ЖЭТФ, 2017, том 152, вып. 4 (10), стр. 752–758

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ВСЛЕДСТВИЕ КОЛЛАПСА КОНФИГУРАЦИЙ ПОЛЕЙ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ

*В. Джалани, А. Мишра, А. Синх**

*Институт информационных технологий Л. Н. Миттала, Физический факультет
302031, Джайпур, Индия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2017 г.

(Перевод с английского)

GRAVITATIONAL WAVE PRODUCTION FROM THE COLLAPSE OF DARK ENERGY FIELD CONFIGURATIONS

V. Jhalani, A. Mishra, A. Singh

Темная энергия является преобладающей компонентой плотности энергии во Вселенной. В нашей предыдущей работе было показано, что коллапс полей темной энергии приводит к формированию супермассивных черных дыр с массами, сравнимыми с массами черных дыр в центрах галактик. Это мотивирует исследования других физических следствий коллапса полей темной энергии. Поскольку считается, что первичные взаимодействия полей темной энергии с остальной Вселенной являются гравитационными, особенно интересно было бы исследовать сигналы гравитационных волн, испущенных в процессе коллапса полей темной энергии. На это нацелены текущие исследования, которым посвящена настоящая работа. Для рассмотрения эволюции взаимодействующих с гравитацией полей темной энергии и для выделения сигналов от гравитационных волн описан и использован $(3+1)$-BSSN-формализм. Приведены результаты численных расчетов и описаны сигналы гравитационных волн, испущенных в процессе коллапса полей темной энергии.

DOI: 10.7868/S004445101710011X

1. ВВЕДЕНИЕ

По мере роста точности астрономических наблюдений, растет и прецизионная точность в определении космологических параметров. Это, в свою очередь, приводит к критическому пересмотру наших космологических моделей. В частности, точность определения постоянной Хаббла и независимое определение возраста Вселенной мотивировали нас критически пересмотреть простейшую космологическую модель — плоскую Вселенную с нулевой космологической постоянной [1, 2]. Эти наблюдения подтолкнули одного из авторов [3] рассмотреть идею малой ненулевой энергии вакуума, обусловленной полями, играющими важную роль во Вселенной. За этим последовал целый ряд наблюдательных и теоретических исследований, утвердивших наше понимание того, что теперь называется темной энергией.

Поскольку в настоящее время считается, что темная энергия является преобладающей компонентой во Вселенной, становится совершенно необходимым понимание динамики темной энергии и, в частности, ее гравитационной динамики.

Прежде чем начать детальное рассмотрение гравитационной динамики полевых конфигураций темной энергии, мы предложим краткое введение в теоретико-полевые модели темной энергии.

Теоретико-полевые модели темной энергии и их связи с физикой частиц подробно обсуждались ранее в работе одного из авторов [3]. В этой работе было отмечено, что для соответствия современной космологии характеристики поля должны

* E-mail: anupamsingh.iitk@gmail.com

иметь очень малые массовые масштабы. Реалистичные модели в физике высоких энергий для легких частиц, которые могли бы иметь интересные космологические следствия, обсуждались различными авторами [4]. Было отмечено, что наиболее естественный класс моделей, в которых реализуются такие идеи — это модели масс нейтрино с псевдо-намбу-голдстоуновскими бозонами (PNGB). Причина этого заключается в том, что масштабы масс, соответствующие таким моделям, можно связать с массами нейтрино, в то время как всякая требуемая подгонка значений масс защищена от радиационных поправок симметрией, порождающей намбу-голдстоуновские моды [5].

В работе [6] исследовалось поведение seesaw модели масс нейтрино при конечной температуре; в этой модели были обнаружены фазовые переходы, приводящие к образованию топологических дефектов. Критическая температура в данной модели естественным образом связана с массами нейтрино.

