

# КОГЕРЕНТНОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ ПУЧКОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ В ГЕОМЕТРИИ РАССЕЯНИЯ БРЭГГА

*С. В. Блажевич, А. В. Носков\**

*Белгородский государственный университет  
308015, Белгород, Россия*

Поступила в редакцию 12 марта 2017 г.

Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения, возбуждаемого при прохождении расходящегося пучка релятивистских электронов через периодическую слоистую мишень. Для геометрии рассеяния Брэгга получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучения.

DOI: 10.7868/S0044451017080053

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона в периодической слоистой среде в приближении динамической теории дифракции в виде вкладов параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) (parametric X-rays, PXR) и дифрагированного переходного излучения (ДПИ) (diffracted transition radiation, DTR) впервые рассматривалось в работе [1]. В периодической слоистой среде ПРИ возникает вследствие дифракции псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях мишени аналогично тому, как вследствие дифракции на системе параллельных атомных плоскостей возникает ПРИ в монокристалле [2, 3]. ДПИ является следствием дифракции на слоях мишени фотонов переходного излучения, генерируемого на входной поверхности мишени, по аналогии с ДПИ в монокристалле [4–6]. Динамическая теория излучения релятивистских электронов в периодических слоистых средах [1] хорошо описывает экспериментальные данные, представленные в работе [7].

Необходимо отметить, что традиционно процесс излучения в периодических слоистых средах рас-

сматривался в геометрии рассеяния Брэгга и только для частного случая симметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда угол между поверхностью мишени и отражающими плоскостями равен нулю. Такое рассмотрение было проведено и в работе [1]. Процесс когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [8], а в геометрии рассеяния Брэгга — в работе [9]. В работе [10] исследовалось ДПИ, возбуждаемое пучком релятивистских электронов высоких энергий, пересекающих тонкую монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Лауэ. В работе было получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ для случая, когда длина пути электрона в мишени существенно меньше длины экстинкции рентгеновских волн в кристалле, и была продемонстрирована зависимость угловой плотности ДПИ от расходимости пучка релятивистских электронов.

В настоящей работе рассматривается когерентное рентгеновское излучение пучка релятивистских электронов, пересекающих мишень в виде периодической слоистой среды в геометрии рассеяния Брэгга, в общем случае асимметричного относительно поверхности мишени отражения кулоновского поля электрона.

\* E-mail: noskovbupk@mail.ru

## 2. ГЕОМЕТРИЯ ПРОЦЕССА ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим пучок релятивистских электронов, пересекающих периодическую в геометрии рассеяния Брэгга (рис. 1) слоистую мишень, состоящую из чередующихся слоев толщиной  $l_1$  и  $l_2$  с диэлектрическими восприимчивостями соответственно  $\chi_1$  и  $\chi_2$  ( $T = l_1 + l_2$  — период слоистой мишени). Отражающие слои расположены под некоторым углом  $\delta$  к поверхности мишени (рис. 1), что соответствует случаю асимметричного отражения поля излучения ( $\delta = 0$  — частный случай симметричного отражения). Введем угловые переменные  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\theta_0$  в соответствии с определениями скорости релятивистского электрона  $\mathbf{V}$  и единичных векторов  $\mathbf{n}$  (в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона) и  $\mathbf{n}_g$  (в направлении рассеяния Брэгга):

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\theta}_0, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = 0, \\ &\quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta$  — угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения  $\mathbf{e}_2$ ,  $\psi$  — угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ ,  $\theta_0$  — угол между направлением распространения падающего фотона и осью  $\mathbf{e}_1$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$  — лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих, параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка:  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{\parallel} + \boldsymbol{\theta}_{\perp}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_{0\parallel} + \boldsymbol{\theta}_{0\perp}$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_{\parallel} + \boldsymbol{\psi}_{\perp}$ .

## 3. АМПЛИТУДА ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

При решении задачи будем рассматривать уравнение для фурье-образа  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  электромагнитного поля, возбуждаемого электроном в периодической слоистой среде, следующее из системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} [k^2 - \omega^2(1 + \chi_0)] \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - \\ - \omega^2 \sum_{\mathbf{g}}' \chi_{-\mathbf{g}} \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = 4\pi i \omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (2)$$

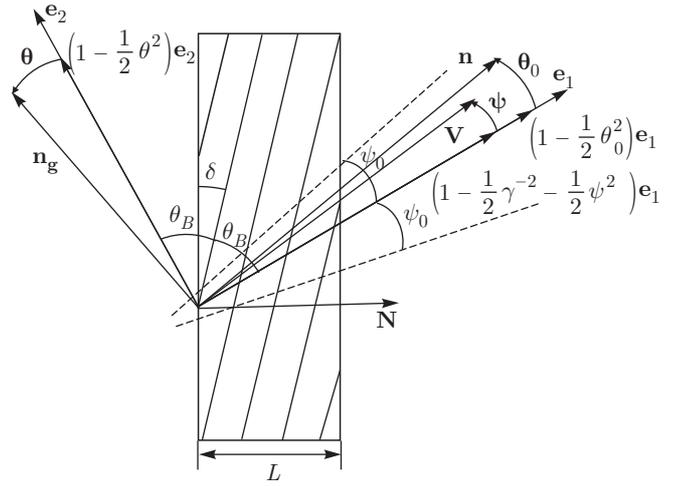


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

где  $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V})$  — фурье-образ плотности тока излучающего электрона,  $\chi_0(\omega)$  — средняя диэлектрическая восприимчивость периодической слоистой среды,  $\chi_{\mathbf{g}}$  и  $\chi_{-\mathbf{g}}$  — коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости периодической структуры по векторам  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} \chi(\omega, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= \sum_{\mathbf{g}} [\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)] \exp(i\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0$ ,  $\chi_{\mathbf{g}} = \chi'_{\mathbf{g}} + i\chi''_{\mathbf{g}}$ . Вектор  $\mathbf{g}$  аналогичен вектору обратной решетки в кристалле, он перпендикулярен слоям мишени и его длина равна  $g = (2\pi/T)n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В случае  $\chi_{-\mathbf{g}} = 0$  выражение (2) описывает электрическое поле в однородной аморфной среде.

Величины  $\chi_0$  и  $\chi_{\mathbf{g}}$  в рассматриваемой периодической структуре имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi_0(\omega) &= \frac{l_1}{T} \chi_1 + \frac{l_2}{T} \chi_2, \\ \chi_{\mathbf{g}}(\omega) &= \frac{\exp(-igl_1) - 1}{igT} (\chi_2 - \chi_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следуют используемые далее соотношения

$$\begin{aligned} \chi'_0 &= \frac{l_1}{T} \chi'_1 + \frac{l_2}{T} \chi'_2, \quad \chi''_0 = \frac{l_1}{T} \chi''_1 + \frac{l_2}{T} \chi''_2, \\ \text{Re} \sqrt{\chi_{\mathbf{g}} \chi_{-\mathbf{g}}} &= \frac{2 \sin(gl_1/2)}{gT} (\chi'_2 - \chi'_1), \\ \text{Im} \sqrt{\chi_{\mathbf{g}} \chi_{-\mathbf{g}}} &= \frac{2 \sin(gl_1/2)}{gT} (\chi''_2 - \chi''_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Влияние вещества на формирование и распространения излучения определяется только величинами  $\chi_0(\omega)$  и  $\chi_{\mathbf{g}}(\omega)$ . При этом вблизи передней и задней границ мишени (на толщине порядка толщины наибольшего слоя) эти величины меняются вдоль границы, так как меняются вдоль границы толщины слоев  $l_1$  и  $l_2$ , так как они обрезаны. Но, поскольку когерентное формирование и рассеяние излучения происходят на большом количестве слоев, изменение рассматриваемых величин  $\chi_0(\omega)$  и  $\chi_{\mathbf{g}}(\omega)$  вблизи границ мишени никак не скажется на спектрально-угловой плотности излучения.

