима с динамическим хаосом отвечает процесс периодического качественного изменения вида фазового портрета частиц в поле волны. Показано, что практически во всех режимах с динамическим хаосом при циклотронных резонансах высшие моменты могут играть более существенную роль, чем низшие. В этом случае известные кинетические уравнения диффузионного типа должны быть обобщены на случай учета этих высших моментов.

DOI: 10.7868/S0044451017100133

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Электронный циклотронный резонанс (ЭЦР) является одним из наиболее известных и наиболее изученных резонансов, а также одним из наиболее используемых резонансов. Действительно, ЭЦР широко используется в электронике (см., например, [1]), а также во многих схемах высокочастотного нагрева высокотемпературной плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза и в установках, используемых как источники нейтронов (см., например, [2–6]). Теория и свойства этого резонанса изучены достаточно хорошо. Известно, что его использование позволяет создать наиболее эффективные схемы обмена энергией между электромагнитными волнами и потоками заряженных частиц. Механизмы такого взаимодействия также хорошо изучены. В последнее время каких-то новых осо-

бенностей ЭЦР не ожидалось. Конечно, в каждом конкретном случае использования ЭЦР в эксперименте приходится учитывать особенности экспериментальных установок, в которых реализуется взаимодействие электромагнитных волн и заряженных частиц. Так, например, в работах [3–5] детально анализируются схемы ЭЦР-нагрева плазмы для конкретных установок. При этом приходится учитывать неоднородности плазмы, неоднородности внешнего магнитного поля, возможность существования пространственных областей захвата электромагнитного поля и многие другие особенности использования ЭЦР в конкретных экспериментальных установках. Это достаточно сложная проблема. Казалось бы, с этими особенностями, вызванными реальными экспериментами, и могут быть связаны все новые особенности ЭЦР. Однако, как мы увидим ниже, ЭЦР имеет некоторые достаточно общие особенности, которые не были ранее изучены. Эти особенности в основном касаются режимов с динамическим хаосом.

\* E-mail: vbuts@kipt.kharkov.ua

При изучении ЭЦР наиболее существенным является вопрос об условиях реализации регулярной и хаотической динамики частиц в этих резонансах. В работах [7, 8] были получены критерии, которые позволяли определить условия перехода от регулярной динамики частиц при ЭЦР к хаотической динамике. Эти критерии были проанализированы численными методами во многих работах (см., например, [7–9]). Кроме того, они были подтверждены в экспериментальных исследованиях [10, 11]. Поэтому, казалось бы, вопрос об условиях регулярной и хаотической динамики частиц в условиях ЭЦР в настоящее время окончательно решен. Однако некоторые наши численные исследования ЭЦР, а также многочисленные исследования авторезонанса (см. работы [6, 12] и цитируемую в них литературу) показывают, что в некоторых важных случаях динамика частиц не соответствует известным критериям. В частности, как показали исследования авторезонанса, в эксперименте не удается достичь высокой эффективности обмена энергией между заряженными частицами и волнами [12]. В настоящей работе мы постараемся дать ответы на некоторые возникающие противоречия и указать на некоторые новые особенности динамики частиц и полей при ЭЦР. Работа построена следующим образом.

В разд. 2 изучаются известные условия возникновения режимов с динамическим хаосом при циклотронных резонансах. Показаны противоречия численных результатов и аналитических критериев. Дано объяснение этим противоречиям. В разд. 3 изучена аномальная чувствительность динамики частиц к внешним флуктуациям в условиях авторезонанса. Возможно, именно эта чувствительность определяет значительное уменьшение эффективности обмена энергией между частицами и волнами при авторезонансе. В разд. 4 построена теория возбуждения электромагнитных волн потоком сфазированных осцилляторов в условиях изолированного нелинейного циклотронного резонанса. Численными методами выделены режимы с регулярной динамикой и режимы с хаотической динамикой. Показано, что уровень возбуждаемых колебаний во всех случаях определяется возникновением режима с хаотической динамикой. Показано, что причиной развития локальной неустойчивости при наличии только одного циклотронного резонанса является качественное изменение фазового портрета движения частиц (бифуркация фазового портрета). В разд. 5 исследована роль моментов в динамике частиц. Показано, что в условиях перекрытия циклотронных резонансов практически всегда высшие моменты больше

предыдущих, поэтому для описания динамики частиц привычные кинетические уравнения диффузионного типа использовать нельзя. Необходима модификация этих уравнений на предмет учета роли высших моментов. В Заключении сформулированы основные результаты, их отличия от известных ранее и показано, в чем заключается их новизна.

## 2. УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЖИМОВ С ДИНАМИЧЕСКИМ ХАОСОМ

Здесь мы покажем, что известный критерий возникновения режимов с динамическим хаосом не всегда полностью описывает переход к хаотической динамике при циклотронных резонансах. Покажем (численно), что не учтенные в этом критерии циклотронные резонансы могут также существенно влиять на возникновение хаотической динамики.

Рассмотрим движение заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны с произвольной поляризацией при наличии постоянного внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ ,

$$\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \text{Re}(c/\omega)[\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}], \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_0 \equiv \{E_0(\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z)\},$$

где  $E_0$  — амплитуда напряженности электрического поля,  $\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z\}$  — вектор поляризации волны. Уравнение движения заряженной частицы в этом случае имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = e\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_0] + \frac{e}{mc}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}], \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma}.$$

Аналогично работам [7, 8] введем следующие безразмерные переменные:  $\tau = \omega t$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}/mc$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \rightarrow k\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}c/\omega$ ,  $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$ ,  $\varepsilon_0 = eE_0/mc\omega$ ,  $\mathbf{h} = = \mathbf{H}_0/|\mathbf{H}_0|$ ,  $\omega_H = eH_0/mc\omega$ . Напряженность электрического поля волны запишем в виде  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Re } \boldsymbol{\varepsilon}_0 e^{i\Psi}$ ,  $\Psi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \tau$ ,  $\mathbf{k} \equiv \{k_x, 0, k_z\}$ . В этих переменных уравнения (2) приводятся к виду

$$\dot{\mathbf{p}} = \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\gamma}\right) \text{Re}(\boldsymbol{\varepsilon}_0 e^{i\Psi}) + \frac{\mathbf{k}}{\gamma} \text{Re}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0) e^{i\Psi} + \frac{\omega_H}{\gamma} [\mathbf{p} \times \mathbf{h}], \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma}, \quad \dot{\Psi} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\gamma} - 1.$$

Ниже для простоты записи формул будем рассматривать наиболее простую структуру поля электромагнитной волны

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{0, iE_y, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{0, 0, H_z\}, \quad \mathbf{k} = \{k_x, 0, 0\}.$$

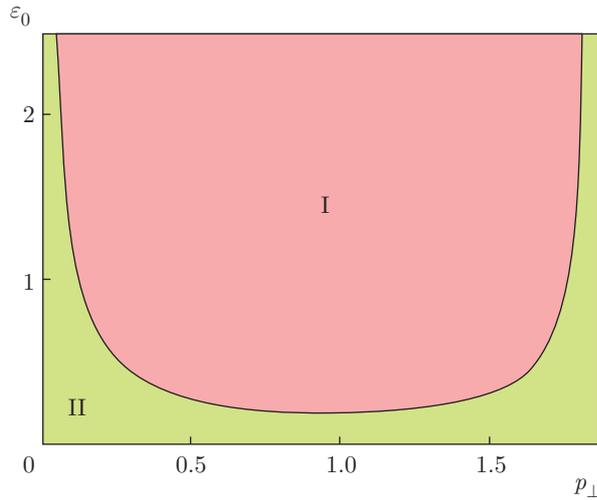


Рис. 1. Пространство параметров  $\varepsilon_0$  и  $p_{\perp}$ : I — режим с динамическим хаосом; II — регулярная динамика

В этом случае критерий перекрытия двух соседних нелинейных циклотронных резонансов, который получен в работе [3], можно записать в виде

$$\varepsilon_0 \geq \frac{\omega_H^2}{16|W_s|k_x^2}, \tag{4}$$

где  $W_s \equiv -p_{\perp}J'_s(\mu)$ ,  $\mu \equiv k_x p_{\perp}/\omega_H$ ,  $p_x = p_{\perp} \cos \theta$ ,  $p_y = p_{\perp} \sin \theta$ ,  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ ,  $\theta = \arctg(p_y/p_x)$ ,  $s$  — номер резонанса,  $J'_s = dJ_s(\mu)/d\mu$ . Используя для оценок первый циклотронный резонанс, можно написать

$$k_x = 1, \quad s = 1, \quad W_1 = -J'_1(\mu).$$

На рис. 1 представлено пространство двух основных параметров,  $\varepsilon_0$  и  $p_{\perp}$ . Кривая разделяет это пространство на две части. Пространство I над кривой соответствует параметрам, при которых условие (4) выполняется. Область II, находящаяся ниже этой кривой, — область, в которой условия перекрытия резонансов не выполняются и хаотическая динамика не должна возникать.