В нашей предыдущей работе [7] было показано, что имеют место коллапс полей темной энергии и образование супермассивных черных дыр. Это подтолкнуло нас исследовать другие физические следствия коллапса полей темной энергии. Поскольку считается, что первичные взаимодействия полей темной энергии с остальной Вселенной являются гравитационными, особенно интересно было бы исследовать сигналы гравитационных волн, испущенных в процессе коллапса полей темной энергии. На это нацелены текущие исследования, которым посвящена настоящая работа.

В следующем разделе мы описываем формализм и эволюционные уравнения для исследования гравитационной динамики конфигураций полей темной энергии. Сначала выпишем уравнения для полей при любом общем потенциале. Это позволит сохранить общность рассуждений. Однако в свете приведенного выше обсуждения реалистичных моделей для легких масс мы быстро перейдем к более специализированным PNGB-моделям, потенциал которых имеет простой и явный вид. Таким образом, для этой цели мы будем использовать простейший PNGB-потенциал [4].

Затем мы перейдем к обсуждению численных расчетов эволюции полей темной энергии, взаимодействующих с гравитацией, и выделению сигналов гравитационных волн. В конце мы обсудим результаты численных расчетов и сигналы от гравитационных волн, образовавшихся в результате коллапса полей темной энергии.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛЕЙ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ В ПРИСУТСТВИИ ГРАВИТАЦИИ

Кратко рассмотрим еще раз изучение гравитационной динамики конфигураций полей темной энергии. Динамика полей в космологическом пространстве-времени широко обсуждалась в различных работах (см., например, [8]). Аналогично, гравитационный коллапс в контексте общей теории относительности также широко обсуждался в различных работах (см., например, [9]). Эти идеи можно совместить с тем, чтобы записать эволюционные уравнения, описывающие динамику взаимодействующих между собой конфигураций полей и пространства-времени. В этом разделе мы обсудим эволюционные уравнения и их решения. В следующих разделах мы обсудим выявление гравитационных волн при коллапсе звезды и опишем полученные результаты.

Будем использовать (3+1)-BSSN-формализм для численного исследования временной эволюции скалярных полей в присутствии гравитации. Необходимый для этого формализм был ранее описан в работе [10].

2.1. Эволюционные уравнения

Действие, описывающее самогравитирующее комплексное скалярное поле в искривленном пространстве-времени, имеет вид

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{16\pi}R - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^*\,\partial_\nu\Phi + V(|\Phi|^2)\right]\right), \quad (1)$$

где R — скаляр Риччи, $g_{\mu\nu}$ — метрика пространства-времени, g — определитель метрики, Φ — скалярное поле, а V — его потенциал. Варьируя действие, получаем уравнения движения для всей системы. Вариации по скалярному полю приводят к уравнению Клейна–Гордона для скалярного поля:

$$\Phi^{;\mu}{}_{;\mu} - \frac{dV}{d|\Phi|^2}\Phi = 0. \quad (2)$$

Варьируя уравнение (1) по метрике $g^{\mu\nu}$, получаем уравнения Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Получающийся тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi^*] -$$
$$- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\Phi^{*,\eta}\Phi_{,\eta} + V(|\Phi|^2)]. \quad (3)$$

Для получения численных решений удобно использовать (3+1)-разложение уравнений Эйнштейна, для которых линейный член можно записать как

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \qquad (4)$$

где γ_{ij} — трехмерная метрика. Латинские индексы соответствуют трем пространственным координатам. Функции α и β^i в уравнении (4) представляют собой калибровочные параметры, известные как функция хода и вектор сдвига, соответственно. Определитель 3-метрики равен γ. Греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, а латинские — от 1 до 3.