Так как излучаемое релятивистским электроном электромагнитное поле в рентгеновском диапазоне частот является поперечным, падающая,  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ , и дифрагированная в периодической слоистой среде,  $\mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega)$ , электромагнитные волны определяются двумя амплитудами с разными поперечными поляризациями:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)}, \quad (6)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = E_{\mathbf{g}}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + E_{\mathbf{g}}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(2)},$$

где векторы  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_0^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}$ , а векторы  $\mathbf{e}_1^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_1^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}_{\mathbf{g}} = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ . Векторы  $\mathbf{e}_0^{(2)}$ ,  $\mathbf{e}_1^{(2)}$  лежат в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_{\mathbf{g}}$  ( $\pi$ -поляризация), а векторы  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_1^{(1)}$  перпендикулярны ей ( $\sigma$ -поляризация). В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции уравнение (2), с учетом выражений (6), сводится к хорошо известной системе уравнений [11]:

$$\begin{aligned} & [\omega^2(1 + \chi_0) - k^2] E_0^{(s)} + \omega^2 \chi_{-\mathbf{g}} C^{(s,\tau)} E_{\mathbf{g}}^{(s)} = \\ & = 8\pi^2 i e \omega \mathbf{e}_0^{(s)} \cdot \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)} E_0^{(s)} + [\omega^2(1 + \chi_0) - k_{\mathbf{g}}^2] E_{\mathbf{g}}^{(s)} = 0.$$

Величины  $C^{(s,\tau)}$  в системе уравнений (7) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C^{(s,\tau)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} \cdot \mathbf{e}_1^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \\ C^{(2)} &= |\cos 2\theta_B|, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_0^{(1)} \cdot \mathbf{V} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \mathbf{e}_0^{(2)} \cdot \mathbf{V} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel},$$

где  $\theta_B$  — угол между осью пучка электрона и отражающими слоями (угол Брэгга). Длина вектора обратной решетки определяется выражением  $g = 2\omega_B \sin \theta_B / V$ , где  $\omega_B$  — частота Брэгга. Система уравнений (7) при  $s = 1$  и  $\tau = 2$  описывает поля с  $\sigma$ -поляризацией. При  $s = 2$  система (7) описывает поля с  $\pi$ -поляризацией; при этом, если  $2\theta_B < \pi/2$ , то  $\tau = 2$ , а в противном случае  $\tau = 1$ .

Решим следующее из системы (7) дисперсионное уравнение для рентгеновских волн в периодической слоистой среде:

$$\begin{aligned} & [\omega^2(1 + \chi_0) - k^2] [\omega^2(1 + \chi_0) - k_{\mathbf{g}}^2] - \\ & - \omega^4 \chi_{-\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}} C^{(s)^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Длины волновых векторов падающего и дифрагированного фотонов в периодической слоистой среде будем искать в виде

$$k = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad k_{\mathbf{g}} = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_{\mathbf{g}}.$$

При этом будем использовать известное соотношение, связывающее динамические добавки  $\lambda_0$  и  $\lambda_{\mathbf{g}}$  [12]:

$$\lambda_{\mathbf{g}} = \frac{\omega \beta}{2} + \lambda_0 \frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0},$$

где

$$\beta = \alpha - \chi_0 \left( 1 - \frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0} \right), \quad \alpha = \frac{1}{\omega^2} (k_{\mathbf{g}}^2 - k^2),$$

$$\gamma_0 = \cos \phi_0, \quad \gamma_{\mathbf{g}} = \cos \phi_{\mathbf{g}},$$

$\phi_0$  — угол между волновым вектором подающей волны  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  и вектором нормали к поверхности пластинки  $\mathbf{N}$ ,  $\phi_{\mathbf{g}}$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}_{\mathbf{g}} = k_{\mathbf{g}}\mathbf{n}_{\mathbf{g}}$  и вектором нормали (см. рис. 1). Так как динамические добавки малы,  $|\lambda_0| \ll \omega$ ,  $|\lambda_{\mathbf{g}}| \ll \omega$ , можно показать, что  $\theta_0 \approx \theta$  (см. рис. 1). В дальнейшем будем это использовать.

Решая уравнение (9) относительно  $\lambda_0$  и  $\lambda_{\mathbf{g}}$ , получим выражения, описывающие динамические добавки для падающего и дифрагированного фотонов в периодической слоистой среде:

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega \frac{C^{(s)} |\chi_2' - \chi_1'| |\sin(\pi n / (1+r))|}{2\pi n \varepsilon} \left[ \xi^{(s)}(\omega) - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \mp \sqrt{\xi^{(s)^2}(\omega) - \varepsilon - i\rho^{(s)} [(1+\varepsilon)\xi^{(s)}(\omega) - 2\kappa^{(s)}\varepsilon] - \rho^{(s)^2} \left( \frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)^2}\varepsilon \right)} \right], \quad (10a)$$

$$\lambda_g^{(1,2)} = \omega \frac{C^{(s)} |\chi_2' - \chi_1'| |\sin(\pi n / (1+r))|}{2\pi n} \left[ \xi^{(s)}(\omega) - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\xi^{(s)^2}(\omega) - \varepsilon - i\rho^{(s)} [(1+\varepsilon)\xi^{(s)}(\omega) - 2\kappa^{(s)}\varepsilon] - \rho^{(s)^2} \left( \frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)^2}\varepsilon \right)} \right]. \quad (10b)$$