Из критерия (4) следует, что при выполнении условия  $W_s \rightarrow 0$  амплитуда волны, необходимая для возникновения режима с динамическим хаосом, стремится к бесконечности. Физически это условие означает, что ширина одного из нелинейных циклотронных резонансов стремится к нулю. В частности, ширина первого нелинейного циклотронного резонанса стремится к нулю, когда  $J'_1 \rightarrow 0$ . Это условие легко достигается при некотором значении поперечного импульса  $p_{\perp}$ . При этом можно ожидать, что частица, получая энергию от волны в результате резонансного циклотронного взаимодействия с

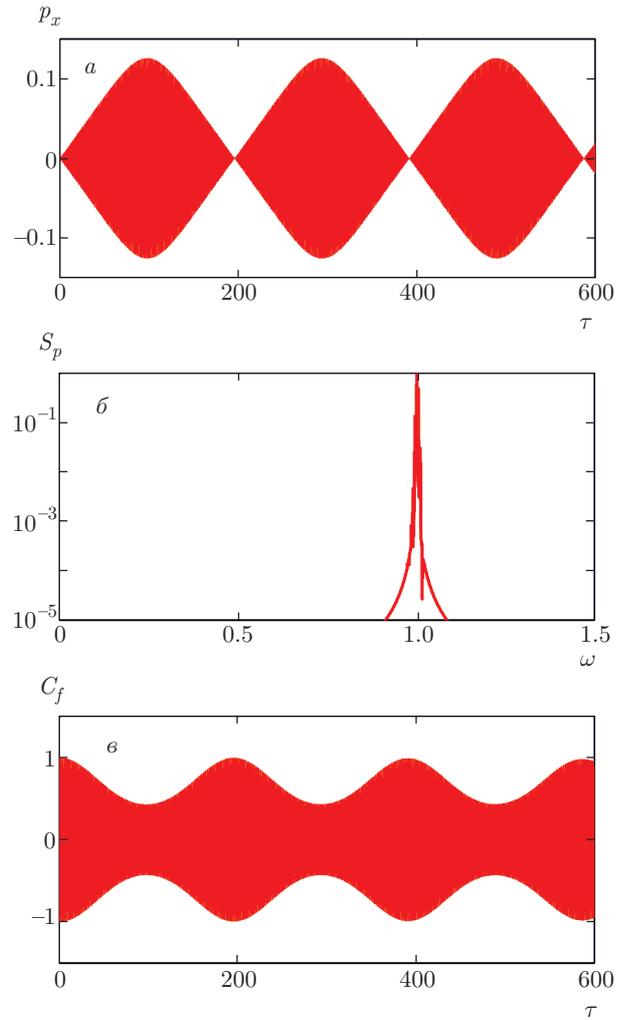
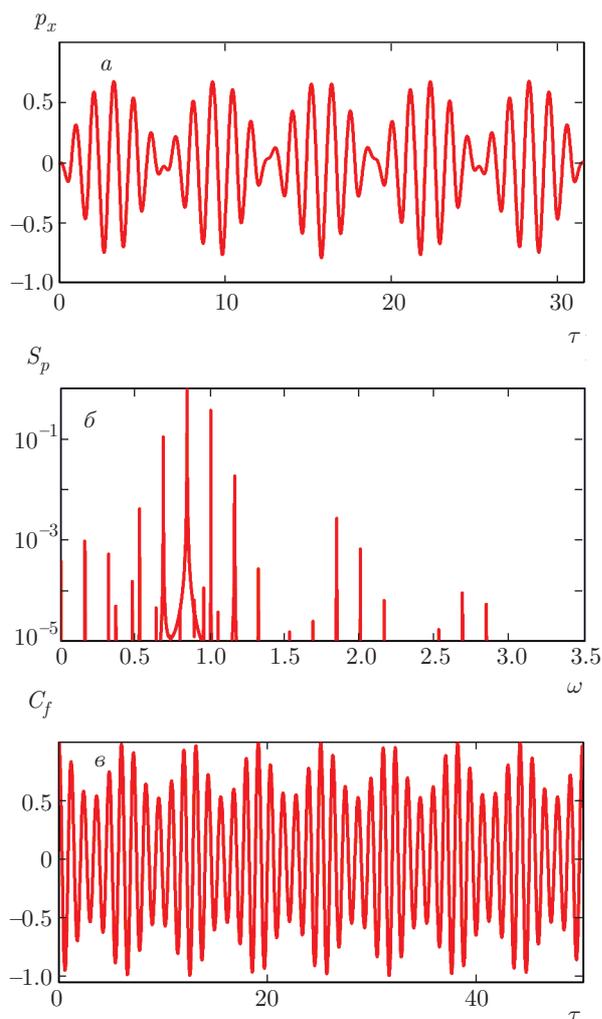


Рис. 2. Импульс частицы  $p_x$  (а), его спектральная плотность мощности (б) и корреляционная функция (в) при  $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $p_{x,y} = 0$ ,  $p_z = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

волной, перестает эффективно отбирать энергию у волны.

Наши предварительные численные исследования динамики частиц в этих условиях показывают, что такого срыва хаотической динамики частиц не происходит. Поэтому были предприняты более тщательные аналитические и численные исследования этого кажущегося противоречия. Для этого были проведены численные расчеты системы в выбранной конфигурации. Уравнения движения для данного случая имеют вид

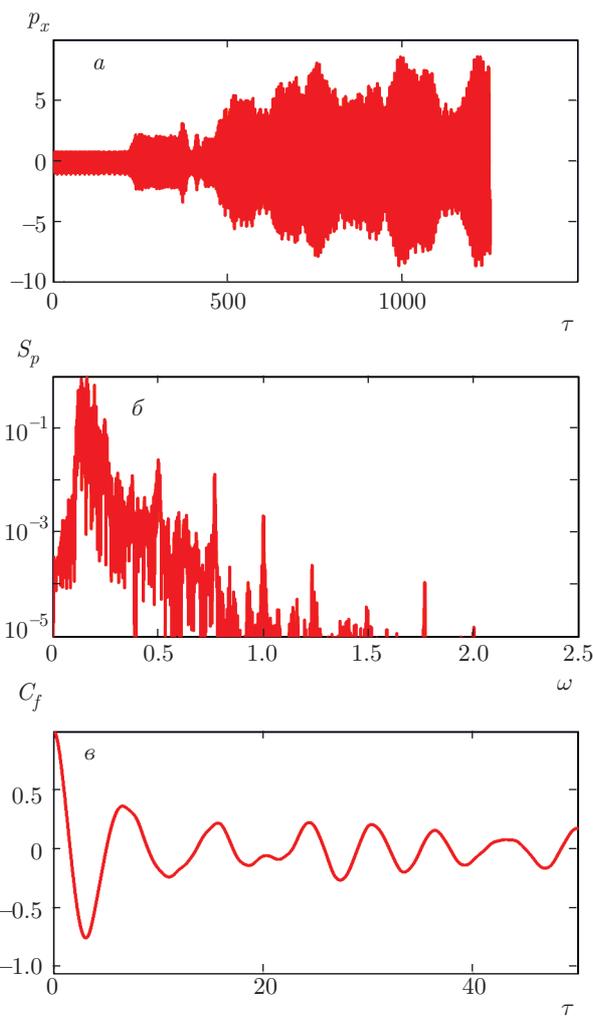
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{\gamma}, & \dot{y} &= \frac{p_y}{\gamma}, \\ \dot{p}_x &= \frac{p_y}{\gamma}(-\varepsilon_0 \sin \Psi + \omega_H), \\ \dot{p}_y &= -\varepsilon_0 \sin \Psi + \frac{p_x}{\gamma}(\varepsilon_0 \sin \Psi - \omega_H). \end{aligned} \tag{5}$$



**Рис. 3.** Импульс частицы  $p_x$  (а), его спектральная плотность мощности (б) и корреляционная функция (в) при  $\varepsilon_0 = 0.1$ ,  $p_{x,y} = 0$ ,  $p_z = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

На рис. 2 представлены решения системы уравнений (5) при  $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $p_{\perp} = 0$ ,  $p_{\parallel} = 0$ : импульс  $p_x$ , его спектральная плотность мощности и корреляционная функция. На рисунке видно, что при данных значениях параметров динамика частиц регулярна. При этом динамика частиц регулярна и для всех начальных фаз частиц в интервале  $0 \leq (x_0, y_0) < 2\pi$ .