Чтобы численно исследовать эволюцию, уравнение Клейна–Гордона можно записать как систему первого порядка. Это можно сделать, разбив скалярное поле на вещественную и мнимую части:

$$\Phi = \phi_1 + i\phi_2,$$

и затем определив следующие переменные в терминах комбинаций их производных:

$$\Pi = \pi_1 + i\pi_2$$

и

$$\psi_a = \psi_{1a} + i\psi_{2a}.$$

Здесь

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}(\partial_t \phi_1 - \beta^c \partial_c \phi_1)$$

и

$$\psi_{1a} = \partial_a \phi_1;$$

аналогично, заменив нижний индекс 1 на 2, можно получить оставшиеся необходимые нам величины. В таких обозначениях эволюционные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\pi_1 + \beta^j \psi_{1j}, \\ \partial_t \psi_{1a} &= \partial_a \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\pi_1 + \beta^j \psi_{1j} \right), \qquad (5) \\ \partial_t \pi_1 &= \partial_j \left(\alpha\sqrt{\gamma}\phi_1^j \right) - \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\gamma}\frac{\partial V}{\partial|\Phi|^2}\,\phi_1, \end{aligned}$$

и можно снова заменить нижний индекс 1 на 2 и получить остающиеся необходимые нам величины. С другой стороны, геометрия пространства-времени изменяется в соответствии с BSSN-формулировкой (3+1)-разложения. Согласно этой формулировке, эволюционирующие переменные — это

$$\Psi = \ln(\gamma_{ij}\gamma^{ij})/12, \quad \tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\Psi}\gamma_{ij}, \quad K = \gamma^{ij}K_{ij},$$

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\Psi}(K_{ij} - \gamma_{ij}K/3),$$

и свернутые символы Кристоффеля

$$\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{jk}\Gamma^i_{jk},$$

вместо ADM-переменных γ_{ij} и K_{ij}. Уравнения для BSSN-переменных описываются в работах [11, 12]:

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi &= -\frac{1}{6}\alpha K, \qquad (6) \\ \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} &= -2\alpha \tilde{A}_{ij}, \qquad (7) \\ \partial_t K &= -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha + \\ &+ \alpha \left[\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2 + \frac{1}{2}\left(-T^t{}_t + T\right) \right], \qquad (8) \\ \partial_t \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\Psi}\left[-D_i D_j \alpha + \alpha\left(R_{ij} - T_{ij}\right)\right]^{TF} + \\ &+ \alpha \left(K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{il}\tilde{A}^l_j \right), \qquad (9) \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Gamma}^i &= -2\tilde{A}^{ij}\alpha_{,j} + 2\alpha\Big(\tilde{\Gamma}^i_{jk}\tilde{A}^{kj} - \\ &- \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}K_{,j} - \tilde{\gamma}^{ij}T_{jt} + 6\tilde{A}^{ij}\phi_{,j} \Big) - \qquad (10) \\ &- \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\beta^l \tilde{\gamma}^{ij}{}_{,l} - 2\tilde{\gamma}^{m(j}\beta^{i)}{}_{,m} + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\beta^l{}_{,l} \Big), \qquad (11) \end{aligned}$$

где D_i — ковариантная производная на пространственной гиперповерхности, T — след тензора энергии-импульса (3), а индекс «TF» обозначает бесследовую часть величины в скобках.

Приведенные выше уравнения справедливы для любого потенциала V общего вида. Разумеется, можно записать соответствующие уравнения для PNGB-полей. Все что нам требуется — это задать подходящий потенциал. В нашем случае поле является вещественным скалярным полем. Простейший потенциал, который можно записать для физически осмысленных PNGB-полей [4], имеет вид

$$V = m^4 \left[K - \cos\left(\frac{\Phi}{f}\right) \right]. \qquad (12)$$

Как обсуждалось в работе [4], m имеет порядок массы нейтрино, а K — порядок единицы. Далее для определенности выберем $K = 1$. Такой потенциал для изучения динамики мы рассмотрим в следующем разделе.

3. ВЫДЕЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Эволюционные уравнения, описанные выше, можно решить численно для изучения гравитационного коллапса конфигураций полей и для выделения гравитационных волн.

Чтобы получить численные решения, которые мы обсудим ниже, требуется общедоступный набор средств и методов Einstein Toolkit [13]. Программа использует метод линий для расчета временной эволюции. В частности, мы использовали итерационный метод Кранка – Николсона.

Основываясь на эволюционных уравнениях, полученных в предыдущем разделе, определим безразмерные величины так, что поле будет измеряться в единицах f, а время и пространство — в единицах f/m^2. Плотность энергии будет измеряться в единицах m^4.

