ЖЭТФ, 2017, том 152, вып. 1 (7), стр. 147–163

«МЯГКИЕ» МОДЫ СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ, ПОСТРОЕННЫЕ НА ВОЗМУЩЕНИЯХ РЕШЕТКИ АБРИКОСОВА С ОДНИМ КВАНТОМ ПОТОКА В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЯЧЕЙКЕ

Ю. Н. Овчинников [a,b*]***, И. М. Сигал*** [c**]

[a] *Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems*
01187, Dresden, Germany

[b] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук*
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

[c] *Department of Mathematics, University of Toronto*
Toronto, Ontario M5S1A1, Canada

Поступила в редакцию 21 февраля 2017 г.

Исследуется спектр бесщелевых возбуждений, возникающих при возмущении решетки Абрикосова с одним квантом потока в элементарной ячейке. Особенный интерес представляют сверхпроводники со значением параметра Гинзбурга – Ландау κ, близким к единице. Найден спектр бесщелевых возбуждений, близких к нулевым сдвиговым модам, при произвольном значении угла ϕ между векторами элементарной ячейки. Исследование спектра возбуждений треугольной и квадратной решеток с одним квантом потока в элементарной ячейке показало, что по крайней мере в области значений параметра κ, близких к единице ($\kappa > 1$), существуют решения с большим единицы числом квантов потока, дающие меньшие значения свободной энергии по сравнению со значениями свободной энергии для треугольной решетки с одним квантом потока. При малых значениях импульса $\mathbf{k}$ (в $\mathbf{k}^2$-приближении) спектр возбуждений «поперечной» моды в треугольной решетке не зависит от направления импульса, лежащего в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Для квадратной решетки ($\phi = \pi/2$) поперечная мода анизотропна и в $\mathbf{k}^2$-приближении.

DOI: 10.7868/S0044451017070136

1. ВВЕДЕНИЕ

В зависимости от величины параметра Гинзбурга – Ландау κ сверхпроводники делятся на сверхпроводники первого рода ($\kappa < 1$) и сверхпроводники второго рода ($\kappa > 1$) [1]. Экспериментально сверхпроводники второго рода были обнаружены Шубниковым [2]. В модели БКШ функционал свободной энергии Гинзбурга – Ландау был получен в работе Горькова [3]. В работе Абрикосова [4] было показано, что в свехпроводниках второго рода возникают состояния, получившие общепризнанное название решетки Абрикосова. В этих состояниях квадрат модуля параметра порядка $|\Delta|^2$ образует двумерную решетку в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю, а магнитный поток в элементарной ячейке квантуется.

Наша задача — исследование спектра возбуждений, возникающих при возмущении решетки Абрикосова с одним квантом потока в элементарной ячейке. Особый интерес представляет исследование области значений κ, близких к единице ($\kappa > 1$). Нами будет показано, что существует «мягкая» бесщелевая мода, у которой в экстремальных точках (угол ϕ между векторами элементарной ячейки равен $\{\pi/3, \pi/2\}$) в $\mathbf{k}^2$-приближении изотропная часть энергии пропорциональна $1 - 1/\kappa^2$. Выражения, полученные для спектра возбуждений в треугольной ($\phi = \pi/3$) и квадратной ($\phi = \pi/2$) решетках, позволяет сделать вывод о существовании, по крайней мере в областях κ, близких к единице ($\kappa > 1$),

* E-mail: ovc@itp.ac.ru
** I. M. Sigal

решений со многими квантами потока в элементарной ячейке, дающих значения свободной энергии, меньшие чем значения свободной энергии для треугольной решетки с одним квантом потока в элементарной ячейке.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вблизи точки сверхпроводящего перехода уравнения, описывающие явления сверхпроводимости в приближении БКШ, порождают функционал Гинзбурга–Ландау [1]. Его мы запишем в виде

$$\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_N = \nu \int d^3r \left\{ -\tau|\Delta|^2 + \frac{\pi D}{8T}|\partial_-\Delta|^2 + \right. \\ \left. + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2T^2}|\Delta|^4 \right\} + \frac{1}{8\pi}\int d^3r(\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0)^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{H}_0$ — внешнее магнитное поле, $\nu = mp_F/2\pi^2$ — плотность состояний на поверхности Ферми, Δ — параметр порядка, $\partial_- = \partial/\partial\mathbf{r} - 2ie\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, D — эффективный коэффициент диффузии [5], $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, e — заряд электрона. Уравнения Гинзбурга–Ландау могут быть получены варьированием функционала (1) по параметрам $\{\Delta, \Delta^*, \mathbf{A}\}$. Вторая вариация функционала (1) по этим переменным приводит к возникновению самосопряженного оператора $\hat{L}$, спектр которого и определяет отклонение энергии от равновесной. Вычисления приводят к следующему значению оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_-^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}; & \frac{7\zeta(3)\Delta^2}{8\pi^2T^2}; & \frac{i\pi eD}{4T}\left[2(\partial_-\Delta) + \Delta\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right] \\ \frac{7\zeta(3)(\Delta^*)^2}{8\pi^2T^2}; & -\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_+^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}; & -\frac{i\pi eD}{4T}\left[2(\partial_+\Delta^*) + \Delta^*\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right] \\ -\frac{i\pi eD}{4T}[(\partial_+\Delta^*) - \Delta^*\partial_-]; & \frac{i\pi eD}{4T}[(\partial_-\Delta) - \Delta\partial_+]; & \frac{1}{4\pi\nu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\pi e^2D}{T}|\Delta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Простая проверка показывает, что оператор $\hat{L}$ обладает нулевой калибровочной модой

$$\left(\Delta; -\Delta^*; \frac{\mathbf{k}}{2e}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3)$$

где вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xy, перпендикулярной направлению магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Кроме того, оператор $\hat{L}$ имеет нулевые сдвиговые моды

$$((\mathbf{u}\partial_-\Delta); (\mathbf{u}\partial_+\Delta^*); [\mathbf{H}\times\mathbf{u}]), \quad (4)$$

где $\mathbf{u}$ — двумерный вектор сдвига в плоскости xy. Наличие нулевых мод при $\mathbf{k} = 0$ приводит к появлению возбуждений с энергией $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, пропорциональной $\mathbf{k}^2$ при $\mathbf{k} \to 0$. Эти моды ищем в виде

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left\{(\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \chi_1; (\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) + \right. \\ \left. + \chi_2; [\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1\right\}. \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) для собственной функции ψ в формулу (2), получим с учетом того, что функции (4) — это нулевые моды оператора $\hat{L}$, следующую систему уравнений для функций $(\chi_1, \chi_2, \mathbf{A}_1)$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix}\chi_1 \\ \chi_2 \\ \mathbf{A}_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2((\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \chi_1) - \frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)((\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \chi_1) - \frac{\pi eD}{4T}\Delta\mathbf{k}\cdot([\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1) \\ \frac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2((\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) + \chi_2) - \frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)((\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) + \chi_2) + \frac{\pi eD}{4T}\Delta^*\mathbf{k}\cdot([\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1) \\ \frac{\pi eD}{4T}\mathbf{k}\left(\Delta\chi_2 - \Delta^*\chi_1\right) + \frac{1}{4\pi\nu}\left(\mathbf{k}^2\mathbf{A}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_1) + i\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{A}_1 + i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_1)\right) - 2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}_1) + \mathbf{z} \end{pmatrix} = \\ = \mathcal{E}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}(\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \chi_1 \\ (\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) + \chi_2 \\ [\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1\end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{z} = \frac{1}{4\pi\nu}\left\{\mathbf{k}^2[\mathbf{H}\times\mathbf{u}] - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) + \right.$$
$$\left. + i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right\} +$$
$$+ i\mathbf{k}\left\{\frac{i\pi eD}{4T}(\Delta^*(\mathbf{u}\partial_-\Delta) - \Delta(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\pi\nu}\operatorname{div}[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right\}. \quad (7)$$

Последний член в формуле (7) равен нулю в силу уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}, \quad (8)$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока.

Систему уравнений (4) будем решать по теории возмущений, разлагая решения по степеням параметра $\mathbf{k}$:

$$\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \mathbf{A}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\chi_1^{(1)}\\ \chi_2^{(1)}\\ \mathbf{A}_1^{(1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\chi_1^{(2)}\\ \chi_2^{(2)}\\ \mathbf{A}_1^{(2)}\end{pmatrix} + \ldots \quad (9)$$

В линейном приближении по параметру k находим

$$\hat{L}\begin{pmatrix}\chi_1^{(1)}\\ \chi_2^{(1)}\\ \mathbf{A}_1^{(1)}\end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -\frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta) - \frac{\pi eD}{4T}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) \\ -\frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{k}\partial_+\Delta^*) + \frac{\pi eD}{4T}\Delta^*(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) \\ \frac{i}{4\pi\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right)\end{pmatrix} =$$
$$= 0. \quad (10)$$

Из уравнения (3) следует, что оператор $\hat{L}$ имеет нулевую моду $(\Delta; -\Delta^*; 0)$, приводящую к следующему условию разрешимости системы уравнений (10):

$$-\frac{\pi eD}{2T}\langle|\Delta|^2(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\rangle + \frac{i\pi D}{4T}\times$$
$$\times\langle\Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) - \Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle = 0. \quad (11)$$

Ниже будем предполагать выполненными также условия ортогональности поправки первого порядка к нулевой моде $(\Delta; -\Delta^*; 0)$:

$$\langle\chi_1^{(1)}\Delta^*\rangle - \langle\chi_2^{(1)}\Delta\rangle = 0. \quad (12)$$