Заметим, что дисперсионное уравнение (9) дает только два значимых решения в рентгеновской области частот, так как выполняются неравенства  $\lambda_0^2 \ll 2\omega\lambda_0$  и  $\lambda_g^2 \ll 2\omega\lambda_g$ . В выражениях (10) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi^{(s)}(\omega) &= \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \\ \eta^{(s)}(\omega) &= \frac{2\pi^2 n^2}{T^2 \omega_B} \times \\ &\times L_{ext}^{(s)} \left[ 1 - \frac{\omega}{\omega_B} \left( 1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2 n^2} - 1} \right) \right], \\ L_{ext}^{(s)} &= \frac{1}{\omega} \frac{\pi n}{|\sin(\pi n / (1+r))| |\chi_2' - \chi_1'| C^{(s)}}, \\ \omega_B &= \frac{\pi n}{T \sin \theta_B}, \quad \varepsilon = \frac{|\gamma_g|}{\gamma_0} = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \\ \nu^{(s)} &= \frac{C^{(s)} |\sin(\pi n / (1+r))|}{\pi n / (1+r)} \left| \frac{\chi_2' - \chi_1'}{\chi_1' + r\chi_2'} \right|, \\ \kappa^{(s)} &= \frac{C^{(s)} |\sin(\pi n / (1+r))|}{\pi n / (1+r)} \left| \frac{\chi_2'' - \chi_1''}{\chi_1'' + r\chi_2''} \right|, \\ \rho^{(s)} &= \frac{\chi_1'' + r\chi_2''}{1+r} \frac{\pi n}{|\sin(\pi n / (1+r))| |\chi_2' - \chi_1'| C^{(s)}}, \\ \chi_0' &= \frac{l_1 \chi_1' + l_2 \chi_2'}{T}, \quad r = \frac{l_2}{l_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку в области рентгеновских частот выполняется неравенство  $(2\pi^2 n^2 / T^2 \omega_B) L_{ext}^{(s)} \gg 1$ , величина  $\eta^{(s)}(\omega)$  является быстрой функцией частоты  $\omega$ . Поэтому для дальнейшего анализа спектров ПРИ и ДПИ очень удобно рассматривать  $\eta^{(s)}(\omega)$  или  $\xi^{(s)}(\omega)$  как спектральные переменные, характеризующие частоту  $\omega$ .

Параметр поглощения  $\rho^{(s)}$  может быть представлен как отношение длины экстинкции  $L_{ext}^{(s)}$  к длине поглощения  $L_{abs} = (1+r)/\omega(\chi_1'' + r\chi_2'')$  рентгеновских волн в периодической слоистой среде:  $\rho^{(s)} = L_{ext}^{(s)} / L_{abs}$ . Параметр  $\nu^{(s)}$ , принимающий значе-

ния в промежутке  $0 \leq \nu^{(s)} \leq 1$ , определяет степень отражения поля от периодической слоистой структуры, которая обуславливается характером интерференции волн, отраженных от разных плоскостей: конструктивным ( $\nu^{(s)} \approx 1$ ) или деструктивным ( $\nu^{(s)} \approx 0$ ).

Параметр  $\kappa^{(s)}$  определяет степень проявления эффекта аномального низкого фотопоглощения (эффекта Бормана) в прохождении рентгеновских фотонов через периодическую слоистую структуру. Необходимым условием проявления эффекта Бормана как для кристаллической, так и для периодической слоистой структуры является  $\kappa^{(s)} \approx 1$ . Для фиксированного значения  $\theta_B$  параметр  $\varepsilon$  определяет ориентацию входной поверхности мишени относительно отражающих слоев. При уменьшении угла падения ( $\theta_B + \delta$ ) электрона на мишень параметр  $\delta$  становится отрицательным и далее возрастает по модулю (в предельном случае  $\delta \rightarrow -\theta_B$ ), что приводит и к возрастанию  $\varepsilon$ . Напротив, при увеличении угла падения  $\varepsilon$  убывает (предельный случай  $\delta \rightarrow \theta_B$ ). В случае симметричного отражения, когда  $\delta = 0$ , параметр асимметрии  $\varepsilon = 1$ . На рис. 1 указано положительное направление угла  $\delta$ .

Решение первого уравнения системы (7) для падающего поля в вакууме имеет вид

$$E_0^{(s)vac} = \frac{8\pi^2 i e V \Omega^{(s)}}{\omega} \left[ \frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \left( -\chi_0(\omega) - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right) \right]^{-1} \delta(\lambda_g^* - \lambda_g), \quad (12a)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_g^* &= \frac{\omega\beta}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0^*, \\ \lambda_0^* &= \frac{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0}{2}, \\ \Omega^{(1)} &= \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (7) для дифрагированного поля в рассматриваемой периодической слоистой среде имеет вид

$$E_{\mathbf{g}}^{(s)medium} = \frac{8\pi^2 ieV\Omega^{(s)}}{\omega} \omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)} \times \left[ 4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_{\mathbf{g}}^2} (\lambda_{\mathbf{g}} - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}) (\lambda_{\mathbf{g}} - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}) \right]^{-1} \times \delta(\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}) + E_{\mathbf{g}}^{(s)(1)} \delta(\lambda_{\mathbf{g}} - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}) + E_{\mathbf{g}}^{(s)(2)} \delta(\lambda_{\mathbf{g}} - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}), \quad (12b)$$

где  $E_{\mathbf{g}}^{(s)(1)}$  и  $E_{\mathbf{g}}^{(s)(2)}$  — свободные поля, соответствующие двум решениям (10b) дисперсионного уравнения (9).

Дифрагированное поле в вакууме запишем в виде

$$E_{\mathbf{g}}^{(s)vac} = E_{rad}^{(s)} \delta\left(\lambda_{\mathbf{g}} + \frac{\omega\chi_0}{2}\right),$$

где  $E_{rad}^{(s)}$  — искомое поле излучения. Выражение, связывающее дифрагированное и падающее поля в среде, следует из второго уравнения системы (7):

$$E_0^{(s)medium} = \frac{2\omega\lambda_{\mathbf{g}}}{\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)}} E_{\mathbf{g}}^{(s)medium}.$$

Воспользовавшись обычными граничными условиями на входной и выходной поверхностях мишени,

$$\int E_0^{(s)vac} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int E_0^{(s)medium} d\lambda_{\mathbf{g}}, \int E_{\mathbf{g}}^{(s)medium} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int E_{\mathbf{g}}^{(s)vac} d\lambda_{\mathbf{g}}, \int E_{\mathbf{g}}^{(s)medium} \exp\left(i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}}{\gamma_{\mathbf{g}}} L\right) d\lambda_{\mathbf{g}} = 0, \quad (13)$$

получим выражение для поля излучения из периодической слоистой среды в направлении  $\mathbf{k}_{\mathbf{g}}$ :

$$E_{rad}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)}}{2\omega\Delta} \times \left[ \left( \frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_{\mathbf{g}}|} B} - \frac{2\omega\Delta^{(2)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_{\mathbf{g}}^2} (\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)})} \right) (1 - \Delta^{(1)}) - \left( \frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_{\mathbf{g}}|} B} - \frac{2\omega\Delta^{(1)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_{\mathbf{g}}^2} (\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)})} \right) (1 - \Delta^{(2)}) \right], \quad (14a)$$

где введены обозначения

$$\Delta = \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)} \exp\left(i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}}{\gamma_{\mathbf{g}}} L\right) - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)} \exp\left(i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}}{\gamma_{\mathbf{g}}} L\right), \Delta^{(2)} = \exp\left(i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}}{\gamma_{\mathbf{g}}} L\right), \Delta^{(1)} = \exp\left(i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}}{\gamma_{\mathbf{g}}} L\right), B = -\chi_0(\omega) - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}} \lambda_{\mathbf{g}}^* + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}}. \quad (14b)$$