Начальные условия для поля темной энергии имеют вид

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \phi(r)[1+\epsilon\,\mathrm{Re}(Y_{20}(\theta,\phi))], \tag{13}$$

$$\phi(r) = \pi[1-\tanh(r-r_0)], \tag{14}$$

$$\mathrm{Re}(Y_{20}(\theta,\phi)) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2(\theta)-1). \tag{15}$$

Здесь следует заметить, что r_0 является свободным параметром, отражающим диапазон возможных начальных условий, а поле Φ теперь измеряется в терминах его естественных единиц f.

Мы хотим выделить сигнал гравитационных волн, порожденных коллапсом конфигураций полей темной энергии. Это можно сделать численно, для чего мы использовали набор Einstein Toolkit.

Здесь мы получим калибровочно-инвариантные нечетные и четные возмущения. Подготовительный материал для этого можно найти в работах [14–16].

Основное допущение состоит в том, что вдали от источника в волновой зоне пространство-время или, более конкретно, сигнал гравитационной волны, можно описывать в терминах линейных возмущений вблизи шварцшильдовской фоновой метрики. На основании знаний о коэффициентах теории возмущений в рамках численных расчетов легко получить форму волны с помощью калибровочно-инвариантных (или аксиальных) токовых мультиполей с отрицательной четностью $Q^{\times}_{\ell m}$ и (или полярных) массовых мультиполей с положительной четностью $Q^{+}_{\ell m}$ возмущений метрики. Тогда проблема будет заключаться в том, чтобы найти коэффициенты возмущения, связывающие численно полученное пространство-время в волновой зоне с возмущенным шварцшильдовским фоном. Особая методика была исходно развита в работах [17] и [19], соответственно, для исследования гравитационного излучения в терминах нечетных и четных мультиполей вдали от источника. Позднее в работе [20] был предложен калибровочно-инвариантный подход (см. обзор [21]).

На больших расстояниях от источника гравитационные волны можно рассматривать как линейное возмущение на фиксированном фоне, и мы можем записать

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{16}$$

где $g^0_{\mu\nu}$ — фиксированная фоновая метрика, а $h_{\mu\nu}$ — ее линейное возмущение. Обычно предполагается, что фоновая метрика $g^0_{\mu\nu}$ имеет вид метрики Минковского или Шварцшильда, и ее можно записать в виде

$$ds^2 = -N\,dt^2 + A\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2). \tag{17}$$

Можно разложить пространство-время на времени-подобную, радиальную и угловую части, которые в свою очередь помогут нам разложить возмущение метрики $h_{\mu\nu}$ на нечетные и четные мультиполи, т. е. можно записать

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\ell m}\left[\left(h^{\ell m}_{\mu\nu}\right)^{(o)} + \left(h^{\ell m}_{\mu\nu}\right)^{(e)}\right]. \tag{18}$$

Их поведение определяет поведение мультиполей с отрицательной и положительной четностью при преобразовании четности

$$(\theta,\phi) \to (\pi-\theta, \pi+\phi).$$

Нечетные мультиполи преобразуются как $(-1)^{\ell+1}$, а четные мультиполи — как $(-1)^{\ell}$. Всегда можно разложить эти компоненты по их векторным и тензорным сферическим гармоникам (см., например, [22]).

Используя гамильтониан возмущенных уравнений Эйнштейна в ADM-виде [23], можно вывести вариационные принципы для возмущений с отрицательной и положительной четностью [20], с целью получить уравнения движения, аналогичные волновым уравнениям с рассеивающим потенциалом.