Используя уравнения (6), (10), находим уравнения для членов второго порядка в формуле (9):

$$\hat{L}\begin{pmatrix}\chi_1^{(2)}\\ \chi_2^{(2)}\\ \mathbf{A}_1^{(2)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2(\mathbf{u}\partial_-\Delta) - \frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)\chi_1^{(1)} - \frac{\pi eD}{4T}\Delta(\mathbf{A}_1^{(1)}\cdot\mathbf{k}) \\ \frac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) - \frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)\chi_2^{(1)} + \frac{\pi eD}{4T}(\mathbf{A}_1^{(1)}\cdot\mathbf{k})\Delta^* \\ \frac{\pi eD}{4T}\mathbf{k}(\Delta\chi_2^{(1)} - \Delta^*\chi_1^{(1)}) + \frac{1}{4\pi\nu}(\mathbf{k}^2[\mathbf{H}\times\mathbf{u}] - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])) + \mathbf{z}^{(1)}\end{pmatrix} = \mathcal{E}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}\mathbf{u}\partial_-\Delta\\ \mathbf{u}\partial_+\Delta^*\\ [\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\end{pmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{z}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\nu}\left[i\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{A}_1^{(1)} + i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_1^{(1)}\right) - \right.$$
$$\left. - 2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}_1^{(1)}\right]. \quad (14)$$

Наличие моды (4) приводит к условию разрешимости системы уравнений (13), которое и определяет спектр $\mathcal{E}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{E}\{\mathbf{u}^2\langle\mathbf{H}^2\rangle + 2\langle(\mathbf{u}\partial_-\Delta)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle\} =$$
$$= \frac{\pi D}{4T}\mathbf{k}^2\langle(\mathbf{u}\partial_-\Delta)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle +$$
$$+ \frac{i\pi D}{4T}\{\langle\chi_1^{(1)}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) + \chi_2^{(1)}(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\} +$$
$$+ \frac{i}{4\pi\nu}\langle\mathbf{A}_1^{(1)}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H})\rangle +$$
$$+ \left\langle[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\left\{\frac{\pi eD}{4T}\mathbf{k}(\Delta\chi_2^{(1)} - \Delta^*\chi_1^{(1)}) + \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{4\pi\nu}\left[i\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{A}_1^{(1)} + i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_1^{(1)}\right) - 2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}_1^{(1)}\right] +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4\pi\nu}(\mathbf{k}^2[\mathbf{H}\times\mathbf{u}] - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]))\right\}\right\rangle. \quad (15)$$

В уравнение (15) для спектра $\mathcal{E}(k)$ входят только функции первого порядка по $\mathbf{k}$ $\{\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \mathbf{A}_1^{(1)}\}$. Уравнения (15) справедливы во всей области $H_{c1} < < H_0 < H_{c2}$. Ниже мы рассмотрим область сильных полей, таких что

$$1 - B/H_{c2} \ll 1. \quad (16)$$

3. ОБЛАСТЬ ПОЛЕЙ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКОМУ ($1 - B/H_{c2} \ll 1$)

В этой области полей решение уравнений Гинзбурга–Ландау для функций $\{\Delta, \mathbf{A}\}$ с одним квантом потока в элементарной ячейке можно искать в виде ряда по степеням малого параметра $1 - B/H_{c2}$ в виде

$$\begin{gathered} \Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots, \\ \mathbf{A} = (0, Bx, 0) + \mathbf{A}^{(1)} + \ldots, \end{gathered} \quad (17)$$

где

$$\begin{gathered} \Delta_0 = \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_N \exp[2ieB(Nx_1 - x_0)y] D_0(z_N), \\ z_N = 2\sqrt{eB}(x + x_0 - Nx_1). \end{gathered} \quad (18)$$

Численные коэффициенты $\{C_N, x_1\}$ зависят от типа решетки. Поправочные члены $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots\}$ выражаются через функции

$$\Delta_0^{(M)} = \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_N \exp[2ieB(Nx_1 - x_0)y] \times \\ \times D_M(z_N), \quad M = 1, 2, 3, \ldots, \quad (19)$$

где $D_M(z)$ — функции параболического цилиндра [6], по формуле

$$\Delta_1 = \alpha_2 \Delta_0^{(2)} + \alpha_4 \Delta_0^{(4)} + \ldots \quad (20)$$

Для вычисления функций $\{\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \mathbf{A}_1^{(1)}\}$ удобно ввести ортогональный базис

$$\Delta;\ \theta^{(1)};\ \theta^{(2)};\ldots \quad (21)$$

Функции $\theta^{(M)}$ с учетом первых поправочных членов можно выбрать в виде

$$\begin{gathered} \theta^{(1)} = \Delta_0^{(1)}, \quad \theta^{(2)} = \Delta_0^{(2)} - 2\alpha_2^* \Delta_0, \\ \theta^{(4)} = \Delta_0^{(4)} - 24\alpha_4^* \Delta_0, \ldots \end{gathered} \quad (22)$$

С учетом формулы (12) ищем функции $\{\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}\}$ с точностью до членов второго порядка по параметру $1 - B/H_{c2}$ в виде

$$\chi_1^{(1)} = \gamma_1 \Delta + \mu_1 \theta^{(2)}, \quad \chi_2^{(1)} = \gamma_1 \Delta^* + \mu_1^{(1)} (\theta^{(2)})^*. \quad (23)$$

При подстановке выражений (23) в систему уравнений (10) возникают величины, значения которых мы приводим ниже:

$$\begin{gathered} (\mathbf{k}\partial_-^{(0)})(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0 = \\ = (-eB(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}) + ie(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}]))\Delta_0 + \\ + eB(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)\cdot(\mathbf{k}_x + i\mathbf{k}_y)\Delta_0^{(2)}, \\ (\mathbf{k}\partial_-^{(0)})(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} = \\ = 2eB(\mathbf{k}_x - i\mathbf{k}_y)\cdot(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y)\Delta_0 + \\ + (-5eB(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}) + ie(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}]))\Delta_0^{(2)} + \\ + eB(\mathbf{k}_x + i\mathbf{k}_y)\cdot(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)\Delta_0^{(4)}, \\ (\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0 = -\sqrt{eB}(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)\Delta_0^{(1)}, \\ \mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}] = -B(\mathbf{k}_x\cdot\mathbf{u}_y - \mathbf{k}_y\cdot\mathbf{u}_x). \end{gathered} \quad (24)$$

При получении формулы (24) были использованы формулы (18), (19).

С точностью до членов второго порядка по параметру $1 - B/H_{c2}$ из уравнений (24) следует важное равенство

$$\begin{gathered} \langle\Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle - \langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle = \\ = -2ie(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}])\langle|\Delta_0|^2\rangle + \\ + 2ie\left\{\left\langle\left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{u}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle - \right. \\ \left. - \left\langle\left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle\right\}. \end{gathered} \quad (25)$$

Поскольку

$$\begin{gathered} \left\langle\left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{u}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle - \\ - \left\langle\left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle = \\ = \left\langle\left(|\Delta_0|^2 - \langle|\Delta_0|^2\rangle\right)\left([\mathbf{k}\times\mathbf{u}]\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}^{(1)}\right)\right\rangle, \end{gathered} \quad (26)$$

условие разрешимости (11) автоматически выполняется с точностью до членов второго порядка по параметру $1 - B/H_{c2}$. В результате при решении системы уравнений (10) возникает свободный параметр — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}$. Этот параметр может быть найден из условия экстремума энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ по нему.

Для получения уравнений для величин $\{\gamma_1,\ \mu_1,\ \mu_1^{(1)}\}$ перепишем систему уравнений (10) в виде

$$\begin{pmatrix} -\tau - \dfrac{\pi D}{8T}\partial_-^2 + \dfrac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}; \dfrac{7\zeta(3)\Delta^2}{8\pi^2T^2} \\ \dfrac{7\zeta(3)(\Delta^*)^2}{8\pi^2T^2}; -\tau - \dfrac{\pi D}{8T}\partial_+^2 + \dfrac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2} \end{pmatrix} \left[\gamma_1 \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1\theta^{(2)} \\ \mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^* \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{i\pi eD}{4T}\begin{pmatrix} (\mathbf{A}_1\partial_-\Delta) + \partial_-(\mathbf{A}_1\Delta) \\ -((\mathbf{A}_1\partial_+\Delta^*) + \partial_+(\mathbf{A}_1\Delta^*)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \dfrac{\pi eD}{4T}\Delta(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) \\ \dfrac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) - \dfrac{\pi eD}{4T}\Delta^*(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Умножая слева уравнение на $(\Delta^*;\Delta)$ и усредняя по элементарной ячейке, получим уравнение для величины γ_1:

$$\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^4\rangle}{2\pi^2T^2}\gamma_1 + \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\times$$
$$\times\langle\mu_1\theta^{(2)}|\Delta_0|^2\Delta_0^* + \mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^*|\Delta_0|^2\Delta_0\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\pi\nu}\langle\operatorname{rot}\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{H}\rangle + \frac{i\pi D}{4T}\times$$
$$\times\langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle. \quad (28)$$

В уравнении (28) $\mathbf{H}$ — магнитное поле,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) = (0,0,H),$$
$$H = B - \frac{\pi^2 e\nu D}{T}(|\Delta_0|^2 - \langle|\Delta_0|^2\rangle). \quad (29)$$

Для получения уравнения для μ_1 умножим первую строку системы уравнений (27) на $(\theta^{(2)})^*$ и усредним по элементарной ячейке. В результате получим

$$\gamma_1\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle\Delta|\Delta|^2(\theta^{(2)})^*\rangle +$$
$$+\left\langle(\theta^{(2)})^*\left[\left(-\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_-^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right)\mu_1\theta^{(2)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{7\zeta(3)\Delta^2}{8\pi^2T^2}\mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^*\right]\right\rangle =$$
$$= -\frac{i\pi eD}{4T}\langle(\theta^{(2)})^*(\mathbf{A}_1\partial_-\Delta) - \mathbf{A}_1\Delta\partial_+(\theta^{(2)})^*\rangle +$$
$$+\frac{i\pi D}{4T}\langle(\theta^{(2)})^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle +$$
$$+\frac{\pi eD}{4T}\langle(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\Delta(\theta^{(2)})^*\rangle. \quad (30)$$

