ЖЭТФ, 2017, том 151, вып. 6, стр. 1139–1145

ПРОВОДИМОСТЬ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОМПОЗИТА С ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ВИДЕ СФЕРОИДОВ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 января 2017 г.

Дано решение задачи о проводимости трехмерной модели композита с включениями, имеющими форму сжатых эллипсоидов вращения (сфероидов), в широком интервале изменения концентрации. Рассмотрен весь диапазон изменения формы включений — от сферы до бесконечно тонкого кругового диска. Установлена связь порогов протекания в этой модели с величинами, характеризующими ее эффективную проводимость в пределе малой концентрации включений.

DOI: 10.7868/S0044451017060153

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение электрофизических свойств (в частности, проводимости) композиционных материалов является одной из приоритетных задач физики твердого тела. Для практических целей достаточно, как правило, выяснить зависимость эффективной проводимости σ_e от концентрации включений и других характеристик композита в широкой области их изменения. С теоретической точки зрения, особый интерес представляет изучение величины σ_e в сравнительно узкой окрестности порога протекания — критической концентрации, при которой происходит фазовый переход металл–диэлектрик. Как известно, в рамках гипотезы подобия [1] критические индексы проводимости одинаковы для всех неупорядоченных композитов и зависят только от размерности пространства. В то же время порог протекания не является универсальной характеристикой композитов и определяется конкретным видом включений. Поэтому выяснение влияния формы включений на величину порога протекания также представляет собой актуальную задачу и для эксперимента, и для теории.

Для двумерных моделей композитов исследованию влияния формы включений на эффективную проводимость (в том числе на порог протекания) посвящен ряд работ [2–9]. В работах [2–5] компьютерными методами рассматривалось подобное влияние диэлектрических включений в виде бесконечно тонких царапин, крестиков, квадратов, эллипсов и т. д. В работах [6, 7] изучалась зависимость проводимости реальных тонких пленок от числа пробитых в них отверстий (прорезей) вытянутой формы, имитирующих царапины. Наконец, в работах [8, 9] подобная задача решалась аналитическими методами — как точными, так и приближенными.

При рассмотрении сходных проблем в трехмерном случае ограничиваются, как правило, компьютерными экспериментами [10–14]. В этих работах основное внимание уделялось выяснению влияния формы включений (эллипсоиды, кубы, бесконечно тонкие непроницаемые для тока пластинки и т. д.) на порог протекания. В то же время зависимость эффективной проводимости от концентрации включений при заданной их форме в работах [10–14] практически не изучалась даже в случае малых концентраций, когда возможен строгий аналитический подход [15].

Цель настоящей статьи — дать аналитическое решение задачи о проводимости трехмерной модели композита со случайно распределенными в пространстве и хаотически ориентированными включениями, имеющими форму сжатых эллипсоидов вращения (сфероидов). Рассмотрены случаи как диэлектрических (d), так и идеально проводящих (s) включений формы, меняющейся от сферы до бесконечно тонкого кругового диска. В линейном по концентрации N включений приближении определены константы N_{Id} и N_{Is} — величины, характери-

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

зующие начальные участки зависимости $\sigma_e(N)$. Эти константы существенно зависят от величины и формы включения (в данном случае — от размера полуосей сфероида и их отношения γ) и играют важную роль во всем интервале изменения концентрации N.

При немалой концентрации включений проводимость рассматриваемой модели определена с помощью приближенного подхода — так называемой теории эффективной среды [16], или метода EMA (effective medium approximation). Этот метод удовлетворительно описывает, например, электропроводность случайно неоднородной системы в широкой области изменения концентрации [17]. Можно ожидать, что метод EMA с приемлемой точностью будет описывать и эффективную проводимость рассматриваемой модели.