Поскольку поле излучения содержит вклады ПРИ и ДПИ, представим амплитуду  $E_{rad}^{(s)}$  как сумму амплитуд ПРИ и ДПИ:

$$E_{rad}^{(s)} = E_{PXR}^{(s)} + E_{DTR}^{(s)}, \quad (15a)$$

$$E_{PXR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)}}{2\omega\Delta} \times \left[ \left( \frac{2\omega\Delta^{(1)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_{\mathbf{g}}^2} (\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)})} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{|\gamma_{\mathbf{g}}|} \lambda_0^*} \right) (1 - \Delta^{(2)}) - \left( \frac{2\omega\Delta^{(2)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_{\mathbf{g}}^2} (\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)})} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{|\gamma_{\mathbf{g}}|} \lambda_0^*} \right) (1 - \Delta^{(1)}) \right], \quad (15b)$$

$$E_{DTR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)}}{2\omega\Delta} \times \left[ \frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_{\mathbf{g}}|} B} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{|\gamma_{\mathbf{g}}|} \lambda_0^*} \right] (\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)}). \quad (15c)$$

Выражение (15b) представляет амплитуду поля ПРИ, которое возникает в результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях рассматриваемой периодической слоистой структуры, а выражение (15c) — амплитуду поля ДПИ, возникающего вследствие дифракции на слоях структуры переходного излучения, рождающегося на входной поверхности. Выражение (15b) описывает две ветви решения дисперсионного соотношения, дающие вклад в выход ПРИ, которым соответствуют две рентгеновские волны, формирующиеся вместе с равновесным электромагнитным полем быстрой частицы. Вклад в излучение дает та ветвь ПРИ, для которой действительная часть знаменателя в формуле (15b) может обратиться в нуль,  $\text{Re}(\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1,2)}) = 0$ .

**4. СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВАЯ ПЛОТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ**

Рассмотрим тонкую непоглощающую мишень, для которой длина пути,  $L/|\gamma_{\mathbf{g}}|$ , дифрагированного фотона в мишени значительно меньше длины поглощения  $L_{abs}$  рентгеновских волн в периодической слоистой среде:  $L/|\gamma_{\mathbf{g}}| \ll L_{abs}$ , чему соответствует условие  $\rho^{(s)} \approx 0$ . Исключим поглощение из рассмотрения, положив  $\rho^{(s)} = 0$ .

Подставляя (15b) в известное [11] выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения,

$$\omega \frac{d^2 N^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} |E_{rad}^{(s)}|^2, \quad (16)$$

и учитывая (10), получаем выражение для спектрально-углового распределения плотности ПРИ релятивистского электрона с учетом отклонения направления его скорости  $\mathbf{V}$  относительно оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$  (угол  $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$ ):

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)^2}}{[\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0']^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (17)$$

$$R_{PXR}^{(s)} = R_{PXR}^{(1)(s)} + R_{PXR}^{(2)(s)} + R_{PXR}^{(INT)(s)}, \quad (17a)$$

$$R_{PXR}^{(1)(s)} = \frac{(\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon})^2 \sin^2(b^{(s)}\Sigma^+/2)}{\Sigma (\Sigma^+)^2}, \quad (17b)$$

$$R_{PXR}^{(2)(s)} = \frac{(\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon})^2 \sin^2(b^{(s)}\Sigma^-/2)}{\Sigma (\Sigma^-)^2}, \quad (17c)$$

$$R_{PXR}^{(INT)(s)} = \frac{\varepsilon}{\Sigma} \frac{\cos\left(b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon}}}{\varepsilon}\right) \left\{ \cos\left[b^{(s)} \left(\frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)}\right)\right] - \cos\left(b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon}}}{\varepsilon}\right) \right\}}{(\xi^{(s)}/\varepsilon - \sigma^{(s)})^2 + (\varepsilon - \xi^{(s)^2})/\varepsilon^2}. \quad (17d)$$

В формулах (17) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Sigma &= \xi^{(s)^2} - \varepsilon + \varepsilon \sin^2\left(\frac{b^{(s)}\sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon}}}{\varepsilon}\right), \\ \Sigma^+ &= \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon}}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)}, \\ \Sigma^- &= \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2 - \varepsilon}}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)}, \\ \sigma^{(s)} &= \frac{\pi n [\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0']}{C^{(s)} |\chi_2' - \chi_1'| |\sin|(\pi n / (1+r))|}, \\ b^{(s)} &= \frac{1}{2 \sin(\theta_B + \delta)} \frac{L}{L_{ext}^{(s)}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где параметр  $b^{(s)}$  равен половине длины пути электрона в мишени,  $L_e = L/\sin(\theta_B + \delta)$ , выраженной в длинах экстинкции  $L_{ext}^{(s)}$  рентгеновских волн в периодической слоистой среде. Спектральная функция  $R_{PXR}^{(s)}$  представлена в виде суммы двух ветвей рентгеновских волн, соответствующих динамическим добавкам  $\lambda_{\mathbf{g}}^{(1,2)}$  (см. (10b)) и их интерференции.

Вклад первой и второй ветвей возбужденных рентгеновских волн в спектр ПРИ будет существенен, когда соответствующие им уравнения

$$\frac{\xi^{(s)}(\omega) + \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} = 0, \quad (19a)$$

$$\frac{\xi^{(s)}(\omega) - \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} = 0 \quad (19b)$$

имеют решения. Решение уравнений (19) определяет частоту, в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов ПРИ, излучаемых под фиксированным углом (под углом наблюдения  $\theta$ ) относительно оси детектора. Из уравнений (19) следует, что максимум спектра ПРИ всегда расположен вне области полного отражения (экстинкции):

$$\xi^{(s)}(\omega) = \sqrt{\varepsilon} + \frac{(\sigma^{(s)}\sqrt{\varepsilon} - 1)^2}{2\sigma^{(s)}} > \sqrt{\varepsilon}. \quad (20)$$

Поэтому формулы (17) правильно описывают спектр ПРИ для тонкого кристалла.

Область полного отражения определяется следующими неравенствами:

$$-\sqrt{\varepsilon} < \xi^{(s)}(\omega) < \sqrt{\varepsilon},$$

$$-\sqrt{\varepsilon} - \frac{1 + \varepsilon}{2\nu^{(s)}} < \eta^{(s)}(\omega) < \sqrt{\varepsilon} - \frac{1 + \varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \quad (21)$$

из которых видно, что ширина этой области определяется величиной  $2\sqrt{\varepsilon}$ .

Уравнение (19а) имеет решение при условии  $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)^2}$ ; при этом всегда должно выполняться условие  $\xi^{(s)}(\omega) < \sigma^{(s)}\varepsilon$ . Уравнение (19б) разрешимо при условии  $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)^2}$ ; при этом всегда должно выполняться условие  $\xi^{(s)}(\omega) > \sigma^{(s)}\varepsilon$ . Таким образом, при условиях  $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)^2}$  и  $\xi^{(s)}(\omega) < \sigma^{(s)}\varepsilon$  будет существенна только первая ветвь ПРИ,  $R_{PXR}^{(1)(s)}$ , а при  $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)^2}$  и  $\xi^{(s)}(\omega) > \sigma^{(s)}\varepsilon$  — только вторая ветвь  $R_{PXR}^{(2)(s)}$ .