Аналогично, умножая вторую строку системы уравнений (27) на $\theta^{(2)}$ и усредняя по элементарной ячейке, получим уравнение для $\mu_1^{(1)}$:

$$\gamma_1\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle\Delta^*|\Delta|^2\theta^{(2)}\rangle +$$
$$+\left\langle\theta^{(2)}\left[\left(-\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_+^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right)\mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^* + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{7\zeta(3)(\Delta^*)^2}{8\pi^2T^2}\mu_1\theta^{(2)}\right]\right\rangle =$$
$$= \frac{i\pi eD}{4T}\langle\mathbf{A}_1\partial_+\Delta^*)\theta^{(2)} - \mathbf{A}_1\Delta^*\partial_-\theta^{(2)}\rangle +$$
$$+\frac{i\pi D}{4T}\langle\theta^{(2)}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle -$$
$$-\frac{\pi eD}{4T}\langle(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\Delta^*\theta^{(2)}\rangle. \quad (31)$$

Из уравнений (10), (23) следует уравнение для векторного потенциала $\mathbf{A}_1$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}_1 + \frac{4\pi^2e^2\nu D}{T}|\Delta|^2\mathbf{A}_1 =$$
$$= 2\gamma_1\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{i\pi^2 e\nu D}{T}\{\mu_1(\theta^{(2)}\partial_+\Delta^* - \Delta^*\partial_-\theta^{(2)}) -$$
$$- \mu_1^{(1)}((\theta^{(2)})^*\partial_-\Delta - \Delta\partial_+(\theta^{(2)})^*)\} -$$
$$- i\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right\}. \quad (32)$$

Покажем, что правая часть уравнения (32) содержит только величины вида $\operatorname{rot}(0,0,H)$ в главном приближении по параметру $1 - B/H_{c2}$. Используя формулы (18), (19), находим

$$\partial_-^{(0)}\Delta_0 = -\sqrt{eB}(1;i)\Delta_0^{(1)},$$
$$\partial_-^{(0)}\Delta_0^{(2)} = 2\sqrt{eB}(1;-i)\Delta_0^{(1)} - \sqrt{eB}(1;i)\Delta_0^{(3)},$$
$$\Delta_0^{(2)}\partial_+^{(0)}\Delta_0^* - \Delta_0^*\partial_-^{(0)}\Delta_0^{(2)} =$$
$$= i\operatorname{rot}(0,0,\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}) - 4\sqrt{eB}(1;-i)\Delta_0^*\Delta_0^{(1)}. \quad (33)$$

В главном приближении по параметру $1 - B/H_{c2}$ из уравнений (30), (31) находим значение величин $\{\mu_1, \mu_1^{(1)}\}$:

$$\mu_1 = \frac{i}{4}ku\exp[i(2\varphi+\eta)],$$
$$\mu_1^{(1)} = \frac{i}{4}ku\exp[-i(2\varphi+\eta)], \quad (34)$$

где η — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}$,

$$\begin{gathered}\mathbf{k}=k(\cos\varphi;\sin\varphi),\\ \mathbf{u}=u(\cos(\varphi+\eta);\sin(\varphi+\eta)).\end{gathered} \tag{35}$$

Простые вычисления приводят к следующему значению последнего члена в формуле (32):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])-2\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]=\\ =(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\,\mathrm{rot}(0,0,H)+\frac{\pi^2e\nu D}{T}\sqrt{eB}\times\\ \times ku\big(-i\Delta_0^*\Delta_0^{(1)}\exp[i(2\varphi+\eta)]+i\Delta_0(\Delta_0^{(1)})^*\times\\ \times\exp[-i(2\varphi+\eta)];-\Delta_0^*\Delta_0^{(1)}\exp[i(2\varphi+\eta)]-\\ -\Delta_0(\Delta_0^{(1)})^*\exp[-i(2\varphi+\eta)]\big).\end{gathered} \tag{36}$$

Используя формулы (33)—(36), приведем уравнение (32) для векторного потенциала $\mathbf{A}_1$ к виду

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1+\frac{4\pi^2e^2\nu D}{T}|\Delta|^2\mathbf{A}_1=\\ =2\gamma_1\,\mathrm{rot}(0,0,H)-i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\,\mathrm{rot}(0,0,H)-\\ -\frac{i\pi^2e\nu D}{4T}ku\big\{\exp[i(2\varphi+\eta)]\,\mathrm{rot}(0,0,\Delta_0^*\Delta_0^{(2)})+\\ +\exp[-i(2\varphi+\eta)]\,\mathrm{rot}(0,0,\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*)\big\}.\end{gathered} \tag{37}$$

Ключевой величиной является последний член в уравнении (28) для величины γ_1. Используя формулы (24), находим его значение:

$$\begin{gathered}\langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle+\langle\Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)=\\ =-2eB(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\langle|\Delta_0|^2\rangle+4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\times\\ \times[(\alpha_2+\alpha_2^*)(u_xk_x-u_yk_y)-i(\alpha_2-\alpha_2^*)(u_xk_y+k_xu_y)]+\\ +\frac{2T}{\pi^2\nu D}\left\langle(H-B)\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^{(1)})_z+\right.\right.\\ +\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)(k_xu_y+k_yu_x)+\\ \left.\left.+\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}\right)(k_yu_y-k_xu_x)\right\}\right\rangle.\end{gathered} \tag{38}$$

Из уравнений (28), (30), (32) следует, что существуют четыре ветви спектра $\mathcal{E}(\mathbf{k})$. Две из них соответствуют продольной поляризации с углами между векторами $\{\mathbf{k},\mathbf{u}\}$, близкими к значениям $(0,\pi)$, и две ветви, соответствующие поперечной поляризации с углами между векторами $\{\mathbf{k},\mathbf{u}\}$, близкими к значениям $(\pm\pi/2)$. В случае продольной поляризации в выражении (38) бо́льшим является первый член в правой части. В результате в главном приближении величина γ_1 определяется выражением

$$\gamma_1=-\frac{i\pi^3DTeB\kappa^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})}{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle[\beta_A(\kappa^2-1)+1]}, \tag{39}$$

где параметр Гинзбурга–Ландау κ равен

$$\kappa=\frac{1}{\pi^2eD}\left(\frac{7\zeta(3)}{2\pi\nu}\right)^{1/2}, \tag{40}$$

а величина β_A — константа Абрикосова — равна

$$\beta_A=\frac{\langle|\Delta_0|^4\rangle}{\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}. \tag{41}$$

Подставляя в формулу (15) выражение (22) для функций $\{\chi_1^{(1)},\chi_2^{(1)}\}$ и значение (39) для величины γ_1, получим в главном приближении следующее значение для энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(\mathbf{u}^2\mathbf{B}^2+2eB\mathbf{u}^2\langle|\Delta|^2\rangle)=\\ =\frac{\mathbf{B}^2}{4\pi\nu}\left\{\mathbf{k}^2\mathbf{u}^2-[\mathbf{k}\times\mathbf{u}]^2-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})^2}{\beta_A(\kappa^2-1)+1}\right\}.\end{gathered} \tag{42}$$

В рассматриваемом приближении экстремальными являются точки $[\mathbf{k}\times\mathbf{u}]=0$ (углы между векторами $\{\mathbf{k},\mathbf{u}\}$ равны $(0,\pi)$). В результате для продольной поляризации находим

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})=\frac{\mathbf{k}^2}{4\pi\nu}\left\{\frac{\beta_A(\kappa^2-1)}{\beta_A(\kappa^2-1)+1}\right\}. \tag{43}$$

4. ПОПЕРЕЧНАЯ ВЕТВЬ СПЕКТРА

Используя определения векторов $\{\mathbf{k},\mathbf{u}\}$ (35), находим

$$\begin{gathered}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}=ku\cos\eta,\quad \mathbf{k}\times\mathbf{u}=ku\sin\eta(0,0,1),\\ u_xk_x-u_yk_y=ku\cos(2\varphi+\eta),\\ k_xu_y+k_yu_x=ku\sin(2\varphi+\eta).\end{gathered} \tag{44}$$

Из формул (28), (38), (44) следует, что величина $\partial\gamma_1/\partial\eta$ велика в поперечных модах. По этой причине она легко находится и оказывается равной

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial\eta}=\frac{ikuBT\sin\eta}{2\pi^2e\nu D\langle|\Delta_0|^2\rangle}\frac{1}{\beta_A(\kappa^2-1)+1}. \tag{45}$$

Величина угла η определяется из уравнения

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\eta}=0. \tag{46}$$

Используя уравнение (15) для величины $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, приведем формулу (46) к виду

$$\frac{i\pi D}{4T}\left\{\frac{\partial\gamma_1}{\partial\eta}\left[-2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\cos\eta+4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\times\right.\right.$$
$$\times\Big((\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2\varphi+\eta)-i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2\varphi+\eta)\Big)+$$
$$+\frac{2T}{\pi^2\nu D}\left\langle(H-B)\left(-\cos(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sin(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)\right)\right\rangle\right]+$$
$$\left.+2eB\gamma_1\langle|\Delta_0|^2\rangle\sin\eta\right\}-B^2\frac{ku}{4\pi\nu}\sin 2\eta=0. \quad (47)$$

В главном приближении по параметру $1-B/H_{c2}$ величины $\{\mu_1,\mu_1^{(1)}\}$ определяются формулой (34). Подставляя в формулу (28) эти значения величин $\{\mu_1,\mu_1^{(1)}\}$ и используя для величины $\langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)+(\Delta(\mathbf{k}\partial_+)\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle$ выражение (38), получим следующее уравнение для γ_1:

$$\frac{7\zeta(3)(\langle|\Delta_0|^2\rangle)^2}{2\pi^2T^2\kappa^2}\left[\beta_A(\kappa^2-1)+1\right]\gamma_1=-i\frac{7\zeta(3)ku}{16\pi^2T^2}\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)\Big\langle|\Delta_0|^2(\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right]+$$
$$+\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right]\Big\rangle+\frac{i\pi D}{4T}\times$$
$$\times\left\{-2eB(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\langle|\Delta_0|^2\rangle+uk\left[4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\times\right.\right.$$
$$\times\Big((\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2\varphi+\eta)-i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2\varphi+\eta)\Big)+$$
$$+\frac{2T}{\pi^2\nu D}\left\langle(H-B)\left(\sin(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.-\cos(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}\right)\right)\right\rangle\right]\right\}. \quad (48)$$