Решения этих волновых уравнений, образованные возмущениями нечетно-четной четности, даются мастер-функциями Редже – Уиллера – Монкрифа и Церилли – Монкрифа, соответственно. Функция Редже – Уилера – Монкрифа с отрицательной четностью имеет вид

$$Q^{\times}_{\ell m} \equiv \sqrt{\frac{2(\ell+1)!}{(\ell-2)!}}\,\frac{1}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\times \\ \times\left[(h^{\ell m}_1)^{(o)} + \frac{r^2}{2}\partial_r\left(\frac{(h^{\ell m}_2)^{(o)}}{r^2}\right)\right], \tag{19}$$

а функция Зерилли – Монкрифа с положительной четностью имеет вид

$$Q^{+}_{\ell m} \equiv \sqrt{\frac{2(\ell+1)!}{(\ell-2)!}}\,\frac{r q^{\ell m}_1}{\Lambda\left[r\left(\Lambda-2\right)+6M\right]}, \tag{20}$$

где

$$\Lambda = \ell(\ell+1)$$

и

$$q_1^{\ell m} \equiv r\Lambda\kappa_1^{\ell m} + \frac{4r}{A^2}\kappa_2^{\ell m}, \qquad (21)$$

при этом

$$\kappa_1^{\ell m} \equiv K^{\ell m} + \frac{1}{A}\left(r\partial_r G^{\ell m} - \frac{2}{r}(h_1^{\ell m})^{(e)}\right), \qquad (22)$$

$$\kappa_2^{\ell m} \equiv \frac{1}{2}\left[AH_2^{\ell m} - \sqrt{A}\partial_r\left(r\sqrt{A}K^{\ell m}\right)\right]. \qquad (23)$$

Эти мастер-функции полностью зависят от сферической части метрики, задаваемой коэффициентами N и A, а коэффициенты возмущения для отдельных компонент метрики возмущения $(h_1^{\ell m})^{(o)}$, $(h_2^{\ell m})^{(o)}$, $(h_1^{\ell m})^{(e)}$, $(h_2^{\ell m})^{(e)}$, $H_0^{\ell m}$, $H_1^{\ell m}$, $H_2^{\ell m}$, $K^{\ell m}$ и $G^{\ell m}$ можно получить из любого численного пространства-времени посредством удаления фона Шварцшильда или Минковского [24]. Например, коэффициент $H_2^{\ell m}$ можно получить следующим образом:

$$H_2^{\ell m} = \frac{1}{A}\int (g_{rr} - A)Y_{\ell m}\, d\Omega, \qquad (24)$$

где g_{rr} — радиальная компонента численной метрики, представленная в базисе сферических полярных координат, $Y_{\ell m}$ — сферические гармоники, а $d\Omega$ — линейный элемент поверхности S^2 выделяемой сферы. Коэффициент A представляет собой сферическую часть фоновой метрики и может быть получен проекцией компоненты численной метрики g_{rr} на Y_{00} над выделяемой сферой:

$$A = \frac{1}{4\pi}\int g_{rr}\, d\Omega. \qquad (25)$$

Для остальных коэффициентов возмущения справедливы аналогичные выражения.

Мастер-функции для случаев отрицательной и положительной четности (19) и (20), могут быть напрямую связаны с гравитационно-волновой деформацией и имеют вид

$$h_+ - ih_\times = \frac{1}{\sqrt{2}r}\sum_{\ell,m}\left(Q_{\ell m}^{+} - i\int\limits_{-\infty}^{t} Q_{\ell m}^{\times}(t')dt'\right) \times \\ \times\ {}_{-2}Y^{\ell m}(\theta,\phi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad (26)$$

где ${}_{-2}Y^{\ell m}(\theta,\phi)$ — сферические гармоники со спиновым весом $s = -2$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем результаты по трехмерным численным расчетам полей темной энергии, коллапсирующих с образованием гравитационных волн. Мы использовали (3+1)-BSSN-формализм для численного расчета эволюции. Эволюционные уравнения, которые мы описывали ранее, были решены численно с использованием общедоступного набора средств и методов Einstein Toolkit [13]. В частности, мы получили сигналы гравитационных волн, испущенных в результате коллапса конфигураций поля темной энергии. Таким образом, в результате мы получили нечетные и четные мультиполи $Q_{\ell m}$ для гравитационных волн. Результаты представлены в виде графиков. Заметим, в частности, что временной период полученных гравитационных волн сравним с временным масштабом гравитационного коллапса.