При увеличении напряженности поля до величин порядка  $\varepsilon_0 = 0.1$  происходят более интенсивные биения амплитуд импульсов. Однако динамика частиц остается регулярной. Спектр состоит из узких пиков, а корреляционная функция не убывает (рис. 3). В этом случае динамика частиц также остается регулярной во всем диапазоне начальных фаз частиц  $0 \leq x_0, y_0 < 2\pi$ .



**Рис. 4.** Импульс частицы  $p_x$  (а), его спектральная плотность мощности (б) и корреляционная функция (в) при  $\varepsilon_0 = 0.19$ ,  $p_{x,y} = 0$ ,  $p_z = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

Когда напряженность поля становится больше  $\varepsilon_0 = 0.15$ , а  $p_{x,y} = 0$ ,  $p_z = 0$ , происходит качественное изменение динамики (см. рис. 4). При этом следует отметить, что такая напряженность поля меньше той, которая необходима для выполнения условия перекрытия резонансов. Критерий (4) не выполняется (при нулевых значениях импульсов). Объяснить полученный результат можно следующим образом. Вначале и в течение некоторого отрезка времени динамика частиц действительно регулярна, частицы находятся в циклотронном резонансе и набирают энергию. На этом интервале времени, в соответствии с критерием (4), динамика частиц регулярна. При достижении некоторого значения поперечного импульса критерий перекрытия (4) начинает выполняться и динамика становится хаотичной.

На рис. 4 представлены решения системы уравнений (5) при  $\varepsilon_0 = 0.19$ . Видно, что при данных значениях параметров динамика частиц становится нерегулярной. Отметим, что при незначительных изменениях начальных координат частицы ее динамика существенно изменяется. Это означает, что имеет место локальная неустойчивость.

Как следует из работ [7–11], при перекрытии нелинейных циклотронных резонансов (при достаточной напряженности поля) частицы непрерывно набирают энергию (по диффузионному закону). При этом они должны попасть в область с поперечным импульсом порядка  $p_{\perp} = 1.8$ . В соответствии с критерием (4) напряженность поля, необходимая для возникновения режима с динамическим хаосом, при этом резко возрастает. Можно было бы ожидать, что при этих значениях поперечных импульсов произойдет стабилизация уровня энергии, которую могут получить частицы. Однако численные расчеты показывают, что стабилизация отсутствует. Частицы продолжают набирать энергию (см. рис. 4а). Объяснить этот результат можно тем, что при таких значениях параметров оставшиеся неучтенными в критерии (4) циклотронные резонансы начинают играть определяющую роль.

Таким образом, полученные выше результаты указывают на то, что в рассмотренных выше условиях не учтенные в критерии (4) циклотронные резонансы могут играть существенную роль. Напомним, что критерий (4) был получен как условие перекрытия двух нелинейных циклотронных резонансов (критерий Чирикова). Предполагалось, что их перекрытие должно во всех случаях приводить к возникновению режимов с хаотической динамикой. Полученные выше результаты показывают, что это не так. Отметим, что влияние большого количества нелинейных циклотронных резонансов, с которыми частица взаимодействует слабо, можно промоделировать наличием внешнего шумового воздействия. Действительно, как мы увидим в следующем разделе, даже малые внешние флуктуации могут радикально изменить динамику заряженных частиц при циклотронных резонансах. Качественно эти результаты могут объяснить возникшие противоречия.

### 3. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ДИНАМИКУ ЧАСТИЦ ПРИ ЦИКЛОТРОННЫХ РЕЗОНАНСАХ

Важной особенностью циклотронных резонансов является тот факт, что в условиях, близких к авторезонансу, можно ожидать длительного (до бесконечности) эффективного обмена энергией меж-

ду частицами и волнами. Это связано с тем, что в условиях авторезонанса интегралы движения частиц совпадают с условиями циклотронного резонанса. Такая особенность динамики взаимодействия частиц с электромагнитными полями является заманчивой для попыток реализовать ее в генераторах и в ускорителях. Однако оказалось, что попытки использовать этот факт для эффективного возбуждения колебаний не увенчались успехом [12]. Авторы работы [12] предполагают, что причина малой эффективности взаимодействия лежит в наличии большого числа не учтенных в исследованиях (аналитических и численных) дополнительных нерезонансных электромагнитных мод (и даже несобственных), которые всегда сопровождают процесс возбуждения интенсивных электромагнитных волн. Во многих случаях влияние большого числа неучтенных мод можно промоделировать внешним шумовым воздействием. Кроме того, наличие шумовых компонент всегда присутствует в процессах взаимодействия интенсивного электромагнитного излучения с частицами. Поэтому выяснение влияния внешних флуктуаций на динамику частиц во многих случаях является необходимым. Как мы увидим в этом разделе, именно в условиях, близких к авторезонансу, учет этого влияния необходим. Действительно, как было показано в работах [13, 14], в условиях, близких к условиям авторезонанса, динамика частиц может быть аномально чувствительна к внешним флуктуациям.

Ниже мы рассмотрим этот вопрос более детально для наиболее простой структуры поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль направления поля  $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_z$

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{E_x, 0, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{0, H_y, 0\},$$

$$\mathbf{k} = \{0, 0, k_z \approx 1\}.$$

Будем анализировать влияние аддитивных и мультипликативных флуктуаций в наиболее интересном случае, т. е. в условиях, близких к авторезонансу:

$$R_s = k_z v_z + \frac{s\omega_H}{\gamma} - 1 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим вначале роль аддитивных флуктуаций. Учитывая малую величину амплитуды поля,  $\varepsilon_0 \ll 1$ , систему уравнений (3) можно линеаризовать [14]:

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} = -B\tilde{\theta}, \quad \frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} = \alpha\tilde{\gamma} + f, \quad (6)$$

где  $B \equiv (\varepsilon_0 W_1 / 2\gamma_0) \sin \theta_0$ ,  $\theta_1 = \theta + \tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\theta} \ll 1$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma} + \gamma_1$ ,  $\tilde{\gamma} \ll 1$ ,  $\gamma_1 = (\varepsilon_0 W_1 / 2\gamma_0) \cos \theta_0 \cdot \tau + \gamma_0$ ,  $\alpha = (\partial R_{n0} / \partial \gamma)_{\gamma_0}$ ,  $\gamma \ll \tilde{\gamma}$ ,  $f = \tilde{\omega}_H$  — аддитивная

флуктуационная сила. При аналитическом исследовании полагаем, что  $f(\tau)$  — гауссов, дельта-коррелированный случайный процесс с нулевым средним:

$$\langle f(\tau)f(\tau') \rangle = 2D\delta(\tau - \tau'), \quad \langle f \rangle = 0, \quad (7)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии.

Величина параметра  $\alpha$  определяет близость условий к условиям авторезонанса. При строгом выполнении условий авторезонанса этот параметр равен нулю. В этих условиях система уравнений (6) с учетом соотношений (7) решается аналитически:

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{2}{3} DB\tau^3. \quad (8)$$

Такая зависимость среднего квадрата энергии от времени указывает на тот факт, что процесс диффузии частиц в пространстве энергии в этом случае носит характер супердиффузии. Используя метод моментов и метод вариационных производных в общем случае (для произвольной величины  $\alpha = (\partial R_{n0}/\partial \gamma)_{\gamma_0}$ ), можно получить следующее выражение для среднего квадрата энергии [14]:

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{DB}{\alpha} \tau. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что частицы набирают энергию по обычному диффузионному закону. Однако при приближении к условиям авторезонанса коэффициент диффузии становится аномально большим.