Для удобства анализа параметр  $\sigma^{(s)}$  запишем в виде

$$\sigma^{(s)} = \frac{1}{\nu^{(s)}} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{\gamma^2|\chi'_0|} + \frac{(\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2}{|\chi'_0|} + 1 \right). \quad (22)$$

Поскольку  $\sigma^{(s)} > 1$  при всех значениях угла наблюдения  $\theta(\theta_\perp, \theta_\parallel)$  (см. (22)), в традиционно рассматриваемом случае симметричного отражения ( $\varepsilon = 1$ ) вклад в спектр ПРИ всегда дает только первая ветвь  $R_{PXR}^{(1)(s)}$ . В случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда  $\varepsilon < 1$ , в зависимости от угла наблюдения  $\theta(\theta_\perp, \theta_\parallel)$  будет выполняться неравенство либо  $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)^2}$ , либо  $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)^2}$ . Таким образом, в случае  $\varepsilon < 1$  в угловую плотность ПРИ будут давать вклад обе ветви ПРИ.

Найдем угловую плотность ПРИ, проинтегрировав выражение (17) по частотной функции  $\xi^{(s)}(\omega)$ , используя соотношение

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{T^2\omega_B}{2L_{ext}\pi^2n^2} d\xi^{(s)},$$

которое следует из выражения для  $\xi^{(s)}(\omega)$  в (11). Угловая плотность ПРИ примет следующий вид:

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^4 n^2} \frac{\Omega^{(s)^2}}{\sigma^{(s)^2}} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} R_{PXR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega). \quad (23)$$

На основе выражения (23) покажем возможность вклада второй ветви ПРИ в угловую плотность ПРИ

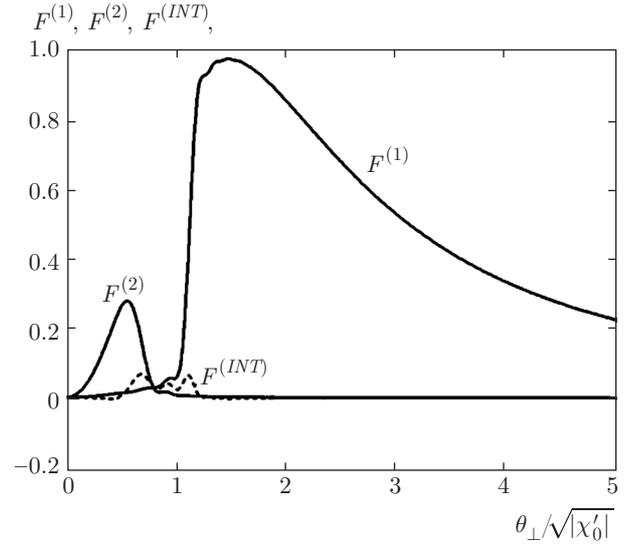


Рис. 2. Угловые плотности двух ветвей ПРИ и их интерференционное слагаемое:  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\nu^{(s)} = 0.8$ ,  $1/\gamma^2|\chi'_0| = 0.1$ ,  $b^{(s)} = 15$

при условии  $\varepsilon < 1$ . Для того чтобы провести вычисления, запишем угловую плотность (23) для  $\sigma$ -поляризации ( $s = 1$ ) при условиях  $\psi_\perp = 0$ ,  $\psi_\parallel = 0$ ,  $\theta_\parallel = 0$  в виде

$$\frac{dN_{PXR}^{(1)}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)} |\chi'_0|}{2\pi^4 n^2} \times$$

$$\times \left( F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(INT)} \right), \quad (24a)$$

$$F^{(1,2,INT)} = \nu^{(s)^2} \frac{\theta_\perp^2/|\chi'_0|}{\left( \frac{1}{\gamma^2|\chi'_0|} + \frac{\theta_\perp^2}{|\chi'_0|} + 1 \right)^2} \times$$

$$\times \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} R_{PXR}^{(1,2,INT)(s)} d\xi^{(1)}, \quad (24b)$$

где функции  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $F^{(INT)}$  описывают угловые плотности ПРИ двух ветвей рентгенового излучения и их интерференционное слагаемое.

На рис. 2 представлены кривые, описывающие угловые плотности ПРИ для двух различных ветвей рентгеновских волн и их интерференционное слагаемое, построенные по формулам (24b) при условии  $\varepsilon < 1$ , когда в зависимости от угла наблюдения вклад в суммарную угловую плотность дает первая и вторая ветви ПРИ. Аналитический анализ показал, что небольшие колебания (дрожания) на верхней части кривой, описывающей угловую плотность первой ветви ПРИ (рис. 2), обусловлены связью двух ветвей возбужденных рентгеновских волн посредством величины  $\Delta$  в знаменателе выражения

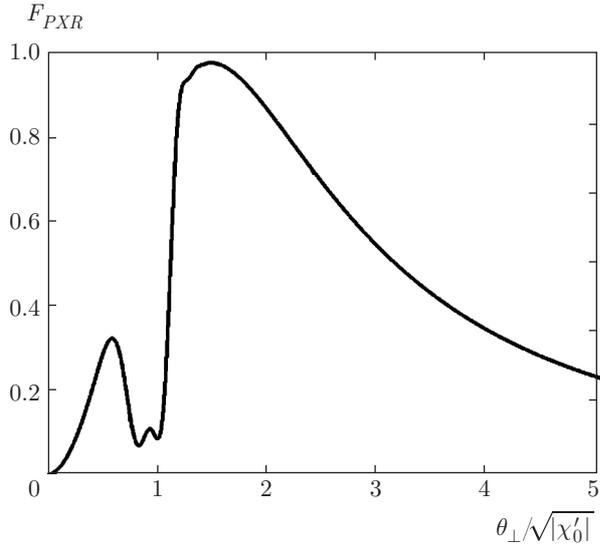


Рис. 3. Суммарная угловая плотность ПРИ  $F_{PXR} = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(INT)}$ :  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\nu^{(s)} = 0.8$ ,  $1/\gamma^2|\chi'_0| = 0.1$ ,  $b^{(s)} = 15$

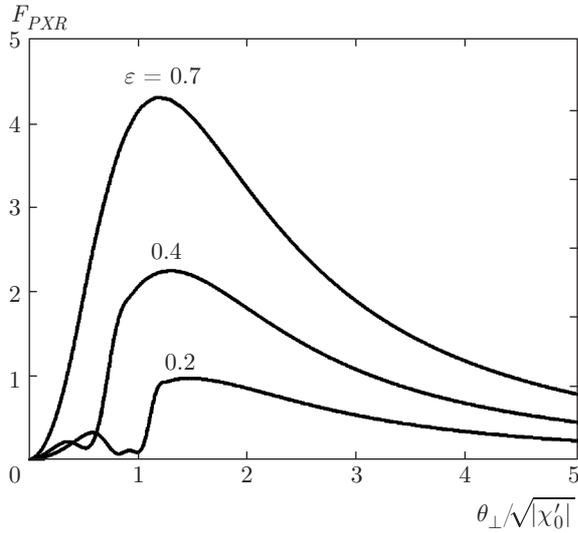


Рис. 4. Угловые плотности ПРИ при различных значениях коэффициента асимметрии  $\varepsilon$ :  $\nu^{(s)} = 0.8$ ,  $1/\gamma^2|\chi'_0| = 0.1$ ,  $b^{(s)} = 15$ ,  $F_{PXR} = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(INT)}$