Временные зависимости $Q_{\ell m}$ для различных значений параметров представлены на рис. 1–4. Следует заметить, что время измеряется в единицах f/m^2, что представляет собой фундаментальный временной масштаб динамики, определяемый эволюционными уравнениями.

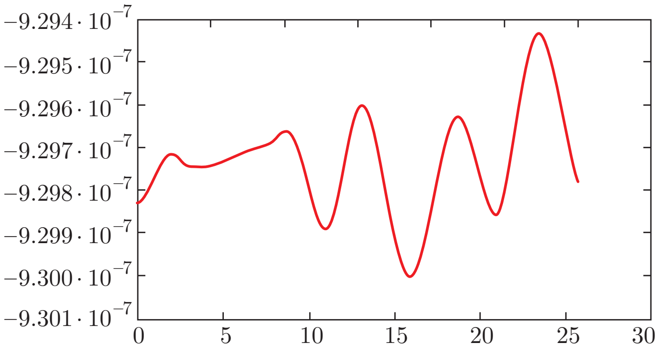

Рис. 1. Четные Q_{lm} при $l = 2$, $m = 0$, $\epsilon = 0.0001$

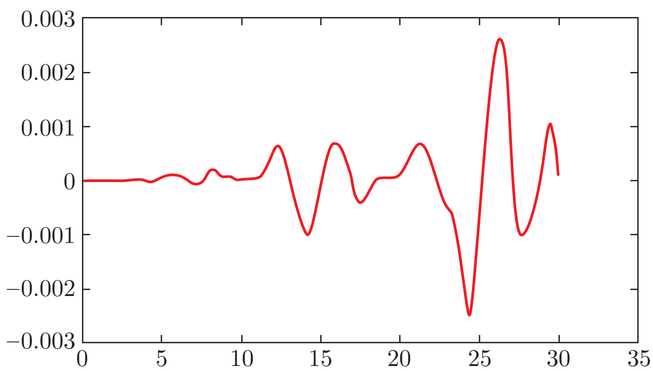

Рис. 2. Четные Q_{lm} при $l = 4$, $m = 0$, $\epsilon = 0.0001$

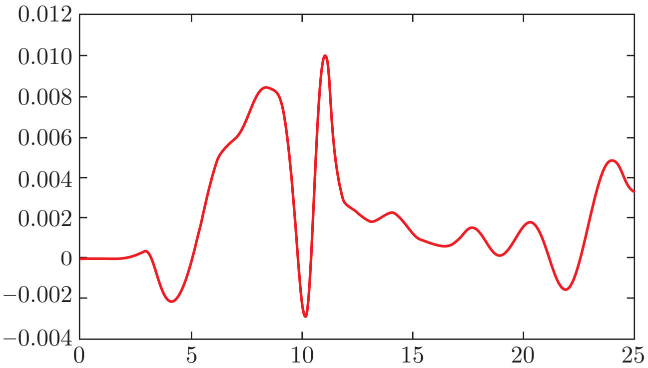

Рис. 3. Четные Q_{lm} при $l = 2$, $m = 0$, $\epsilon = 0.001$

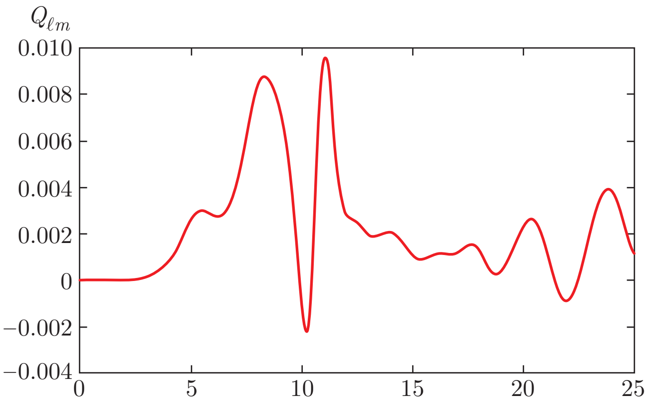

Рис. 4. Четные Q_{lm} при $l = 2$, $m = 0$, $\epsilon = 0.0001$

Для перевода в физические единицы заметим следующее.