Представляет интерес выяснить, при каких условиях закон обычной диффузии (9) сменяется законом супердиффузии (8). Для этого было проведено численное исследование временной динамики заряженных частиц в случаях, близких к авторезонансу. Для численных расчетов было выбрано значение параметра  $B \approx 0.033$ . Величины параметров  $\alpha$  и  $V$  могут быть получены при соответствующих начальных условиях для частиц и при параметре внешнего поля  $\varepsilon_0 = 0.1$ . Величина параметра  $\alpha$  варьировалась в интервале  $10^{-7} \leq \alpha \leq 10^{-1}$ . В качестве флуктуаций  $\tilde{\omega}_H$  была выбрана случайная величина с равномерным законом распределения в интервале от  $-\Delta\omega_H$  до  $\Delta\omega_H = 0.1$ . Начальные условия для добавки энергии и фазы следующие:  $\tilde{\gamma}(0) = 0, \tilde{\theta}(0) = \pi/60$ .

Для нахождения средних значений квадрата приращения энергии  $\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle$  проводилось усреднение по ансамблю из сорока реализаций. В каждой реализации с помощью генератора случайных чисел генерировалась последовательность случайных чисел из

интервала  $(-\Delta\omega_H, \Delta\omega_H)$ . Безразмерное время измеряется в периодах  $\tau = t/T$ . Результаты численного анализа зависимости величины среднего квадрата энергии частицы от времени при изменении параметра  $\alpha$  приведены на рис. 5: сплошные кривые — результаты численного расчета зависимости среднего квадрата энергии от времени по ансамблю из сорока реализаций; точки — их аппроксимация по методу наименьших квадратов с помощью степенной функции вида  $F(\tau) = D_{ad}\tau^\nu$  ( $D_{ad}$  — константа). При этом значения параметров для полей и частиц, а также начальные условия для временной добавки к энергии и фазе оставались постоянными.

Как видно на рис. 5а, зависимость среднего квадрата энергии от времени близка к линейной,  $\langle \gamma^2 \rangle \propto D_{ad}\tau$ . Это соответствует хорошо известному закону диффузии энергии вида  $\langle \gamma^2 \rangle \propto D_{diff}\tau^{1/2}$ . При уменьшении параметра  $\alpha$  до  $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$  зависимость среднего квадрата энергии от времени изменяется незначительно:  $\langle \gamma^2 \rangle \propto D_{ad}\tau^{1.3}$  (рис. 5б), а коэффициент диффузии растет. Это изменение среднего квадрата энергии находится в качественном согласии с формулой (9). Дальнейшее уменьшение параметра  $\alpha$  ( $\alpha = 10^{-5}$ ) приводит к качественному изменению зависимости среднего квадрата энергии частицы от времени. Параметр  $\nu$  существенно возрастает ( $\nu \approx 2.4$ ):  $\langle \gamma^2 \rangle \propto D_{ad}\tau^{2.4}$ . Иллюстрация такого изменения энергии приведена на рис. 5в.

При уменьшении параметра  $\alpha$  от  $10^{-5}$  до  $10^{-7}$  происходит незначительный рост коэффициента диффузии, а показатель степени возрастает до  $\nu \approx 3$ . Данные для  $\alpha = 10^{-7}$  приведены на рис. 5г. Как следует из этого рисунка, наблюдается достаточно хорошее согласие численного расчета и аппроксимации с помощью степенной функции  $D_{ad}\tau^3$ . Эти результаты показывают, что наличие аддитивных флуктуаций, даже очень малых амплитуд, действительно приводит к возникновению супердиффузии. Однако, как видно из рис. 5б–г, это происходит только в исключительно малой окрестности точного выполнения условий авторезонанса. В условиях реальных экспериментов (практически в условиях всех мысленных экспериментов) выполнение условий авторезонанса с требуемой точностью практически невозможно. Поэтому следует ориентироваться на формулу (9), а не на формулу (8).

Рассмотрим теперь, к чему будет приводить наличие мультипликативных флуктуаций. Такие флуктуации возникают, например, при наличии флуктуаций амплитуды волны, в которой движется частица. При этом наибольший интерес представля-

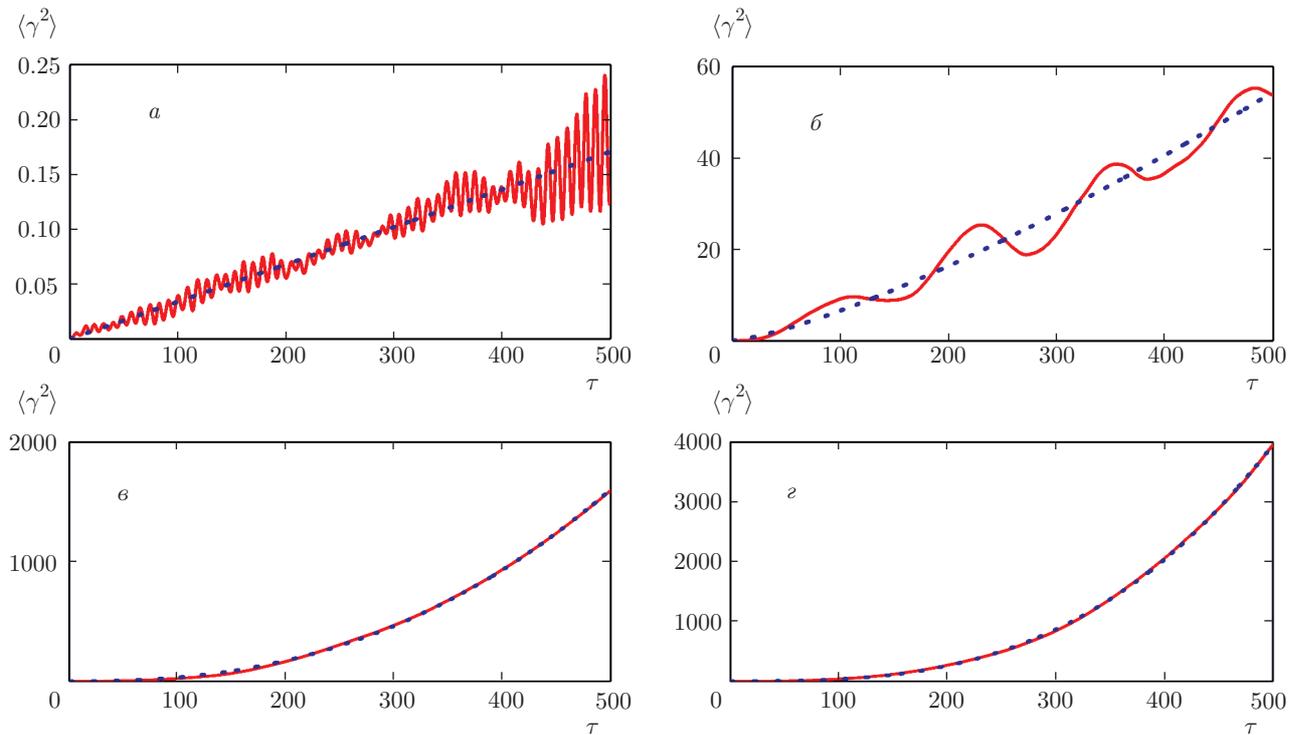


Рис. 5. Зависимости среднего квадрата энергии частицы от времени при  $\alpha = 0.01$  (а),  $5 \cdot 10^{-4}$  (б),  $10^{-5}$  (в),  $10^{-7}$  (г)