(15b) для амплитуды поля ПРИ и, соответственно, величины  $\Sigma$  в знаменателях выражений (17b) и (17c). На рис. 2 видно, что при малых углах наблюдения основной вклад в суммарную угловую плотность ПРИ дает вторая ветвь ПРИ. При этом в распределении суммарной угловой плотности появляется провал, что демонстрирует кривая, представленная на рис. 3. Данный эффект является динамическим и может проявиться только в геометрии рассеяния Брэгга при малых значениях парамет-

ра асимметрии  $\varepsilon \ll 1$ . Необходимо отметить, что этот эффект никогда ранее не предсказывался теоретически и не наблюдался экспериментально ни в монокристаллической, ни в периодической слоистой средах. В геометрии Лауэ может генерироваться лишь одна ветвь рентгеновских волн ПРИ как в монокристалле, так и в периодической слоистой среде [8,13]. При увеличении параметра асимметрии  $\varepsilon = \sin(\theta_B - \delta) / \sin(\theta_B + \delta)$ , т. е. при уменьшении угла падения  $(\theta_B + \delta)$  электрона на мишень при фиксированном угле  $\theta_B$ , провал на зависимости угловой плотности ПРИ «заплывает» (рис. 4) и вклад в суммарную угловую плотность ПРИ дает только первая ветвь ПРИ. При этом суммарная угловая плотность возрастает.

С точки зрения приоритетной задачи получения высокой угловой плотности ПРИ, наиболее интересным является случай  $\varepsilon \geq 1$ , когда основной вклад дает первая ветвь ПРИ (17b).

Для получения предельного перехода к кинематической теории ПРИ в монокристалле, проведем интегрирование в выражении (23) с учетом (17b). Так как спектр ПРИ становится очень узким при условии  $b^{(s)} \gg 1$ , для интегрирования воспользуемся хорошо известной аппроксимацией  $\sin^2(ax)/x^2 \rightarrow \pi a \delta(x)$  и приведем выражение (23) к следующему виду:

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^3 n^2} \frac{\Omega^{(s)^2 \varepsilon^2}{\sigma^{(s)^2 \varepsilon - 1}} \times b^{(s)}}{1 + \frac{4\varepsilon \sigma^{(s)^2}}{(\sigma^{(s)^2 \varepsilon - 1})^2} \sin^2\left(\frac{\sigma^{(s)^2 \varepsilon - 1}}{2\sigma^{(s)} \varepsilon} b^{(s)}\right)}. \quad (25)$$

Для релятивистских электронов с энергией, при которой  $|\chi'_0| \ll \gamma^{-2}$ , выполняется неравенство  $\sigma^{(s)} \gg 1$  и выражение (25) приобретает следующий вид:

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{2e^2 \omega_B^2 |\chi'_g| C^{(s)}}{\pi g^2} \times \frac{\Omega^{(s)^2 \varepsilon^2 b^{(s)}}{[\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2 - \chi'_0]^2 \varepsilon - |\chi'_g|^2 C^{(s)^2}}, \quad (26)$$

где

$$g = \frac{2\pi}{T} n, \quad |\chi'_g| = \frac{|\chi'_2 - \chi'_1| \sin(\pi n / (1+r))}{\pi n}.$$

Поскольку  $|\chi'_g| C^{(s)} \leq |\chi'_0|$  ( $\nu^{(s)} \leq 1$ ), при  $|\chi'_0| \ll \gamma^{-2}$  также будет выполняться условие  $|\chi'_g| C^{(s)} \ll \gamma^{-2}$ , позволяющее пренебречь членом  $|\chi'_g|^2 C^{(s)^2}$  в знаменателе выражения (26), которое при этом переходит в хорошо известное кинематическое выражение для угловой плотности ПРИ в монокристалле [14, 15].

Подставляя (15а), (15б), (15с) в выражение для спектрально-угловой плотности рентгенового излучения (16), получим выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ДПИ и слагаемое,

описывающее интерференцию ПРИ и ДПИ, с учетом отклонения направления скорости электрона  $\mathbf{V}$  относительно оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ , т. е. содержащее угол  $\psi(\psi_\perp, \psi_\parallel)$ :

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \left( \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2 - \chi'_0} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (27a)$$

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)2} - (\xi^{(s)2} - \varepsilon) \operatorname{cth}^2 \left( \frac{b^{(s)} \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}}}{\varepsilon} \right)}, \quad (27b)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{INT}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2 - \chi'_0} \left( \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2 - \chi'_0} \right) R_{INT}, \quad (28a)$$

$$R_{INT}^{(s)} = \frac{2\varepsilon^3}{\xi^{(s)2} - \varepsilon + \varepsilon \sin^2 \left( \frac{b^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}}{\varepsilon} \right)} \times \frac{\sigma^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} \sin \left( \frac{b^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \sin \left( b^{(s)} \left( \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} \right) \right) + (\sigma^{(s)} \xi^{(s)} - 1) \sin^2 \left( \frac{b^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}}{\varepsilon} \right)}{(\xi^{(s)} - \varepsilon \sigma^{(s)})^2 + \varepsilon - \xi^{(s)2}}. \quad (28b)$$

По аналогии с выражением (23) получим выражения, описывающие угловую плотность ДПИ и интерференцию ПРИ и ДПИ:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^4 n^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} R_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega), \quad (29)$$

$$\frac{dN_{INT}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^4 n^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2} (\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)} \times \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} R_{INT}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega). \quad (30)$$

Проведем интегрирование спектральной функции ДПИ в (29) и получим выражение, описывающее угловую плотность ДПИ пучка релятивистских электронов в геометрии рассеяния Брэгга:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^3 n^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2} (\nu^{(s)} \sigma^{(s)} - 1)^2} \times \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \operatorname{th} \left( \frac{b^{(s)}}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (31)$$

Когерентное рентгеновое излучение пучка релятивистских электронов в геометрии рассеяния Лауэ, когда излучение выходит через заднюю границу мишени, было теоретически исследовано в работе [16]. Исходя из полученных там результатов, выражение, описывающее спектрально-угловую плотность ДПИ из тонкой непоглощающей мишени запишем в виде

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \times \left( \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel + \psi_\parallel)^2 - \chi'_0} \right)^2 R'_{DTR}{}^{(s)}, \quad (32a)$$

$$R'_{DTR}{}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)2} + \varepsilon} \sin^2 \left( b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (32b)$$

Следует отметить, что в геометрии рассеяния Лауэ параметр асимметрии имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \quad b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{ext}^{(s)}}$$

а спектральная функция

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(s)}}$$

отличается от спектральной функции в геометрии рассеяния Брэгга  $\xi^{(s)}(\omega)$  знаком во втором слагаемом, отвечающем за преломление волны при преломлении мишени (см. выражение (11)).