Масштаб f представляет собой высокоэнергетический масштаб нарушения симметрии в PNGB-моделях. В see-saw модели масс нейтрино [3] это соответствует тяжелому масштабу нарушения симметрии. В то время как f имеет некоторый интервал возможных значений, типичное значение f в see-saw модели масс нейтрино $f \sim 10^{13}$ ГэВ. Типичное значение $m \sim 10^{-3}$ эВ. Следует также отметить, что до сих пор в физике частиц и космологии мы работали с единицами, для которых $\hbar = c = k = 1$. От этих единиц следует перейти к более привычным с использованием стандартных преобразующих множителей [8]. Таким образом, 1 ГэВ$^{-1}$ $= 1.98 \cdot 10^{-14}$ см и 1 ГэВ$^{-1}$ $= 6.58 \cdot 10^{-25}$ с.

Используя эти преобразующие множители, можно видеть, что фундаментальный временной масштаб динамики, соответствующий f/m^2, равен $2 \cdot 10^5$ лет.

Заметим, в частности, что временной период полученных гравитационных волн сравним с фундаментальным временным масштабом динамики.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках исследовательского гранта Института информационных технологий Л. Н. Миттала. Авторы благодарят Х. Харквола за полезные обсуждения и сотрудничество на ранних этапах выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Pierce, D. L. Welch, R. D. McClure, S. van den Bergh, R. Racine, and P. B. Stetson, Nature **371**, 385 (1994).

2. W. L. Freedman et al., Nature **371**, 757 (1994).

3. A. Singh, Phys. Rev. D **52**, 6700 (1995).

4. A. K. Gupta, C. T. Hill, R. Holman, and E. W. Kolb, Phys. Rev. D **45**, 441 (1992).

5. G. 'tHooft, *Naturalness, Chiral Symmetry, and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*, in *Recent Developments in Gauge Theories*, ed. by G. 't Hooft, Plenum Press, New York (1980).

6. R. Holman and A. Singh, Phys. Rev. D **47**, 421 (1993).

7. V. Jhalani, H. Kharkwal, and A. Singh, JETP **123**, 827 (2016).

8. E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley Pub. Co. (1990).

9. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Inc. (1972).

10. J. Balakrishna et al., Class. Quant. Grav. **23**, 2631 (2006).

11. M. Alcubierre, B. Breugmann, T. Dramlitsch, J. A. Font, P. Papadopoulos, E. Seidel, N. Stergioulas, and R. Takahashi, Phys. Rev. D **15**, 124011 (2000).

12. T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro, Phys. Rev. D **59**, 024007 (1998); M. Shibata and T. Nakamura, Phys. Rev. D **52**, 5428 (1995).

13. EINSTEIN TOOLKIT: A Community Toolkit for Numerical Relativity, http://www.einsteintoolkit.org.

14. K. Camarda and E. Swidel, Phys. Rev. D **59**, 064019 (1999).

15. L. Rezzolla et al., Phys. Rev. D **59**, 064001 (1999).

16. J. Baker et al., Phys. Rev. D **62**, 127701 (2000).

17. T. Regge and J. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).

18. F. J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. **24**, 737 (1970).

19. F. J. Zerilli, J. Math. Phys. **11**, 2203 (1970).

20. V. Moncrief, Annals of Physics **88**, 323 (1974).

21. A. Nagar and L. Rezzolla, Class. Quantum Grav. **22**, R167 (2005); erratum-ibid. **23**, 4297 (2006).

22. K. Thorne, Rev. Mod. Phys. **52**, 285 (1980).

23. R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, General Relativity and Gravitation, **40**, 1997 (2008).

24. K. Camarda and E. Seidel, Phys. Rev. D **59**, 064019 (1999).