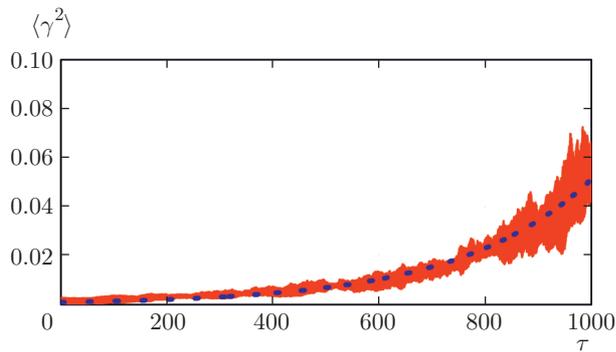


Рис. 6. Зависимость среднего квадрата энергии частицы от времени

ет динамика частицы, находящейся не в окрестности особой точки типа «седло», а в окрестности «центра». Это связано с тем, что из окрестности седловой точки частицы экспоненциально быстро удаляются друг от друга даже под действием регулярных сил. Уравнения для нахождения временной динамики частиц, которые находятся вблизи точек типа «центр» математического маятника, в этом случае удобно представить в виде [14]

$$\frac{du}{d\tau} = -[1 + f(\tau)]\theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = u. \quad (10)$$

Отметим, что в системе уравнений (10) введено новое безразмерное время  $\tau \equiv \omega t \sqrt{|\alpha B|}$  и связь между энергией частицы и углом  $\theta$  принимает вид  $\tilde{\gamma} = \theta \sqrt{|B/\alpha|}$ . Численный анализ уравнений (10) был проведен для начальных условий  $u(0) = 0, \theta(0) = \pi/60$ . В качестве флуктуаций  $f(\tau)$  также была выбрана случайная величина с равномерным законом распределения в интервале  $(-\Delta f, \Delta f)$  и с амплитудой флуктуаций  $\Delta f = 0.1$ . На рис. 6 представлена зависимость среднего квадрата энергии: сплошная линия — результат численного расчета, точками обозначена ее аппроксимация кривой  $F_{exp}(\tau) = D_{mult} \exp(\delta\tau)$ . Экспоненциальная зависимость среднего квадрата энергии от времени ясно видна на рис. 6.

#### 4. САМОСОГЛАСОВАННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ПОТОКАМИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ ИЗОЛИРОВАННОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

Выше был рассмотрен критерий возникновения режимов с динамическим хаосом в условиях перекрытия нелинейных циклотронных резонансов, а также проанализировано влияние аддитивных и

мультипликативных флуктуаций в условиях, близких к авторезонансу (циклотронные резонансы не перекрываются). Если амплитуды возбуждаемых волн не слишком велики и критерий (4) возникновения локальной неустойчивости не выполняется, то динамика частицы полей может быть промоделирована динамикой в одном изолированном нелинейном циклотронном резонансе. Как показывают наши предварительные исследования, в этом случае также возникают режимы с динамическим хаосом. Кроме того, развитие стохастической неустойчивости, так же как и при перекрытии циклотронных резонансов, приводит к стабилизации уровня возбуждаемых полей. Ниже мы изучим этот вопрос и выясним, какой механизм ответствен за развитие стохастической неустойчивости. Для этого рассмотрим наиболее простую модель, которая позволяет ответить на интересующие вопросы.

Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитного поля моноэнергетическим пучком осцилляторов с функцией распределения

$$f_0 = \frac{n_b}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - p_{\perp 0}) \delta(p_\parallel), \quad (11)$$

где  $p_\perp$ ,  $p_\parallel$  — перпендикулярная и параллельная оси  $z$  составляющие импульса,  $n_b$  — равновесная плотность пучка. Рассмотрим возбуждение волны, которая распространяется перпендикулярно внешнему магнитному полю. Полная нелинейная самосогласованная система уравнений, которая описывает динамику частиц и полей, состоит из уравнений Максвелла и уравнений движения частиц. Такая система приведена в работах [7, 8]. Выпишем укороченную систему уравнений, описывающих динамику частиц и полей в изолированном циклотронном резонансе с номером  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{dp_\perp}{d\tau} &= iJ'_s(\mu) \exp(i\theta_s) \varepsilon, \\ \frac{d\theta_s}{d\tau} &= \frac{s\omega_H}{\gamma} - 1 + \frac{1}{\omega_H} \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2}\right) \times \\ &\quad \times \operatorname{Re} [J_s(M) \exp(i\theta_s) \varepsilon], \\ \frac{d\varepsilon}{d\tau} &= i\frac{\omega_b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_{s0} \frac{p_\perp}{\gamma} J'_s(\mu) \exp(-i\theta_s), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $p_\perp = p_\perp/mc$ ,  $\mu = p_\perp/\omega_H$ ,  $\gamma = \sqrt{1 + \mu^2\omega_H^2}$ ,  $\omega_H = eH_0/mc\omega$ ,  $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b/m\omega^2$ ,  $\varepsilon = eE/mc\omega$ .

Можно ожидать, что основным фактором, который приводит к возникновению стохастичности, является последнее слагаемое в правой части уравнения для фазы. Действительно, если зафиксировать

амплитуду поля, то система уравнений (12) будет аналогична уравнению математического маятника, на который действует внешняя периодическая сила. Развитие стохастической неустойчивости в такой модели было исследовано в работе [15], в которой, в частности, выписан критерий возникновения локальной неустойчивости. Однако ниже будет видно, что возбуждаемые потоком осцилляторов поля не могут удовлетворить этому критерию. Существует некий дополнительный механизм. Для его выяснения, а также для ответа на сформулированные выше вопросы система уравнений (12) была решена численно. Результаты численного расчета приведены на рис. 7, на котором можно увидеть следующие особенности динамики взаимодействия частиц и полей при циклотронных резонансах.

Прежде всего видно, что с увеличением плотности активных частиц уровень возбужденного поля растет. Динамика частиц и возбуждаемого поля регулярна вплоть до значений  $\omega_b^2 = 0.04$  (рис. 7а). Это привычная динамика роста поля. При большей плотности пучка,  $\omega_b^2 > 0.04$ , в динамике возбуждаемого поля появляется хаотическая компонента (рис. 7б). На малых временах динамика поля регулярна и напоминает динамику при малых плотностях пучка, причем амплитуда поля вначале нарастает до значений, соответствующих уровню захвата частиц полем возбужденной волны. Затем амплитуда поля уменьшается, причем этот процесс носит хаотический характер.

Начиная примерно с плотности пучка  $\omega_b^2 = 0.5$ , асимптотическое значение поля не превышает значений 0.15. Таким образом, так же как и при перекрытии циклотронных резонансов [16], возникновение локальной неустойчивости приводит к ограничению уровня возбуждаемого пучком поля (рис. 7в). Отметим, что такой же процесс стабилизации характерен и для плазменно-пучковой неустойчивости [17]. Такая динамика поля с ростом плотности частиц остается достаточно привычной до тех пор, пока плотность частиц удовлетворяет неравенству  $\omega_b^2 < 1$ .

При дальнейшем увеличении плотности частиц, когда  $\omega_b^2 > 1$ , можно было предположить, что возбуждение колебаний на выбранных частотах ( $\omega \approx \omega_H$ ) будет отсутствовать. Действительно, при выполнении неравенства  $\omega_b^2 > 1$  колебания на частотах  $\omega \approx \omega_H$  не являются собственными в такой среде. Возбуждившись, они затухают. На рис. 7г-е видно, что благодаря неравновесности пучковой системы на частотах  $\omega \approx \omega_H$  происходит возбуждение колебаний. Однако эти колебания достаточно быстро