Используя уравнения (45), (48), получим из уравнения (47) значение параметра $\cos\eta$:

$$\cos\eta=\frac{7\zeta(3)\left\langle|\Delta_0|^2\left\{(\Delta_0)^*\Delta_0^{(2)}\exp[i(2\varphi+\eta)]+\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right]\right\}\right\rangle}{16\pi^3eBDT\langle|\Delta_0|^2\rangle\left[\beta_A(\kappa^2-1)+1\right]}\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right). \quad (49)$$

Для завершения вычисления спектра $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ необходимо найти значения коэффициентов $\{\mu_1,\mu_1^{(1)}\}$ с точностью до членов первого порядка по параметру $1-B/H_{c2}$. Воспользуемся для этого следующими соотношениями:

$$\Big\langle(\mathbf{k}[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\Delta(\theta^{(2)})^*\Big\rangle=$$
$$=\frac{\pi^2e\nu D}{T}ku\sin\eta\langle|\Delta_0|^2\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\rangle,$$

$$\langle(\theta^{(2)})^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle=2eBku\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right]\times$$
$$\times\langle|\Delta_0|^2\rangle+2eB\alpha_2uk\left\langle|\Delta_0|^2\right\rangle\exp(i\eta)-$$
$$-2ie\alpha_2Bku\langle|\Delta_0|^2\rangle\sin\eta+2ie\big\langle(\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0(\mathbf{k}\partial_+^{(0)})\times$$
$$\times(\Delta_0^{(2)})^*-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}^{(1)})(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0\rangle,$$

$$\left\langle(\theta^{(2)})^*\left[-\tau-\frac{\pi D}{8T}\partial_-^2+\frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right]\theta^{(2)}\right\rangle=$$
$$=\frac{2\pi eDB}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle-\frac{\pi eD}{2T}(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle+$$
$$+\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\rangle+\frac{i\pi eD}{4T}\times$$
$$\times\left\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}-\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\right\rangle,$$

$$\left\langle\theta^{(2)}\left[-\tau-\frac{\pi D}{8T}\partial_+^2+\frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right](\theta^{(2)})^*\right\rangle=$$
$$=\frac{2\pi eBD\langle|\Delta_0|^2\rangle}{T}-\frac{\pi eD}{2T}(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle+$$
$$+\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\left\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\right\rangle-\frac{i\pi eD}{4T}\times$$
$$\times\Big\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*-$$
$$-(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}\Big\rangle. \quad (50)$$

Подставляя в формулы (30), (31) значения блоков, найденных в формулах (50), получим следующие значения для коэффициентов $\{\mu_1,\mu_1^{(1)}\}$:

$$\begin{aligned}\mu_1&=\frac{iuk}{4}\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right]+\delta\mu_1,\\ \mu_1^{(1)}&=\frac{iuk}{4}\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right]+\delta\mu_1^{(1)},\end{aligned} \quad (51)$$

где величины $\{\delta\mu_1;\delta\mu_1^{(1)}\}$ определяются выражениями

$$\delta\mu_1 = \frac{T}{2\pi eBD\langle|\Delta_0|^2\rangle}\times \times\left\{\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\rangle\left(\frac{ku\sin\eta}{2\kappa^2}-\gamma_1\right)+ + \frac{i\pi eD}{8T}ku(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right] - -i\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2T^2}ku\left\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\right\rangle\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right]+ + \frac{\pi eD}{16T}ku\left\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} - - \Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\right\rangle\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right] - - i\frac{7\zeta(3)}{32\pi^2T^2}ku\left\langle(\Delta_0)^2((\Delta_0^{(2)})^*)^2\right\rangle\times \times\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right] - \frac{i\pi eD}{4T}\times \times\left\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}_1\partial_-^{(0)})\Delta_0-\Delta_0(\mathbf{A}_1\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\right\rangle - - \frac{\pi eD}{2T}\left\langle(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0(\mathbf{k}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^* - - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}^{(1)})(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0\right\rangle\right\}, \tag{52}$$

$$\delta\mu_1^{(1)} = \frac{T}{2\pi eBD\langle|\Delta_0|^2\rangle}\times \times\left\{-\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\rangle\left(\frac{ku\sin\eta}{2\kappa^2}+\gamma_1\right)+ + \frac{i\pi eD}{8T}(H_{c2}-B)uk\langle|\Delta_0|^2\rangle\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right] - - i\frac{7\zeta(3)ku}{32\pi^2T^2}\left\langle(\Delta_0^*)^2(\Delta_0^{(2)})^2\right\rangle\exp\left[i(2\varphi+\eta)\right] - - \frac{\pi eDku}{16T}\left\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+)(\Delta_0^{(2)})^* - - (\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}\right\rangle\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right] - - i\frac{7\zeta(3)ku}{16\pi^2T^2}\left\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\right\rangle\exp\left[-i(2\varphi+\eta)\right] + + \frac{i\pi eD}{4T}\left\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}_1\partial_+^{(0)})\Delta_0^*-\Delta_0^*(\mathbf{A}_1\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}\right\rangle + + \frac{\pi eD}{2T}\left\langle\Delta_0^*(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)})(\mathbf{k}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} - - \Delta_0^{(2)}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}^{(1)})(\mathbf{u}\partial_+^{(0)})\Delta_0^*\right\rangle\right\}.$$

Для вычисления значения энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ нам понадобятся также явные выражения для следующих трех величин:

$$\langle(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle = eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\mathbf{u}^2 - 2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\times \times\left[(\alpha_2+\alpha_2^*)\cos\left(2(\varphi+\eta)\right) - - i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin\left(2(\varphi+\eta)\right)\right]\mathbf{u}^2 - - \frac{2T}{\pi^2\nu D}\langle(\mathbf{H}-\mathbf{B})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)})\rangle,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)}) = \left[0;0;\frac{\mathbf{u}^2}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{A}^{(1)})_z + + \mathbf{u}^2\frac{\sin(2(\varphi+\eta))}{2}\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right) - - \mathbf{u}^2\frac{\cos(2(\varphi+\eta))}{2}\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right], \tag{53}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_1) = \left[0,0,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{A}_1)_z + + \left(k_xu_y\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial x}-k_yu_x\frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial y}\right) - - \frac{k_xu_x-k_yu_y}{2}\left(\frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial x}+\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial y}\right)\right].$$

В поперечных модах величина γ_1 пропорциональна $\langle|\Delta_0|^2\rangle^0$, а $\cos\eta$ пропорционален $\langle|\Delta_0|^2\rangle$. В результате величина $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ в формуле (15) для поперечных мод оказывается пропорциональной $\langle|\Delta_0|^2\rangle^2$. Используя формулы (15), (17), (18), (20), (24), (38), (51)–(53), приведем выражение для $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ в поперечных модах к виду

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})\left(\mathbf{B}^2+2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\right) = \frac{\pi D}{4T}\mathbf{k}^2\times \times\left\{-2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle[(\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2(\varphi+\eta)) - - i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2(\varphi+\eta))] - \frac{\pi^2e^2\nu D}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2(\beta_A-1) + + e\left\langle|\Delta_0|^2\left[\sin(2(\varphi+\eta))\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right) - - \cos(2(\varphi+\eta))\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right]\right\rangle\right\} + \frac{i\pi D}{4T}\frac{k}{u}\times \times\gamma_1\left\{-2eB\cos\eta\langle|\Delta_0|^2\rangle + 4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\times \times\left[(\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2\varphi+\eta) - i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2\varphi+\eta)\right] - - 2e\left\langle|\Delta_0|^2\left[\sin(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right) - - \cos(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right]\right\rangle\right\} + + \frac{i\pi D}{4T}\frac{k}{u}\left\{2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\left[\delta\mu_1^{(1)}\exp[i(2\varphi+\eta)] + + \delta\mu_1\exp[-i(2\varphi+\eta)]\right] + \frac{e}{2}\left[\exp[-i(2\varphi+\eta)]\times\right.\right.$$

$$\times \left\langle \left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{u}\partial_-^{(0)}\Delta_0\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\mathbf{k}\partial_-^{(0)}\right)\left(\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)}\right)\Delta_0\right)\right\rangle - \exp[i(2\varphi+\eta)] \times$$
$$\times \langle \Delta_0^{(2)}\left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{u}\partial_+^{(0)}\right)\Delta_0^* +$$
$$+ \left.\left.(\mathbf{k}\partial_+^{(0)})\left(\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)}\right)\Delta_0^*\right)\rangle\right]\right\} -$$
$$- i\frac{7\zeta(3)\mathbf{k}^2}{32\pi^2T^2\kappa^2}\sin\eta\langle|\Delta_0|^2\left[\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\exp[i(2\varphi+\eta)] - \right.$$
$$\left. - \Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\exp[-i(2\varphi+\eta)]\right]\rangle + \frac{\mathbf{B}^2\mathbf{k}^2}{4\pi\nu}\cos^2\eta -$$
$$- \frac{i\pi eD}{4T}\frac{k}{u}\left\langle |\Delta_0|^2\left[\sin(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial x} - \frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial y}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \cos(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial x}\right)\right]\right\rangle. \quad (54)$$

Спектр возбуждений поперечных мод $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ в формуле (54) зависит от величин $\{\gamma_1, \cos\eta, \mathbf{A}_1, \delta\mu, \delta\mu_1^{(1)}\}$. Все они определяются несколькими структурными константами, зависящими от типа решетки. В частности, величина $\cos\eta$ зависит от константы Абрикосова β_A и одного коррелятора $\langle|\Delta_0|^2\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\rangle$. В общем случае спектр оказывается сильноанизотропным и зависит от ориентации вектора $\mathbf{k}$ относительно осей решетки Абрикосова.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН $\{\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}_1, \boldsymbol{\Delta}_1\}$

Для вычисления величин $\{\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}_1, \Delta_1\}$ необходимо найти две функции $\{\Delta_0^*\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\}$. Ниже ограничимся рассмотрением решеток Абрикосова с одним квантом потока в элементарной ячейке при произвольном значении угла ϕ между векторами элементарной ячейки.