Угловая плотность ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ принимает вид

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^4 n^2} \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)^2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} R'_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega). \quad (33)$$

Вычислим интеграл спектральной функции в (33) для предельных значений параметра  $b^{(s)}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R'_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \pi, & b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}, \\ \pi \varepsilon b^{(s)}, & b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}. \end{cases} \quad (34)$$

Параметр  $b^{(s)}$  можно представить в виде  $b^{(s)} = L_e / 2L_{ext}^{(s)}$ , где  $L_e = L/2 \sin(\theta_B + \delta)$  — длина пути электрона в мишени в геометриях рассеяния Брэгга и  $L_e = L/2 \sin(\delta - \theta_B)$  — в геометрии Лауэ. При этом неравенства  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$  и  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$  могут быть представлены соответственно в виде  $L_e \gg 2L_{ext}^{(s)} \sqrt{\varepsilon}$  и  $L_e \ll 2L_{ext}^{(s)} \sqrt{\varepsilon}$ . Так как параметр асимметрии обычно принимает значения  $0.2 \leq \varepsilon \leq 5$ , данные неравенства могут быть заменены на неравенства  $L_e \gg L_{ext}^{(s)}$  и  $L_e \ll L_{ext}^{(s)}$ . Таким образом, неравенство  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$  ( $L_e \gg L_{ext}^{(s)}$ ) соответствует случаю, когда длина пути электрона в мишени гораздо больше, чем длина экстинкции рентгеновских волн в периодической слоистой среде, т. е. случаю, когда должны проявляться эффекты динамической дифракции. Неравенство  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$  ( $L_e \ll L_{ext}^{(s)}$ ) соответствует случаю, когда длина пути электрона в мишени гораздо меньше, чем длина экстинкции рентгеновских волн в периодической слоистой среде.

Подставляя выражения (34) в (33), для угловой плотности ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ получаем выражения, соответствующие предельным значениям  $b^{(s)}$ :

$$\left( \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right)_L^{b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{4\pi^3 n^2} \times \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)^2}} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}, \quad (35a)$$

$$\left( \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right)_L^{b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^3 n^2} \times \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)^2}} \varepsilon b^{(s)}. \quad (35b)$$

Для тех же предельных значений  $b^{(s)}$  в геометрии рассеяния Брэгга выражения для угловой плотности ДПИ, следующие из (31), имеют вид

$$\left( \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right)_B^{b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^3 n^2} \times \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)^2}} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}, \quad (36a)$$

$$\left( \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right)_B^{b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^3 n^2} \times \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\sigma^{(s)} \nu^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)^2}} \varepsilon b^{(s)}. \quad (36b)$$

Выражения, описывающие угловые плотности ДПИ в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга совпадают по форме в случае  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$ , что видно из выражений (35b) и (36b). При этом угловые плотности прямо пропорциональны толщине мишени,  $b^{(s)} \sim L$ , что означает кинематический характер выражений для угловой плотности ДПИ в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга при условии  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$ . Сравнение выражений (35a) и (36a) показывает, что в случае  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$ , угловая плотность ДПИ в геометрии рассеяния Брэгга в два раза превышает угловую плотность ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ:

$$\left( \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right)_B^{b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}} = 2 \left( \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right)_L^{b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}}.$$

Чтобы определить причины различия выражений для угловых плотностей излучения в геометриях рассеяния Брэгга и Лауэ при  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$ , рассмотрим спектральные функции ДПИ в геометрии рассеяния Брэгга  $R_{DTR}^{(s)}$  и Лауэ  $R'_{DTR}^{(s)}$ , которые входят в интегралы в точных выражениях для угло-

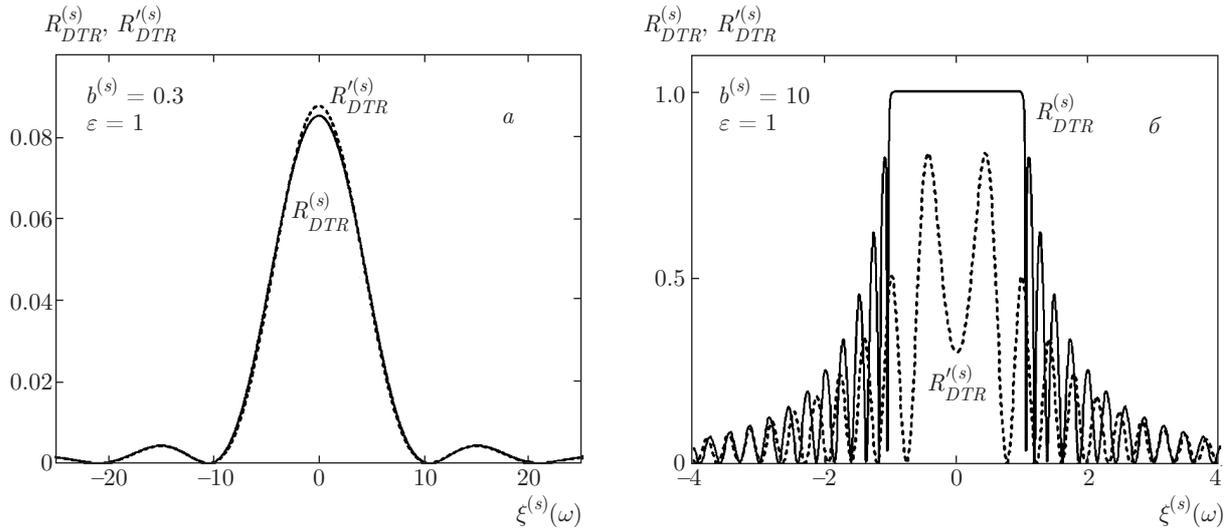


Рис. 5. Спектры ДПИ в геометриях рассеяния Брэгга ( $R_{DTR}^{(s)}$ ) и Лауэ ( $R'_{DTR}^{(s)}$ ) при условиях  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$  (а) и  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$  (б)

вых плоскостей ДПИ в геометриях рассеяния Брэгга (29) и Лауэ (33), различающихся только спектральными функциями. На рис. 5а представлены кривые, описывающие спектры ДПИ в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга при условии  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$ . Из рис. 5а следует хорошее совпадение спектров уже при рассматриваемых параметрах ( $b^{(s)} = 0.3, \varepsilon = 1$ ). При дальнейшем уменьшении параметра  $b^{(s)}$  спектры  $R'_{DTR}^{(s)}$  и  $R_{DTR}^{(s)}$  полностью совпадают. Совпадения спектральных функций приводит к тому, что и выражения, описывающие угловую плотность ДПИ при условии  $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$  в геометриях рассеяния Лауэ (35b) и Брэгга (36b) совпадают.