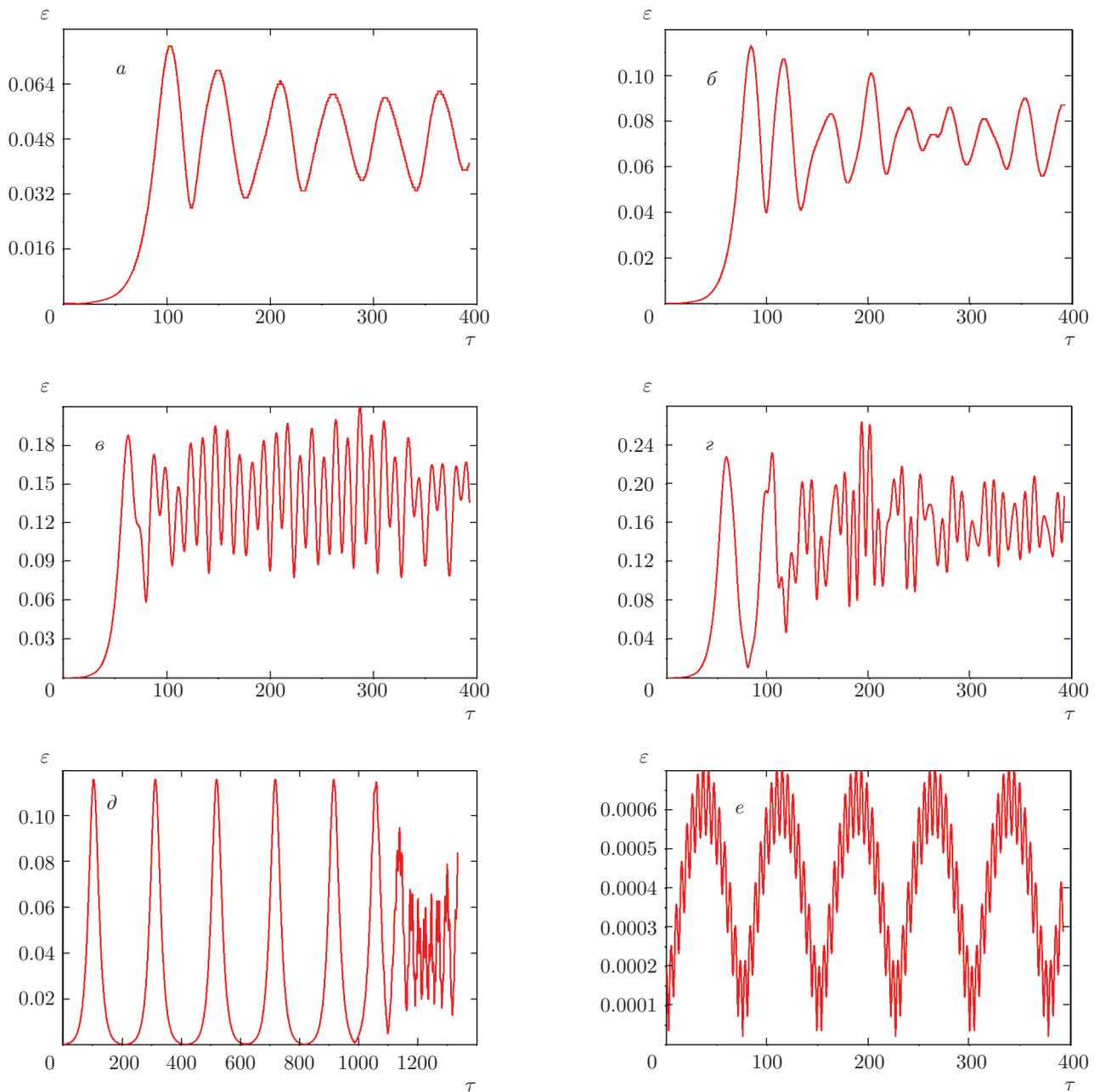


Рис. 7. Зависимости амплитуды поля от времени при плотностях пучка  $\omega_b^2 = 0.04$  (a); 0.1 (б); 0.5 (в); 1.5 (г); 4.0 (д); 4.6 (e)

затухают. Возникает режим релаксационных колебаний. Он существует на достаточно большом интервале времени, в дальнейшем этот режим переходит в режим хаотических колебаний, и процесс возбуждения колебаний на этих частотах прекращается. При этом с ростом плотности частиц амплитуды возбуждаемых колебаний уменьшаются. Насколько нам известно, возбуждение таких релаксационных колебаний до сих пор не было описано. Такие коле-

бания могут, по-видимому, возникать в ионосферной плазме.

В рассмотренной выше модели (см. формулы (12)) выделен один циклотронный резонанс и изучается динамика взаимодействия частиц с полем изолированного циклотронного резонанса. В этом случае механизм перекрытия циклотронных резонансов отсутствует. Исходя из анализа поведения амплитуды поля на рис. 7а-г, видно, что качествен-

но механизм стабилизации связан с развитием процесса локальной неустойчивости. Однако причина такой неустойчивости должна быть другой. Можно было предположить, что этот механизм похож на механизм возникновения локальной неустойчивости динамики движения математического маятника, на который действует внешняя периодическая сила. Такой механизм возникновения режимов с динамическим хаосом был описан в работе [15]. Анализ условий возникновения динамического хаоса по этому механизму показывает, что действующие на частицы силы недостаточно велики, чтобы привести к развитию динамического хаоса. Поэтому был предпринят дополнительный анализ динамики частиц в изолированном циклотронном резонансе. Простейшей моделью при этом является модель движения заряженной частицы в поле внешней электромагнитной волны в условиях изолированного циклотронного резонанса. Амплитуду волны можно считать постоянной. В этом случае система уравнений, которая описывает динамику частицы, совпадает с системой уравнений (12), в которой можно пренебречь третьим уравнением. Динамика частиц при этом описывается первыми двумя уравнениями. Такая система имеет гамильтониан

$$H(\theta_s, I) = \frac{s}{\omega_H} \gamma - I + \frac{\varepsilon}{\omega_H} 2I \frac{dJ_s(\sqrt{2I})}{dI} \cos \theta_s, \quad (13)$$

где  $I = \mu^2/2$ .

Фазовый портрет системы с гамильтонианом (13) топологически подобен фазовому портрету осциллятора Дуффинга. Действительно, на фазовой плоскости  $(p_{\perp}, \theta_s)$  в общем случае имеются три особые точки:

$$(\theta_s = 0, \quad p_{\perp 1} = G), \quad (\theta_s = 0, \quad p_{\perp 2} = 1 - G/2),$$

$$(\theta_s = \pi, \quad p_{\perp 3} = 1 + G/2).$$

Здесь  $G = \varepsilon/p_{\perp 0}^3$ ,  $p_{\perp 0}$  — начальный импульс частицы. Две из этих особых точек (вторая и третья) представляют собой точки типа «центр», а одна (первая) — седловую точку. Такой вид фазового пространства реализуется при малой амплитуде внешней волны ( $G \ll 1$ ). Если же амплитуда достаточно велика ( $G \gg 1$ ), то две особые точки, а именно седловая точка и точка типа «центр» (первая и вторая особые точки) сливаются и исчезают. Остается только одна особая точка — точка типа «центр». Все эти особенности фазового пространства аналогичны особенностям фазового пространства осциллятора Дуффинга.

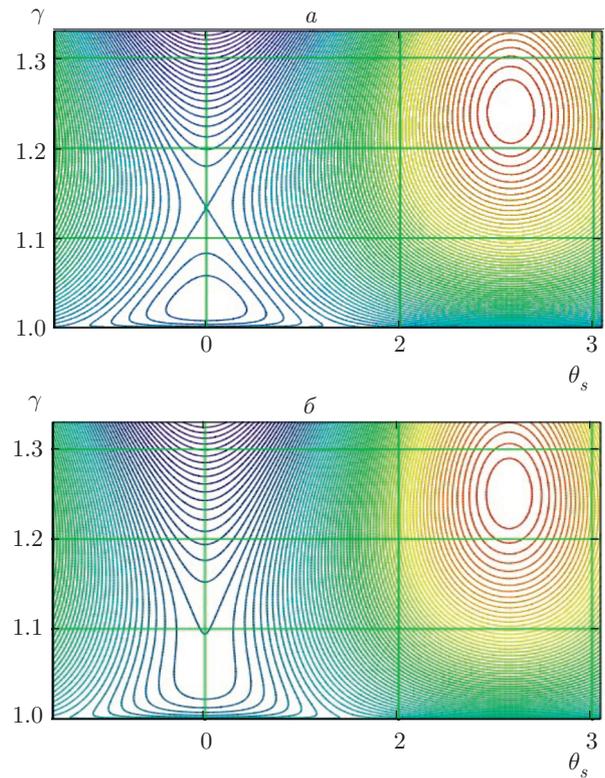


Рис. 8. Фазовые траектории при  $\varepsilon = 0.08$  (а) и  $\varepsilon = 0.105$  (б)

Однако следует обратить внимание на тот факт, что колебания осциллятора Дуффинга являются потенциальными, а для рассматриваемых нами уравнений потенциала найти не удастся. Важной особенностью топологии фазового пространства рассматриваемой системы является также тот факт, что замкнутые траектории в окрестности особой точки типа «центр» можно отождествить с захваченными частицами, а незамкнутые траектории, которые охватывают замкнутые траектории, — с пролетными частицами. Характерные виды фазового портрета при малых ( $G \ll 1$ ) и при больших ( $G > 1$ ) напряженностях поля внешней волны представлены на рис. 8. Обычно захваченные и пролетные частицы разделяются сепаратрисами, т. е. гомоклиническими либо гетероклиническими траекториями. В данном случае, при  $G > 1$  (рис. 8б), такие траектории трудно обнаружить. Имеются только выраженные области для захваченных и для пролетных частиц. Как видно на рис. 8а, на фазовой плоскости, в полном соответствии с приведенными выше результатами, имеются три особые точки: две типа «центр» и одна седловая точка. При увеличении амплитуды волны две точки («седло» и «центр» при  $\theta_s = 0$ ) сближаются и исчезают (рис. 8б).