В решетке с одним квантом потока в элементарной ячейке коэффициенты C_N равны

$$C_N = C_0\exp\left(\frac{i\pi}{2}N^2\right). \quad (55)$$

Векторы элементарной ячейки выберем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= a\left(\cos\frac{\phi}{2}; -\sin\frac{\phi}{2}\right), \\ \mathbf{a}_2 &= a\left(\cos\frac{\phi}{2}; \sin\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned} \quad (56)$$

В решетке с n квантами потока в элементарной ячейке выполняются следующие уравнения:

$$e\mathbf{B}\cdot[\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2] = \pi n, \quad x_1 = a\cos(\phi/2). \quad (57)$$

Векторы обратной решетки $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ определяются из уравнений (56) и равны

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{\cos(\phi/2)}; \frac{1}{\sin(\phi/2)}; 0\right), \\ \mathbf{k}_2 &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{\cos(\phi/2)}; -\frac{1}{\sin(\phi/2)}; 0\right). \end{aligned} \quad (58)$$

Функции $\Delta_0^*\Delta_0^{(M)}$ являются периодическими на решетке и, следовательно, представимы в виде

$$\Delta_0^*\Delta_0^{(M)} = \sum_{L_0,k_0} B_{L_0,k_0}^{(0,M)}\exp\left[i2\pi(L_0t_2 + k_0t_1)\right], \quad (59)$$

где переменные $\{t_1, t_2\}$ введены вместо переменных $\{x, y\}$ и связь между ними определяется формулами

$$x = a\cos(\phi/2)(t_1+t_2), \quad y = a\sin(\phi/2)(t_2-t_1). \quad (60)$$

Используя уравнение (19), находим уравнение для коэффициентов $B_{L_0,k_0}^{(0,M)}$ $(M = 0,1,2,3)$:

$$\begin{pmatrix} B_{L_0,k_0}^{(0,0)} \\ B_{L_0,k_0}^{(0,1)} \\ B_{L_0,k_0}^{(0,2)} \\ B_{L_0,k_0}^{(0,3)} \end{pmatrix} =$$
$$= |C_0|^2\exp\left[-\frac{i\pi}{2}(L_0-k_0)^2 - \frac{eB}{2}x_1^2(L_0-k_0)^2\right] \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x_1}\exp\left[-\frac{i\pi x}{x_1}(L_0+k_0) - \right.$$
$$\left. - 2eB\left(x + x_0 + \frac{L_0-k_0}{2}x_1\right)^2\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{eB}(x+x_0) \\ 4eB(x+x_0)^2 - 1 \\ (2\sqrt{eB}(x+x_0))^3 - 6\sqrt{eB}(x+x_0) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Выполняя интегрирование в формуле (61), находим окончательное выражение для коэффициентов $B_{L_0,k_0}^{(0,M)}$ при $M = 0,1,2,3$:

$$
\begin{pmatrix} B^{(0,0)}_{L_0,k_0} \\ B^{(0,1)}_{L_0,k_0} \\ B^{(0,2)}_{L_0,k_0} \\ B^{(0,3)}_{L_0,k_0} \end{pmatrix} = |C_0|^2 \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \exp\left\{ i\pi k_0 (L_0 - k_0) + \frac{i\pi x_0 (L_0 + k_0)}{a\cos(\phi/2)} - \frac{\pi}{2\sin\phi}(L_0^2 + k_0^2 - 2L_0 k_0 \cos\phi) \right\} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left[\frac{L_0 - k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}} + i(L_0 + k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \right] \\ \frac{\pi}{2} \left[\frac{L_0 - k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}} + i(L_0 + k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \right]^2 \\ -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \left[\frac{L_0 - k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}} + i(L_0 + k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \right]^3 \end{pmatrix}. \quad (62)
$$

Для вычисления структурных констант, входящих в выражение (54) для величины $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, нам понадобится уравнение

$$
\partial_-^{(0)} \Delta_0^{(2)} = 2\sqrt{eB}(1; -i)\Delta_0^{(1)} - \sqrt{eB}(1; i)\Delta_0^{(3)}. \quad (63)
$$

Кроме того, нам понадобится явное выражение для величин $\{\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}_1\}$. Величина $\mathbf{A}^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{(1)} = -\frac{\pi^2 e\nu D}{T}\operatorname{rot}(0, 0, |\Delta_0|^2). \quad (64)
$$

Величина $|\Delta_0|^2$ определяется уравнениями (59), (60), (62) и равна

$$
|\Delta_0|^2 = \sum_{L_0,k_0} B^{(0,0)}_{L_0,k_0} \times \exp\left[i2\pi \left(\frac{x(L_0 + k_0)}{2a\cos(\phi/2)} + \frac{y(L_0 - k_0)}{2a\sin(\phi/2)} \right) \right]. \quad (65)
$$

Учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{A}^{(1)} = 0$, ищем решения уравнений (64), (65) в виде

$$
\mathbf{A}^{(1)} = \sum_{L_0,k_0} \mathbf{A}^{(1)}_{L_0,k_0} \times \exp\left[2\pi i \left(\frac{x(L_0 + k_0)}{2a\cos(\phi/2)} + \frac{y(L_0 - k_0)}{2a\sin(\phi/2)} \right) \right]. \quad (66)
$$

Подставляя выражение (66) для величины $\mathbf{A}^{(1)}$ в уравнение (64), получим

$$
\mathbf{A}^{(1)}_{L_0,k_0} = -\frac{ia}{4\pi}\frac{\pi^2 e\nu D}{T} B^{(0,0)}_{L_0,k_0} \frac{\sin^2\phi}{L_0^2 + k_0^2 - 2L_0 k_0\cos\phi} \times \left(\frac{L_0 - k_0}{\sin(\phi/2)}; -\frac{L_0 + k_0}{\cos(\phi/2)} \right), \quad L_0^2 + k_0^2 \neq 0. \quad (67)
$$

Величина $\mathbf{A}_1$ удовлетворяет уравнению (32). В главном приближении по параметру $1 - B/H_{c2}$ решение уравнения (32) ищем в виде

$$
\mathbf{A}_1 = \sum_{L_0,k_0} \mathbf{A}_1^{(L_0,k_0)} \times \exp\left[2\pi i \left(\frac{x(L_0 + k_0)}{2a\cos(\phi/2)} + \frac{y(L_0 - k_0)}{2a\sin(\phi/2)} \right) \right]. \quad (68)
$$

Подставляя выражение (68) для величины $\mathbf{A}_1$ в формулу (32) и используя формулу (59), получим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_1^{(L_0,k_0)} = \frac{a}{\pi}\frac{\sin^2\phi}{L_0^2 + k_0^2 - 2L_0 k_0\cos\phi} \times \Bigg\{ -\frac{i\pi^2 e\nu D}{2T}\gamma_1 B^{(0,0)}_{L_0,k_0} + \\
+ \frac{\pi^2 e\nu D}{16T} ku \Big[\exp[i(2\varphi + \eta)] B^{(0,2)}_{L_0,k_0} + \\
+ \exp[-i(2\varphi + \eta)] (B^{(0,2)}_{-L_0,-k_0})^* \Big] \Bigg\} \times \\
\times \left(\frac{L_0 - k_0}{\sin(\phi/2)}; -\frac{L_0 + k_0}{\cos(\phi/2)} \right), \quad L_0^2 + k_0^2 \neq 0. \quad (69)
\end{aligned}
$$

Формулы (62), (67), (69) позволяют получить значения почти всех структурных констант, определяющих величины $\{\cos\eta, \gamma_1, \delta\mu_1, \delta\mu_1^{(1)}, \mathcal{E}(\mathbf{k})\}$ при произвольных значениях угла ϕ между векторами элементарной ячейки. В частности, $\cos\eta$ определяется одной структурной константой Γ_{02}^{00}, равной

$$
\Gamma_{02}^{00} = \sum_{L_0,k_0} B^{(0,0)}_{-L_0,-k_0} B^{(0,2)}_{L_0,k_0} = \langle |\Delta_0|^2 \Delta_0^* \Delta_0^{(2)} \rangle. \quad (70)
$$

Для получения величин $\{\delta\mu_1, \delta\mu_1^{(1)}\}$ необходимо найти еще три функции $(\Delta_0^{(2)})^* \Delta_0^{(M)}$ $(M = 1, 2, 3)$. Эти функции также периодические и могут быть представлены в виде (см. уравнение (59))

$$(\Delta_0^{(2)})^*\Delta_0^{(M)} = \\ = \sum_{L_0,k_0} B_{L_0,k_0}^{(2,M)} \exp\left[2\pi i(L_0t_2+k_0t_1)\right]. \quad (71)$$

Используя уравнения (19), (71), находим уравнение для коэффициентов $B_{L_0,k_0}^{(2,M)}$:

$$\begin{pmatrix} B_{L_0,k_0}^{(2,1)} \\ B_{L_0,k_0}^{(2,2)} \\ B_{L_0,k_0}^{(2,3)} \end{pmatrix} = \frac{|C_0|^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\exp\left\{i\pi k_0(L_0-k_0)+\frac{i\pi x_0}{x_1}(L_0+k_0)-\frac{\pi}{2\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right\}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp(-x^2)\frac{1}{2}H_2\left(x+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{L_0-k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}}-i(L_0+k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)\right)\times \\ \times\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}H_1\left(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{L_0-k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}}+i(L_0+k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)\right) \\ \frac{1}{2}H_2\left(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{L_0-k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}}+i(L_0+k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}H_3\left(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{L_0-k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}}+i(L_0+k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)\right) \end{pmatrix}, \quad (72)$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита [6].