На рис. 5б представлены кривые, описывающие спектры ДПИ в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга при условии  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$ . Видно различие спектров ДПИ в геометриях рассеяния Брэгга ( $R_{DTR}^{(s)}$ ) и Лауэ ( $R'_{DTR}^{(s)}$ ) при рассматриваемых значениях параметров ( $b^{(s)} = 10, \varepsilon = 1$ ). Связано это с тем, что в геометрии рассеяния Брэгга для фотонов ДПИ существует частотная область полного внешнего отражения (аномальной дисперсии). Эта область аналогична области полного внешнего отражения в физике рассеяния свободных рентгеновских волн в монокристаллах [12]. В этой частотной области волновой вектор падающего фотона в периодической слоистой среде принимает комплексные значения даже в отсутствие поглощения рентгеновских волн материалом среды. Длины волновых векторов падающих фотонов в периодической слоистой среде без учета поглощения определяются выражениями

$$k^{(1,2)} = \omega \sqrt{1 + \chi'_0} + \omega \frac{C^{(s)} |\chi'_2 - \chi'_1| |\sin(\pi n / (1 + r))|}{2\pi n \varepsilon} \times \left[ \xi^{(s)}(\omega) \mp \sqrt{\xi^{(s)2}(\omega) - \varepsilon} \right]. \quad (37)$$

Частотная область полного внешнего отражения для периодической слоистой среды задается неравенством  $-\sqrt{\varepsilon} < \xi^{(s)}(\omega) < \sqrt{\varepsilon}$ , определяющим область отрицательных значений подкоренного выражения в (37). Так как кривые, описывающие спектры ДПИ, на рис. 5б построены для параметра  $\varepsilon = 1$ , область полного внешнего отражения определяется неравенством  $-1 < \xi^{(s)}(\omega) < 1$ . В этой области спектральная функция в геометрии рассеяния Брэгга принимает значение  $R_{DTR}^{(s)} = 1$ , а функция  $R'_{DTR}^{(s)}$ , описывающая спектр ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ, принимает меньшее значение в области аномальной дисперсии  $R'_{DTR}^{(s)} < 1$ . При этом в случае, когда  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$ , интегралы от спектральных функций, которые определяют угловые плотности ДПИ, в разных геометриях будут различаться почти в два раза:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega) \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} R'_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega) \approx \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \pi.$$

Данный факт приводит к тому, что и угловая плотность ДПИ в геометрии рассеяния Брэгга (36а) при условии  $b^{(s)} \gg \sqrt{\varepsilon}$  в два раза превышает угловую плотность ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ (35а).

### 5. ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Усредним выражения (23) и (31) для угловых плотностей ПРИ и ДПИ одного электрона, движущегося под углом  $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$ , и выражение (30) для их интерференционного слагаемого по всем возможным прямолинейным траекториям этого электрона в пучке. Для примера проведем усреднение спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ по функции распределения Гаусса

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi\psi_0^2} \exp\left\{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}\right\}, \quad (38)$$

где параметр  $\psi_0$  будем называть расходимостью пучка излучающих электронов (см. рис. 1). Угол  $\psi_0$  является дисперсией распределения и определяет конус, ограничивающий часть пучка электронов, за пределами которого плотность электронов уменьшается более чем в  $e$  раз по сравнению с плотностью на оси пучка. Для этого случая нормированные на один электрон выражения, описывающие угловые плотности ПРИ, ДПИ и их интерференцию в геометрии рассеяния Брэгга, принимают вид

$$\left\langle \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2\omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^3 n^2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \operatorname{th}\left(\frac{b^{(s)}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \frac{1}{\pi\psi_0^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)^2} \exp\left(-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}\right)}{\sigma^{(s)^2} (\nu^{(s)}\sigma^{(s)} - 1)^2} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel}, \quad (39a)$$

$$\left\langle \frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2\omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^4 n^2} \frac{1}{\pi\psi_0^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)^2}}{\sigma^{(s)^2}} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} R_{PXR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega) \times \exp\left(-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}\right) d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel}, \quad (39b)$$

$$\left\langle \frac{dN_{INT}^{(s)}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2\omega_B^3 T^2 L_{ext}^{(s)}}{2\pi^4 n^2} \frac{1}{\pi\psi_0^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)^2}}{\sigma^{(s)^2} (\sigma^{(s)}\nu^{(s)} - 1)} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} R_{INT}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega) \times \exp\left(-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}\right) d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel}. \quad (39c)$$

Выражения (39) позволяют вычислять угловые плотности ПРИ и ДПИ (с учетом их интерференции) пучка релятивистских электронов, пересекающего мишень с периодической слоистой структурой

в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени. При необходимости усреднение может быть проведено по любой другой функции, характеризующей распределение электронов в пучке.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности ПРИ и ДПИ (и их интерференцию) релятивистского электрона, движущегося под определенным углом к оси электронного пучка.

Показано, что при определенной асимметрии ( $\varepsilon \ll 1$ ) две ветви решения дисперсионного уравнения вместе могут давать вклад в угловую плотность ПРИ. При этом в суммарной угловой плотности может появиться провал, связанный с существованием относительного смещения составляющих угловой плотности излучения, соответствующих разным ветвям. В случае симметричного отражения ( $\varepsilon = 1$ ) вклад в спектр и, соответственно, в угловую плотность ПРИ дает только первая ветвь ПРИ.

Показано, что для случая, когда длина пути электрона в периодической слоистой мишени во много раз превышает длину экстинкции рентгеновских волн ( $L_e \gg L_{ext}^{(s)}$ ), угловая плотность ДПИ в геометрии рассеяния Брэгга будет в два раза больше угловой плотности ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ. Данный факт связан с наличием в геометрии рассеяния Брэгга области полного внешнего отражения рентгеновских волн.

Получены выражения, описывающие угловые плотности ПРИ и ДПИ для пучка релятивистских электронов, пересекающих мишень с периодической слоистой структурой, а также вклад интерференционного слагаемого в общем случае асимметричного отражения относительно поверхности мишени отражения кулоновского поля электрона.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-12-10019).

### ЛИТЕРАТУРА

1. N. N. Nasonov, V. V. Kaplin, S. R. Uglov et al., Phys. Rev. E **68**, 3604 (2003).
2. Г. М. Гарибян, Ян Ши, ЖЭТФ **61**, 930 (1971).
3. В. Г. Барышевский, И. Д. Феранчук, ЖЭТФ **61**, 944 (1971).

4. V. G. Baryshevsky, Nucl. Instr. Meth. A **122**, 13 (1997).
5. X. Artru and P. Rullhusen, Nucl. Instr. Meth. B **145**, 1 (1998).
6. N. N. Nasonov, Phys. Lett. A **246**, 148 (1998).
7. V. V. Kaplin, S. R. Uglov, V. N. Zabaev et al., Appl. Phys. Lett. **76**, 3647 (2000).
8. С. В. Блажевич, И. В. Колосова, А. В. Носков, ЖЭТФ **141**, 627 (2012).
9. S. Blazhevich and A. Noskov, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **309**, 70 (2013).
10. С. В. Блажевич, А. В. Носков, ЖЭТФ **150**, 643 (2016).
11. В. А. Базылев, Н. К. Жеваго, *Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях*, Наука, Москва (1987).
12. З. Г. Пинскер, *Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах*, Наука, Москва (1974).
13. S. V. Blazhevich and A. V. Noskov, Nucl. Instr. Meth. B **266**, 3770 (2008).
14. I. D. Feranchuk and A. V. Ivashin, J. de Phys. **46**, 1981 (1985).
15. K. H. Brenzinger, C. Herberg, B. Limburg et al., Z. Phys. A **358**, 107 (1997).
16. С. В. Блажевич, Т. В. Коськова, А. В. Носков, ЖЭТФ **149**, 5 (2016).