Таким образом, при росте амплитуды волны происходит качественное изменение вида фазового портрета, который описывает динамику движения частиц. Такой процесс качественного изменения динамики может являться причиной возникновения режима с динамическим хаосом. Более того, видно, что даже количественные характеристики возникновения такого качественного изменения динамики, приведенные на рис. 7б, подтверждают такую возможность. Действительно, на этом рисунке видно, что как только амплитуда возбуждаемой волны превосходит величину 0.105, динамика частиц приобретает нерегулярный характер. При дальнейшем увеличении плотности частиц и, соответственно, напряженности возбуждаемой волны эта нерегулярность становится заметнее. Уже при напряженности возбуждаемого поля на малых временах она может превышать величину 0.2. Однако динамика частицы оказывается такой, что, нерегулярно осциллируя, амплитуда поля выходит на уровень около 0.15. Это значение напряженности поля качественно хорошо согласуется с той напряженностью поля волны, при которой происходит качественное изменение фазовой динамики частиц. Можно, по-видимому, утверждать, что именно этот механизм бифуркации вида фазового портрета является тем механизмом, который порождает режим с динамическим хаосом [18, 19].

Таким образом, в рассматриваемом нами случае (в случае взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями в условиях изолированного циклотронного резонанса) стабилизация уровня возбуждаемого поля определяется возникновением динамического хаоса. В отличие от случая перекрытия нелинейных циклотронных резонансов в рассматриваемом случае основной причиной возникновения динамического хаоса является качественное изменение фазового портрета при изменении амплитуды поля возбуждаемого колебания.

## 5. РОЛЬ МОМЕНТОВ В ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ

В работе [14] показано, что наличие мультипликативных флуктуаций в условиях авторезонанса (нелинейные циклотронные резонансы не перекрыты) приводит к флуктуационной неустойчивости. В результате этой неустойчивости происходит экспоненциальный рост моментов. Известно, что неограниченный рост вторых моментов соответствует по-

летам Леви [20]. Такая особенность в значениях моментов приводит к тому, что для описания динамики частиц в этих условиях привычные кинетические уравнения диффузионного типа использовать нельзя. Вместо этих уравнений необходимо использовать либо интегральные уравнения, либо уравнения с дробными производными [21]. Альтернативой может служить также метод моментов [22]. Для анализа динамики частиц в условиях циклотронного авторезонанса он был использован в работе [14]. Анализ моментов при перекрытии циклотронных резонансов показывает, что в этом случае имеются условия, при которых высшие моменты больше предыдущих. Важно, что такая особенность моментов существует в отсутствие флуктуаций. Этот результат представлен на рис 9, где показана зависимость величины моментов от их номера, причем величина каждого момента делится на факториал его номера (на  $m!$ ). На рис. 9 видно, что при достаточно малой напряженности внешнего поля ( $\varepsilon_0 = eE/mc\omega = 0.1$ ) моменты быстро уменьшаются с ростом их номера (рис. 9а). Однако при больших напряженностях (при  $\varepsilon_0 = 0.19$ ) старшие моменты оказываются больше моментов с меньшими номерами. На рис. 9б видно, что четные моменты растут с ростом номера вплоть до номера  $m = 6$ .

Поскольку четные моменты существенно превосходят по величине нечетные моменты, можно сделать вывод о симметричности распределения моментов  $p_x$  в пространстве импульсов. Однако, поскольку на рис. 9 величины моментов делятся на быстро растущую функцию (на факториал), после шестого момента все остальные моменты быстро убывают. Такая особенность моментов также требует модификации уравнений для описания кинетики частиц. Для этого запишем связь плотности частиц в момент времени  $\tau + \Delta\tau$  с плотностью частиц в момент времени  $\tau$ :

$$n(p, \tau + \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [n(p - p', \tau)] f(p') dp'. \quad (14)$$

Выражение (14) является математическим отражением факта, что плотность частиц, имеющих импульс  $p$  в момент времени  $\tau + \Delta\tau$ , будет определяться всеми другими частицами (с другими энергиями), которые с вероятностью  $f(p')$  через интервал времени  $\Delta\tau$  приобретают импульс  $p'$ . Уравнение (14) удобно переписать в виде

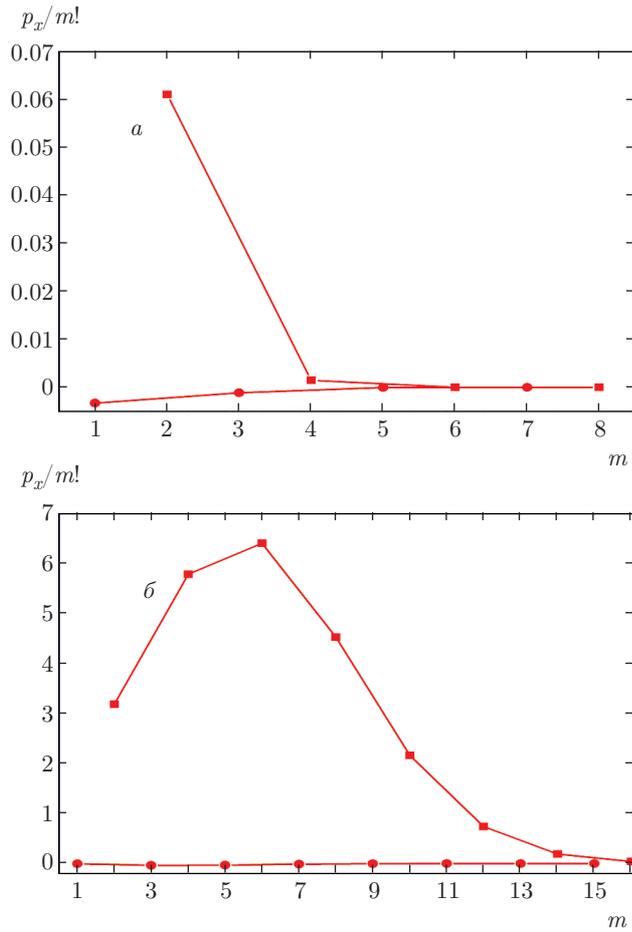


Рис. 9. Зависимости величин моментов  $p_x$ , деленных на факториал их номера  $m!$ , для амплитуд поля  $\epsilon_0 = 0.10$  (а) и  $\epsilon_0 = 0.19$  (б)

$$n(p, \tau + \Delta\tau) - n(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [n(p - p', \tau) - n(p, \tau)] f(p') dp'. \quad (15)$$

Если моменты конечны, то, раскладывая подынтегральные выражения (15) относительно малых смещений и ограничиваясь вторыми моментами, мы получим обычное уравнение диффузии для плотности частиц с коэффициентом диффузии  $D = \langle p^2 \rangle / 2$ :

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 n}{\partial p^2}. \quad (16)$$

Если же моменты не убывают, то необходимо использовать более общее уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \sum_m \frac{\langle (p)^m \rangle}{m!} \frac{\partial^m n}{\partial p^m}, \quad (17)$$

$$m = 2j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Для случая, представленного на рис. 9б, необходимо учитывать четыре–пять слагаемых в сумме (17). Отметим, что кинетические уравнения диффузионного типа достаточно часто используются для описания динамики частиц при циклотронных резонансах (см., например, работу [4] и цитируемую в ней литературу).