Выполняя интегрирование по x в формуле (72), находим следующие значения для величин $B_{L_0,k_0}^{(2,M)}$ $(M=1,2,3)$:

$$\begin{pmatrix} B_{L_0,k_0}^{(2,1)} \\ B_{L_0,k_0}^{(2,2)} \\ B_{L_0,k_0}^{(2,3)} \end{pmatrix} = |C_0|^2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\exp\left\{i\pi k_0(L_0-k_0)+\frac{i\pi x_0}{x_1}(L_0+k_0)-\frac{\pi}{2\sin\phi}Z\right\}\times \\ \times\begin{pmatrix} \sqrt{2\pi}\left(\frac{L_0-k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}}-i(L_0+k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)\left[-\frac{\pi}{2\sin\phi}Z+1\right] \\ \frac{\pi^2}{\sin^2\phi}Z^2-\frac{4\pi}{\sin\phi}Z+2 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{L_0-k_0}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}}+i(L_0+k_0)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)\left[-\frac{\pi^2}{\sin^2\phi}Z^2+\frac{6\pi}{\sin\phi}Z-6\right] \end{pmatrix}, \quad (73)$$

где $Z=L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi$.

Решение уравнения Гинзбурга–Ландау ищем в виде (17), (20). Для нахождения спектра нам дополнительно потребуется лишь величина α_2. Используя уравнения Гинзбурга–Ландау, находим величину α_2:

$$\frac{2\pi eBD}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle\alpha_2 = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2(\Delta_0^{(2)})^*\Delta_0\rangle - \\ -\frac{i\pi eD}{4T}\sqrt{eB}\left\langle(A_x^{(1)}-iA_y^{(1)})\Delta_0(\Delta_0^{(3)})^*\right\rangle + \\ +\frac{i\pi eD}{4T}\sqrt{eB}\left\langle(A_x^{(1)}+iA_y^{(1)})(2\Delta_0(\Delta_0^{(1)})^* + \\ +\Delta_0^{(1)}(\Delta_0^{(2)})^*)\right\rangle. \quad (74)$$

Уравнение (74) завершает нахождение всех структурных блоков, входящих в выражения для величин $\{\alpha_2,\cos\eta,\delta\mu_1,\delta\mu_1^{(1)},\mathcal{E}(\mathbf{k})\}$.

В Приложении мы приведем явный вид блоков, в которые входят величины $\{\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{A}_1\}$, а также четыре блока, в которые входят величины $\{\Delta_0,\Delta_0^{(2)}\}$.

Физический интерес представляют лишь те значения угла ϕ, при которых свободная энергия $\mathcal{F}_S-\mathcal{F}_N$ имеет экстремум: $\phi=\pi/3$ — точка минимума; $\phi=\pi/2$ — точка максимума. При этих значениях угла ϕ часть структурных констант обращается в нуль. В Приложении мы найдем эти константы:

$$\sum_{L_0,k_0} \exp\left[-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right] \times \\ \times \left[(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0\right] = 0,$$
$$\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \exp\left[-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right] \times \\ \times \frac{(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} = 0. \quad (75)$$

В результате в точках $\{\phi = \pi/3, \phi = \pi/2\}$ блоки (94), (95), (96) и последний член в фигурных скобках (98) обращаются в нуль. Величина Γ_{02}^{00} (см. уравнение (70)) также обратится в нуль при $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$:

$$\Gamma_{02}^{00} = 0 \quad (\phi = \pi/3, \pi/2). \quad (76)$$

Уравнения (75), (76) приводят к тому, что величины $\{\alpha_2, \gamma_1, \cos\eta\}$ равны нулю при $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$:

$$\gamma_1 = 0, \quad \cos\eta = 0, \quad \alpha_2 = 0. \quad (77)$$

Кроме того, в этих же точках выполняются равенства

$$\sum_{L_0,k_0} \exp\left[-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right] \times \\ \times \left(\frac{(L_0-k_0)^2}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}\sin(\phi/2)} - \frac{(L_0+k_0)^2}{\cos(\phi/2)}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right) = \\ = 0, \quad (78)$$

$$\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right)}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} \times \\ \times \left(\frac{(L_0-k_0)^4}{\sqrt{\operatorname{tg}^3(\phi/2)}\sin(\phi/2)} - \frac{(L_0+k_0)^4}{\cos(\phi/2)}\sqrt{\operatorname{tg}^3\frac{\phi}{2}}\right) = 0.$$

Первое из уравнений (78) приводит к равенству $G_1 = G_2$, а второе — к равенству $R_1 = -R_2$ в точках $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$ (см. Приложение).

Отметим, что, поскольку $\Gamma_{20}^{02} \equiv \Gamma_{00}^{22}$ при всяком ϕ, имеет место равенство

$$\sum_{L_0,k_0} \exp\left[-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right] \times \\ \times \left[1 - \frac{2\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right] = 0. \quad (79)$$

6. РЕШЕТКИ АБРИКОСОВА С УГЛАМИ $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$

Вычисление структурных констант при угле $\phi = \pi/3$ приводит к следующим результатам:

$$\begin{gathered} S = \beta_A = 1.159595, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 2.112642, \\ S_3 = 0, \quad F = F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = -1.05298, \\ F_4 = G_4 = -0.0724747, \quad F_5 = 0, \\ F_6 = -0.8652635, \quad F_7 = F_8 = -0.2217276, \\ F_9 = 0, \quad G_1 = G_2 = 0.9563497, \\ R_1 = -R_2 = -R_3 = 0.7172621. \end{gathered} \quad (80)$$

При угле $\phi = \pi/2$ для структурных констант находим следующие значения:

$$\begin{gathered} S = \beta_A = 1.18034, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 2.003412, \\ S_3 = -1.413242, \quad F = F_1 = F_2 = 0, \\ F_3 = -1.278582, \quad F_4 = -0.135806, \quad F_5 = 0, \\ F_6 = -0.9145444, \quad F_7 = -0.1005965, \\ F_8 = -0.3109393, \quad F_9 = 0, \\ G_1 = G_2 = 1.046047, \quad R_1 = -R_2 = 0.5646296, \\ R_3 = -1.44426, \quad G_4 = -1.173652\cdot 10^{-2}. \end{gathered} \quad (81)$$

Используя уравнения (52) и формулы (95)–(105), получим для величин $\{\delta\mu_1, \delta\mu_1^{(1)}\}$ значения, справедливые при $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$:

$$\delta\mu_1 = i\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle ku}{32\pi^3 eBDT}\Bigg\{\exp[i(2\varphi+\eta)] \times \\ \times \left[\left(\beta_A - \frac{\beta_A - 1}{\kappa^2}\right) - S_2 + \frac{F_6}{2\kappa^2\sqrt{\sin\phi}} + \right. \\ \left. + \frac{F_3+G_1}{\kappa^2\sqrt{\pi\sin\phi}}\right] + \exp[-i(2\varphi+\eta)] \times \\ \times \left(\frac{R_1+R_3}{\kappa^2\sqrt{\pi\sin\phi}} - \frac{S_3}{2}\right) - \frac{2}{\kappa^2\sqrt{\sin\phi}} \times \\ \times \left[F_7\cos(2\varphi+\eta) + iF_8\sin(2\varphi+\eta)\right]\Bigg\}, \quad (82)$$

$$\delta\mu_1^{(1)} = i\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle ku}{32\pi^3 eBDT}\Bigg\{\exp[-i(2\varphi+\eta)] \times \\ \times \left[\left(\beta_A - \frac{\beta_A - 1}{\kappa^2}\right) - S_2 + \frac{F_6}{2\kappa^2\sqrt{\sin\phi}} + \right. \\ \left. + \frac{F_3+G_1}{\kappa^2\sqrt{\pi\sin\phi}}\right] + \exp[i(2\varphi+\eta)]\left(\frac{R_1+R_3}{\kappa^2\sqrt{\pi\sin\phi}} - \frac{S_3}{2}\right) - \\ - \frac{2}{\kappa^2\sqrt{\sin\phi}}\left[F_7\cos(2\varphi+\eta) - iF_8\sin(2\varphi+\eta)\right]\Bigg\}.$$

В выражение для энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ входит лишь линейная комбинация величин $\{\delta\mu_1, \delta\mu_1^{(1)}\}$, значение которой при $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$ определяется формулами (82):

$$\delta\mu_1 \exp[-i(2\varphi+\eta)] + \delta\mu_1^{(1)} \exp[i(2\varphi+\eta)] = = i\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle ku}{16\pi^3 eBDT}\left\{\beta_A - S_2 - \frac{1}{2}S_3\cos(4\varphi+2\eta) + \frac{1}{\kappa^2}\left[-(\beta_A-1) + \frac{F_6}{2\sqrt{\sin\phi}} + \frac{F_3+G_1}{\sqrt{\pi\sin\phi}} + \frac{R_1+R_3}{\sqrt{\pi\sin\phi}}\cos(4\varphi+2\eta) - \frac{2}{\sqrt{\sin\phi}} \times \left[F_7\cos^2(2\varphi+\eta) + F_8\sin^2(2\varphi+\eta)\right]\right]\right\}. \quad (83)$$

Выражение (83) и формулы (97)–(99), (103) из Приложения позволяют записать энергию, $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ (см. (54)) при экстремальных значениях $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$ в относительно простом виде:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})(\mathbf{B}^2 + 2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle) = -\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle\mathbf{k}^2}{32\pi^2T^2} \times \left\{\beta_A - S_2 - \frac{1}{2}S_3\cos(4\varphi+2\eta) + \frac{1}{\kappa^2} \times \left[3(\beta_A-1) + \frac{F_6}{2\sqrt{\sin\phi}} + \frac{2(F_3+G_1)}{\sqrt{\pi\sin\phi}} + \frac{2(R_1+R_3)}{\sqrt{\pi\sin\phi}} \times \cos(4\varphi+2\eta) - \frac{2}{\sqrt{\sin\phi}}[F_7\cos^2(2\varphi+\eta) + F_8\sin^2(2\varphi+\eta)] - 8[F_4\sin^2(2\varphi+\eta) + G_4\cos^2(2\varphi+\eta)]\right]\right\}. \quad (84)$$