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем наиболее важные результаты, а также приведем краткое их обсуждение.

1. Критерий (4) возникновения режимов с динамическим хаосом в системах с циклотронными резонансами требует осторожного использования. Выше мы видели, что формальное использование этого критерия может приводить к неправильным результатам относительно динамики частиц. Анализ показал, что причиной расхождения аналитических и численных результатов является тот факт, что критерий (4) получен в предположении, что основную роль в динамике частиц играют два соседних циклотронных резонанса, с которыми частицы могут находиться в синхронизме. Отметим, что это предположение в большинстве случаев хорошо себя оправдывает. Однако если при каких-либо условиях какой-то из выбранных синхронных резонансов перестает эффективно взаимодействовать с частицами, то указанное предположение перестает быть справедливым. Примером может служить условие, когда ширина одного из этих резонансов стремится к нулю. В этих условиях роль других не учтенных в анализе циклотронных резонансов становится определяющей. Такой анализ критерия (4) является новым. Однако с общей, методологической, точки зрения он скорее является поучительным, чем новым. Возникает вопрос, как адекватно учесть влияние этих резонансов на динамику частиц. Простейший способ заключается в том, чтобы представить их влияние как влияние внешнего шума.

2. При изучении циклотронных резонансов особый интерес представляют условия, при которых интегралы движения частиц совпадают с линиями резонансов. Это условие авторезонанса. В условиях, которые стремятся к условиям авторезонанса, циклотронные резонансы быстро удаляются друг от друга. В пределе эти резонансы не перекрываются. Привычные режимы с динамическим хаосом (вызванные перекрытием резонансов) не появляются. Однако, как показано в работах [13, 14], в условиях авторезонанса динамика частиц аномально чувстви-

тельна к внешним флуктуациям. Особый интерес при этом представляет анализ условий, при которых под влиянием флуктуаций диффузионная динамика частиц становится супердиффузионной. Анализ таких условий может быть проведен только численными методами, что и было сделано. Результаты представлены выше в разд. 3. Оказалось, что при наличии аддитивных флуктуаций для перехода обычной диффузии в режим супердиффузии необходимо, чтобы условия авторезонанса выполнялись с точностью  $10^{-7}$ . Это означает, что при наличии аддитивных флуктуаций режим супердиффузии реально не может быть достигнут. Эти результаты дополняют результаты работ [13, 14].

3. При наличии мультипликативных флуктуаций в работах [13, 14] было показано, что такие флуктуации вызывают флуктуационную неустойчивость. При этом моменты экспоненциально растут со временем. Асимптотически дисперсия становится неограниченной. Как известно, это — условие возникновения полетов Леви или условие возникновения «странной» кинетики [23]. Такая кинетика в настоящей работе была исследована численными методами. Как следует из результатов этого изучения, средний квадрат энергии частиц растет по экспоненциальному закону (см. рис. 6). Насколько нам известно, такой результат получен впервые, по крайней мере, для циклотронных резонансов.

4. Хорошо известно, что в условиях изолированного нелинейного резонанса эффективный обмен энергией между частицами и волнами ограничен шириной нелинейного резонанса. В частности, именно поэтому условия авторезонанса постоянно привлекают исследователей. В наших работах (см., например, [16]) было показано, что уровень возбуждаемых заряженными частицами полей при циклотронных резонансах может оказаться существенно меньшим, чем это следует из анализа ширины резонанса. Было показано, что это ограничение связано с перекрытием нелинейных резонансов и, как следствие, с развитием стохастической неустойчивости. Можно было предположить, что в условиях изолированного резонанса ограничения на амплитуды возбуждаемых полей будут определяться только шириной нелинейного резонанса. Однако, как следует из результатов разд. 4, такое ограничение все-таки возникает. Правда, в этом случае оно вызвано не перекрытием резонансов, а самосогласованной динамикой частиц и полей. При такой динамике появляются захватные колебания частиц. В свою очередь, эти колебания приводят к колебаниям амплитуд возбуждаемых полей. Именно эти периоди-

ческие колебания амплитуд полей вызывают хаотические режимы. Такой механизм ограничения амплитуды возбуждаемых полей в условиях изолированного циклотронного резонанса описан нами впервые.

5. В работе [14] при анализе влияния мультипликативных флуктуаций на динамику частиц было отмечено, что обычные диффузионные кинетические уравнения не могут быть использованы для описания кинетики частиц. Отмечалось, что необходимы другие методы анализа. Выше было показано, что похожая ситуация имеет место при циклотронных резонансах и в отсутствие внешних флуктуаций (как аддитивных, так и мультипликативных). Было обнаружено, что практически во всех случаях, когда нелинейные циклотронные резонансы перекрываются, высшие моменты оказываются больше, чем низшие моменты (см. рис. 9). В этом случае также необходимо при изучении кинетики частиц учитывать высшие моменты. В частности, это можно реализовать с помощью уравнений, аналогичных уравнению (17). Такая особенность динамики частиц при циклотронных резонансах, по-видимому, обнаружена впервые.

Отметим, что многие вопросы, изученные в этой работе, были инициированы в результате дискуссий с С. С. Моисеевым. Авторы благодарят Д. М. Ваврива за полезные обсуждения результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиротроны*, Сборник научных трудов, ИПФ АН СССР, Горький (1989).
2. Brian Lloyd, *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, Number 8A, A119 (1998).
3. A. G. Shalashov, E. D. Gospodchikov, O. B. Smolyakova et al., *Phys. Plasmas* **19**, 052503 (2012).
4. D. V. Yakovlev, A. G. Shalashov, E. D. Gospodchikov et al., *Nuclear Fusion* **57**, Number 122, November (2016).
5. А. Г. Шалашов, А. А. Балакин, Т. А. Хусаинов и др., *ЖЭТФ* **151**, 379 (2017).
6. В. П. Милантьев, *УФН* **183**, 875 (2013).
7. В. А. Балакирев, В. А. Буц, А. П. Толстолужский и др., *ЖЭТФ* **84**, 1279 (1983).
8. В. А. Балакирев, В. А. Буц, А. П. Толстолужский и др., *ЖЭТФ* **95**, 1231 (1989).

9. V. A. Buts, O. V. Manuilenko, and Yu. A. Turkin, *Plasma Phys. Rep.* **25**, 737 (1999).
10. А. Н. Антонов, В. А. Буц, О. Ф. Ковпик и др., *Письма в ЖЭТФ* **69**, 806 (1999).
11. A. N. Antonov, V. A. Buts, E. A. Kornilov et al., *Problems of Atomic Science and Technology*, Ser. Plasma Phys. issue 3, 4, 165 (1999).
12. В. Ф. Кравченко, А. А. Кураев, А. К. Сеницын, *УФН* **177**, 511 (2007).
13. С. С. Моисеев, В. А. Буц, *Особенности динамики заряженных частиц при авторезонансе*, ИКИ. MSS-14. Moscow, 24–27 November (2014), p. 12–17.
14. S. S. Moiseev, V. A. Buts, N. S. Erokhin, *Plasma Phys. Rep.* **42**, 761 (2016).
15. В. А. Балакирев, В. А. Буц, А. П. Толстолужский и др., *Письма в ЖТФ* **9**, 1427 (1983).
16. V. A. Buts, A. N. Lebedev, and V. I. Kurilko, *The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams*, Springer, Berlin (2006).
17. В. А. Буц, О. В. Мануйленко, А. П. Толстолужский, *Укр. физ. ж.* **39**, 429 (1994).
18. V. A. Buts and A. P. Tolstoluzhsky, Nonrelativistic dynamics of the charged particles at cyclotron resonances. *Problems of atomic science and technology*, Series: “Plasma Physics” Issue 14, № 5, p. 117–119 (2008).
19. В. А. Буц, Е. А. Войцены, А. П. Толстолужский, *Усп. совр. радиоэлектр.* № 8, 44 (2009).
20. E. W. Montroll and M. F. Schlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, Vol. 2, ed. by J. Leibowitz and E. W. Montroll, North-Holland, Amsterdam (1984), p. 1.
21. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
22. В. И. Кляцкин, *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами*, Наука, Москва (1975).
23. G. M. Zaslavsky, *Phys. Rep.* **371**, 461 (2002).