В треугольной решетке выполняются равенства $S_3 = 0$, $R_1 + R_3 = 0$, $F_4 = G_4$, $F_7 = F_8$. В результате величина $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ в треугольной решетке не зависит от угла φ в квадратичном по $\mathbf{k}$ приближении. Используя значение констант, приведенных в формуле (80), получим следующее выражение для $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ при $\phi = \pi/3$ [7]:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})(\mathbf{B}^2 + 2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle) = \frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle\mathbf{k}^2}{32\pi^2T^2} \times \left\{(S_2 - \beta_A) - \frac{1}{\kappa^2}\left[3(\beta_a - 1) + \frac{F_6}{2\sqrt{\sin\phi}} + \frac{2(F_3+G_1)}{\sqrt{\pi\sin\phi}} - \frac{2F_7}{\sqrt{\sin\phi}} - 8G_4\right]\right\}, \quad (85)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})(\mathbf{B}^2 + 2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle) = \frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle\mathbf{k}^2}{32\pi^2T^2} \times 0.953047\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right). \quad (86)$$

Из формулы (86) следует, что точка $\kappa = 1$ является особой точкой. При $\kappa = 1$ и $\phi = \pi/3$ величина $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ обращается в нуль в квадратичном по $\mathbf{k}$ приближении и становятся существенными следующие члены разложения энергии возбуждений по степеням $\mathbf{k}$. Тем не менее заключение о проблеме устойчивости с одним квантом потока в элементарной ячейке при значениях κ, близких к единице ($\kappa > 1$), можно сделать из рассмотрения $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ при $\phi = \pi/2$. Это связано с тем, что при $\kappa = 1$ свободная энергия треугольной решетки ($\phi = \pi/3$) совпадает со свободной энергией квадратной решетки ($\phi = \pi/2$). Используя формулы (81), (84), получим следующее выражение для энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ для квадратной ячейки ($\phi = \pi/2$):

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})\left(\mathbf{B}^2 + 2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\right) = \frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle\mathbf{k}^2}{32\pi^2T^2} \times \left\{0.823072\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) - \cos(4\varphi+2\eta) \times \left(0.706621 - \frac{1.69972}{\kappa^2}\right)\right\}. \quad (87)$$

Из формулы (87) следует, что коэффициент при члене $\cos(4\varphi + 2\eta)$ не обращается в нуль при $\kappa \to 1$. Следовательно, существуют решения с энергией, меньшей чем энергия квадратной решетки, и отстоящие от нее по энергии на конечное расстояние при $\kappa \to 1$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены «мягкие» бесщелевые моды поперечных возбуждений для треугольной ($\phi = \pi/3$) и квадратной ($\phi = \pi/2$) решеток Абрикосова с одним квантом потока в элементарной ячейке. Показано, что в квадратичном приближении по $\mathbf{k}$ изотропная часть энергии возбуждений для обеих решеток пропорциональна величине $1 - 1/\kappa^2$. В треугольной решетке анизотропная часть энергии возбуждений в квадратичном по $\mathbf{k}$ приближении равна нулю.

Анализ спектра возбуждений треугольной и квадратной решеток показывает, что существуют решетки с числом квантов потока в элементарной ячейке, большим единицы, такие, что свободная энергия меньше свободной энергии треугольной решетки с одним квантом потока в элементарной ячейке по крайней мере в области значений κ, близких к единице ($\kappa > 1$).

Отметим, что при $\kappa = 1$ уравнения Гинзбурга–Ландау имеют N-вихревые решения при произвольном положении нулей параметра порядка [8, 9]. Проблема экспериментального наблюдения состояний, отличных от состояния с одним квантом потока в элементарной ячейке, осложняется тем, что не известна область по величине параметра Гинзбурга–Ландау κ, внутри которой такие состояния существуют, а также не изучена структура этих состояний (число квантов потока в элементарной ячейке, положение нулей параметра порядка). Область значений параметра κ, близких к единице, интересна еще и тем, что из-за сильного вырождения становятся существенными следующие члены разложения свободной энергии (1) по параметру $1-T/T_c$ [10], что приводит к дополнительному расширению множества возможных состояний. Решение этих проблем будет способствовать росту интереса к проведению экспериментальных исследований сверхпроводимости вблизи особой точки $\kappa = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы найдем явный вид всех блоков, возникающих в величинах $\{\delta\mu_1, \delta\mu_1^{(1)}, \mathcal{E}(\mathbf{k})\}$. Прежде всего, используя уравнения (67), (69), выразим блоки, содержащие величины $\{\mathbf{A}_1^{(1)}, \mathbf{A}_1\}$ через величины $\{B_{L_0,k_0}^{(0,M)}, B_{L_0,k_0}^{(2,M)}\}$:

$$\left\langle \left(A_x^{(1)} - iA_y^{(1)}\right)\left(\Delta_0^{(3)}\right)^*\Delta_0 \right\rangle = -\frac{ia}{4}\,\frac{\pi e\nu D}{T}\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} B_{L_0,k_0}^{(0,0)}\left(B_{L_0,k_0}^{(0,3)}\right)^*\times \left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)}+i\frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)}\right)\frac{\sin^2\phi}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi}, \tag{88}$$

$$\left\langle \left(A_x^{(1)} + iA_y^{(1)}\right)\left[2\left(\Delta_0^{(1)}\right)^*\Delta_0 + \left(\Delta_0^{(2)}\right)^*\Delta_0^{(1)}\right] \right\rangle = -\frac{ia}{4}\,\frac{\pi e\nu D}{T}\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} B_{L_0,k_0}^{(0,0)}\left[2\left(B_{L_0,k_0}^{(0,1)}\right)^* + B_{-L_0,-k_0}^{(2,1)}\right]\frac{\sin^2}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi}\times \left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)}-i\frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)}\right), \tag{89}$$

$$\left\langle |\Delta_0|^2\left[\sin(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right) - \cos(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right]\right\rangle = \frac{\pi^2 e\nu D}{T}\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0}|B_{L_0,k_0}^{(0,0)}|^2\frac{1}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi}\times \left\{(L_0^2-k_0^2)\sin\phi\sin(2\varphi+\eta) + [2L_0k_0-\cos\phi(L_0^2+k_0^2)]\cos(2\varphi+\eta)\right\}, \tag{90}$$

$$\left\langle (\Delta_0^{(2)})^*\left[(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{u}\partial_-\Delta_0) + (\mathbf{k}\partial_-^{(0)}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0)\right]\right\rangle = iku\sqrt{eB}\,\frac{a}{4}\,\frac{\pi e\nu D}{T}\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0}\frac{\sin^2\phi}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi}\times B_{L_0,k_0}^{(0,0)}\left\{\exp[i(\varphi+\eta)]B_{-L_0,-k_0}^{(2,1)}\left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)}\cos\varphi - \frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)}\sin\varphi\right) + \left[2\exp(i\varphi)\left(B_{L_0,k_0}^{(0,1)}\right)^* - \exp(-i\varphi)\left(B_{L_0,k_0}^{(0,3)}\right)^*\right]\times \left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)}\cos(\varphi+\eta) - \frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)}\sin(\varphi+\eta)\right)\right\}, \tag{91}$$

$$\left\langle |\Delta_0|^2\left[\sin(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial x}-\frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial y}\right) - \cos(2\varphi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial y}+\frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial x}\right)\right]\right\rangle = 2i\frac{\pi^2 e\nu D}{T}\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0}\frac{\left(B_{L_0,k_0}^{(0,0)}\right)^*}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi}\times \left\{(L_0^2-k_0^2)\sin\phi\sin(2\varphi+\eta) + (2L_0k_0-\cos\phi(L_0^2+k_0^2))\cos(2\varphi+\eta)\right\}\times \left\{-i\gamma_1 B_{L_0,k_0}^{(0,0)} + \frac{ku}{8}\left[\exp[i(2\varphi+\eta)]B_{L_0,k_0}^{(0,2)} + \exp[-i(2\varphi+\eta)](B_{-L_0,-k_0}^{(0,2)})^*\right]\right\}, \tag{92}$$

$$\left\langle \left(\Delta_0^{(2)}\right)^*\left(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)}\Delta_0^{(2)}\right)\right\rangle = \frac{i\pi e\nu Da\sqrt{eB}}{4T}\sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0}\frac{B_{-L_0,-k_0}^{(0,0)}\sin^2\phi}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi}\times \left\{2B_{L_0,k_0}^{(2,1)}\left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)}+i\frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)}\right) - B_{L_0,k_0}^{(2,3)}\left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)}-i\frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)}\right)\right\}, \tag{93}$$

$$\left\langle \left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \left(\mathbf{A}_1 \partial_-^{(0)} \Delta_0\right) - \Delta_0 \left(\mathbf{A}_1 \partial_+^{(0)}\right) \left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \right\rangle =$$

$$= \frac{a}{\pi}\sqrt{eB} \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \frac{\sin^2\phi}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{i\pi^2 e\nu D}{2T}\gamma_1 B_{L_0,k_0}^{(0,0)} + \frac{\pi^2 e\nu D}{16T} ku \times \right.$$

$$\times \left[\exp[i(2\varphi+\eta)] B_{L_0,k_0}^{(0,2)} + \right.$$

$$\left. \left. + \exp[-i(2\varphi+\eta)] \left(B_{-L_0,-k_0}^{(0,2)}\right)^* \right] \right\} \times$$

$$\times \left[-\left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)} - i\frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)} \right) \times \right.$$

$$\times \left(B_{-L_0,-k_0}^{(2,1)} + 2\left(B_{L_0,k_0}^{(0,1)}\right)^* \right) +$$

$$\left. + \left(\frac{L_0-k_0}{\sin(\phi/2)} + i\frac{L_0+k_0}{\cos(\phi/2)} \right) \left(B_{L_0,k_0}^{(0,3)}\right)^* \right]. \quad (94)$$

Подставляя в формулы (88)—(94) значения величин $\{B_{L_0,k_0}^{(0,M)}, B_{L_0,k_0}^{(2,M)}\}$, получим явные выражения для блоков, включающих в себя величины $\{\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}_1\}$ и определяющих величины $\{\delta\mu_1,\ \delta\mu_1^{(1)}, \mathcal{E}(\mathbf{k})\}$:

$$\left\langle \left(A_x^{(1)} - iA_y^{(1)}\right) \left(\Delta_0^{(3)}\right)^* \Delta_0 \right\rangle =$$

$$= \frac{i\pi^{5/2} e\nu Da}{2T} |C_0|^4 \frac{\operatorname{tg}(\phi/2)}{\sqrt{\sin\phi}} \times$$

$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \exp\left[-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) \right] \times$$

$$\times \left[(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0 \right] =$$

$$= \frac{i\pi^{5/2} e\nu Da}{2T} \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 F, \quad (95)$$

$$\left\langle \left(A_x^{(1)} + iA_y^{(1)}\right) \left[2\left(\Delta_0^{(1)}\right)^* \Delta_0 + \left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \Delta_0^{(1)} \right] \right\rangle =$$

$$= \frac{i\pi^{3/2} e\nu Da}{T} |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \sqrt{\sin\phi} \times$$

$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \exp\left[-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) \right] \times$$

$$\times \frac{(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} \times$$

$$\times \left[2 - \frac{\pi}{2\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) \right] =$$

$$= \frac{i\pi^{3/2} e\nu Da}{T} \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 F_1, \quad (96)$$

$$\left\langle |\Delta_0|^2 \left[\sin(2\varphi+\eta) \left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \cos(2\varphi+\eta) \left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y} \right) \right] \right\rangle =$$

$$= -\frac{\pi^2 e\nu D}{T} |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \times$$

$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) \right) \times$$

$$\times \frac{(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} \cos(2\varphi+\eta) =$$

$$= \frac{\pi^2 e\nu D}{T} \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 \cos(2\varphi+\eta) F_2, \quad (97)$$

$$\left\langle \left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \left[\left(\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{k}\right) \left(\mathbf{u}\partial_-^{(0)}\Delta_0\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\mathbf{k}\partial_-^{(0)}\right) \left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{(1)}\right) \Delta_0 \right] \right\rangle =$$

$$= iku \frac{\pi e\nu Da}{4T} |C_0|^4 \sqrt{eB}\, \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \times$$

$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \frac{\sin^2\phi}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) \right) \times$$

$$\times \left\{ -\sqrt{\pi}\exp[i(2\varphi+\eta)] \frac{4(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)}{(\sin\phi)^{3/2}} + \right.$$

$$+ \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) \left(\frac{(L_0-k_0)^2\cos\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}(\phi/2)}\sin(\phi/2)} + \right.$$

$$\left. + i\frac{(L_0+k_0)^2}{\cos(\phi/2)} \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\sin\varphi \right) \exp[i(\varphi+\eta)] +$$

$$+ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \exp(-i\varphi) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{(L_0-k_0)^4}{\sqrt{\operatorname{tg}^3(\phi/2)}\sin(\phi/2)} \cos(\varphi+\eta) - \right. \right.$$

$$\left. - i\frac{(L_0+k_0)^4}{\cos(\phi/2)} \sqrt{\operatorname{tg}^3\frac{\phi}{2}} \sin(\varphi+\eta) \right) -$$

$$\left. \left. - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\phi}}(L_0^2-k_0^2)^2 \exp[-i(\varphi+\eta)] \right] \right\} =$$

$$= iku \frac{\pi e\nu Da}{4T} \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 \sqrt{eB} \{ \exp[i(2\varphi+\eta)] F_3 +$$

$$+ \exp[i(\varphi+\eta)](G_1\cos\varphi + iG_2\sin\varphi) +$$

$$+ \exp(-i\varphi)[R_1\cos(\varphi+\eta) + iR_2\sin(\varphi+\eta) +$$

$$+ R_3\exp[-i(2\varphi+\eta)]]\}, \quad (98)$$

$$\left\langle |\Delta_0|^2 \left[\sin(2\varphi+\eta) \left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial x} - \frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial y} \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \cos(2\varphi+\eta) \left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial x} \right) \right] \right\rangle =$$
$$= \frac{2\pi^2 ie\nu D}{T} |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \times$$
$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right)}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{\pi}{4} ku (L_0^2-k_0^2)^2 \sin\phi \sin^2(2\varphi+\eta) - \right.$$
$$- \frac{\pi}{4} ku \left[2L_0k_0 - (L_0^2+k_0^2)\cos\phi\right]^2 \frac{\cos^2(2\varphi+\eta)}{\sin\phi} -$$
$$\left. - i\gamma_1 [2L_0k_0 - (L_0^2+k_0^2)\cos\phi] \cos(2\varphi+\eta) \right\} =$$
$$= \frac{2\pi^2 ie\nu D}{T} \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 \{ ku[F_4 \sin^2\phi(2\varphi+\eta) +$$
$$+ G_4 \cos^2(2\varphi+\eta)] + i\gamma_1 \cos(2\varphi+\eta) F_5 \}, \quad (99)$$

$$\left\langle \left[\left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \left(\mathbf{A}_1 \partial_-^{(0)} \Delta_0\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Delta_0 \left(\mathbf{A}_1 \partial_+^{(0)} \left(\Delta_0^{(2)}\right)^*\right) \right] \right\rangle =$$
$$= \frac{\pi^{3/2} e\nu Da}{T} |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \sqrt{\sin\phi}\sqrt{eB} \times$$
$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi} - \frac{\pi}{2\sin\phi} \right) \times$$
$$\times \left\{ -4i\gamma_1 [(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0] + \right.$$
$$+ \pi ku \left[[(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0]^2 \frac{\cos(2\varphi+\eta)}{\sin\phi} + \right.$$
$$\left.\left. + i(L_0^2-k_0^2)^2 \sin\phi \sin(2\varphi+\eta) \right] \right\} = \frac{\pi^{3/2} e\nu Da}{T} \times$$
$$\times \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 \sqrt{eB} \{ i\gamma_1 F_9 + ku[\cos(2\varphi+\eta) F_7 +$$
$$+ i \sin(2\varphi+\eta) F_8] \}, \quad (100)$$

$$\left\langle \left(\Delta_0^{(2)}\right)^* \left(\mathbf{A}_1 \partial_-^{(0)} \Delta_0^{(2)}\right) \right\rangle =$$
$$= \frac{i\pi^{3/2} e\nu Da}{2T} \sqrt{eB} |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \sqrt{\sin\phi} \times$$
$$\times \sum_{L_0^2+k_0^2\neq 0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right) \times$$
$$\times \left\{ \frac{\pi^2}{\sin^2\phi} (L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{8\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi) + 10 \right\} =$$
$$= \frac{i\pi^{3/2} e\nu Da}{2T} \sqrt{eB} \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2 F_6. \quad (101)$$

Кроме блоков (95)–(101) существуют также более простые блоки, в которые входят лишь величины $\{\Delta_0, \Delta_0^{(2)}\}$. Четыре из них входят в выражение для функций $\{\delta\mu_1, \delta\mu_1^{(1)}, \mathcal{E}(\mathbf{k})\}$. Используя уравнения (61), (73), находим явные выражения для этих блоков:

$$\left\langle (\Delta_0^*)^2 (\Delta_0)^2 \right\rangle =$$
$$= \sum_{L_0,k_0} B_{L_0,k_0}^{(0,0)} \left(B_{L_0,k_0}^{(0,0)}\right)^* = |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \times$$
$$\times \sum_{L_0,k_0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right) =$$
$$= S\langle |\Delta_0|^2 \rangle^2, \quad (102)$$

$$\left\langle |\Delta_0|^2 \Delta_0^* \Delta_0^{(2)} \right\rangle = \sum_{L_0,k_0} B_{L_0,k_0}^{(0,0)} B_{-L_0,-k_0}^{(0,2)} =$$
$$= |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \frac{\pi}{\sin\phi} \times$$
$$\times \sum_{L_0,k_0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right) \times$$
$$\times [(L_0^2+k_0^2)\cos\phi - 2L_0k_0] = S_1 \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2, \quad (103)$$

$$\left\langle |\Delta_0|^2 |\Delta_0^{(2)}|^2 \right\rangle = \sum_{L_0,k_0} B_{L_0,k_0}^{(0,0)} \left(B_{L_0,k_0}^{(2,2)}\right)^* =$$
$$= |C_0|^4 \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \frac{\pi^2}{\sin^2\phi} \times$$
$$\times \sum_{L_0,k_0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)\right) \times$$
$$\times (L_0^2+k_0^2-2L_0k_0\cos\phi)^2 = S_2 \langle |\Delta_0|^2 \rangle^2, \quad (104)$$

$$\left\langle (\Delta_0^*)^2 \left(\Delta_0^{(2)}\right)^2 \right\rangle = \sum_{L_0,k_0} \left(B^{(0,2)}_{L_0,k_0}\right) \left(B^{(0,2)}_{-L_0,-k_0}\right) =$$

$$= |C_0|^4 \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \frac{\pi^2}{\sin^2\phi} \times$$

$$\times \sum_{L_0,k_0} \exp\left(-\frac{\pi}{\sin\phi}(L_0^2 + k_0^2 - 2L_0k_0\cos\phi)\right) \times$$

$$\times [(L_0^4 + k_0^4)\cos(2\phi) + 6L_0^2k_0^2 -$$

$$- 4L_0k_0(L_0^2 + k_0^2)\cos\phi] = S_3\langle|\Delta_0|^2\rangle^2. \quad (105)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).

2. Л. В. Шубников, В. И. Хоткевич, Ю. Д. Шепелев, Ю. Н. Рябинин, ЖЭТФ **7**, 221 (1937).

3. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918 (1959).

4. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).

5. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **144**, 552 (2013).

6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).

7. Ю. Н. Овчинников, И. М. Сигал, ЖЭТФ **150**, 135 (2016).

8. Е. Б. Богомольный, ЯФ **24**, 861 (1976).

9. A. V. Efanof, Phys. Rev. B **56**, 7839 (1997).

10. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **115**, 726 (1999).