Следует отметить, что приближение эффективной среды, как и всякая теория типа самосогласованного поля, неприменимо в окрестности порога протекания. Предсказывая сам факт существования фазового перехода металл–диэлектрик, это приближение дает для порога протекания оценку, справедливую только по порядку величины. В настоящей работе установлена приближенная связь величин N_{Id} и N_{Is} с реальными критическими концентрациями соответственно N_{cd} и N_{cs}. Эта связь дает возможность получить для величин N_{cd} и N_{cs} аналитические выражения, позволяющие определять (с точностью около 1 %) пороги протекания во всем диапазоне изменения параметра γ — отношения полуосей сфероида: $0 \leqslant \gamma \leqslant \infty$.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Эффективная электропроводность σ_e неоднородной системы, состоящей из матрицы проводимости σ_1 и сферических включений проводимости σ_2, в линейном по концентрации приближении дается выражением, отличающимся от известной формулы для диэлектрической проницаемости такой смеси (см. [18], § 9) только обозначениями. Для такой же системы с включениями произвольной формы величина σ_e в этом приближении может быть выражена через тензор дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$ отдельного включения [15]. Тензор $\hat{\Lambda}$ определяется через дипольный момент $\mathbf{p}$ включения, наведенный внешним однородным электрическим полем напряженности $\mathbf{E}_0$, следующим образом:

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\,\mathbf{E}_0. \tag{1}$$

В задаче об электропроводности тензор $\hat{\Lambda}$ зависит как от размера и формы включения, так и от отношения проводимостей компонент σ_2/σ_1. Для диэлектрических и идеально проводящих включений тензор поляризуемости $\hat{\Lambda}$ зависит только от их геометрических характеристик.

В линейном по концентрации приближении безразмерная эффективная проводимость $f = \sigma_e/\sigma_1$ изотропной в целом среды имеет вид [15]

$$f = 1 + \frac{4\pi}{3}\, N \,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}. \tag{2}$$

Здесь N — размерная концентрация включений (их число в единице объема). Появление в формуле (2) следа тензора $\hat{\Lambda}$ связано с усреднением по случайным ориентациям включений.

При $\sigma_2 = 0$ соответствующую безразмерную эффективную проводимость f_d запишем в виде

$$f_d = 1 - \frac{N}{N_{Id}}\,, \tag{3}$$

где

$$N_{Id} = \frac{3}{4\pi\,|\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d|}\,. \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) учтено, что для диэлектрических включений $\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d < 0$. Соответственно, при $\sigma_2 = \infty$ проводимость f_s системы с идеально проводящими включениями запишем, с учетом неравенства $\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s > 0$, в виде

$$f_s = 1 + \frac{N}{N_{Is}}\,, \tag{5}$$

$$N_{Is} = \frac{3}{4\pi\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s}\,. \tag{6}$$

Введенные в выражениях (3)–(6) константы N_{Id} и N_{Is} зависят только от геометрии включений и, как будет ясно из дальнейшего, задают масштаб, в котором может меняться концентрация N.

Главные значения Λ_μ тензора дипольной поляризуемости эллипсоида имеют вид

$$\Lambda_\mu = -\frac{a_x a_y a_z}{3}\,\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)\,n^{(\mu)}}, \quad \mu = x, y, z. \tag{7}$$

Здесь a_μ — полуоси эллипсоида, $n^{(\mu)}$ — коэффициенты деполяризации. Для сплюснутого эллипсоида вращения ($a_x = a_y > a_z$) [18]

$$n^{(z)} = \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\,(\varepsilon - \mathrm{arctg}\,\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a_x^2 - a_z^2}}{a_z} \tag{8}$$

и $n^{(x)} = n^{(y)} = (1 - n^{(z)})/2$. Для сферического включения ($a_\mu = R$) имеем $n^{(\mu)} = 1/3$, так что

$$\Lambda = -R^3 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2}, \tag{9}$$

и в этом случае из равенства (2) с учетом (9) следует

$$f = 1 - 3c \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2}, \tag{10}$$

где $c = 4\pi R^3 N/3$ — безразмерная концентрация включений (доля занимаемого объема). Выражение (10) отличается от известной формулы для диэлектрической проницаемости смеси [18] только обозначениями.

Для системы с диэлектрическими и идеально проводящими включениями сферической формы получаем соответственно

$$N_{Id} = \frac{1}{2\pi R^3} \simeq \frac{0.159}{R^3}, \quad N_{Is} = \frac{1}{4\pi R^3} \simeq \frac{0.080}{R^3}. \tag{11}$$

Для диэлектрического эллипсоида из выражения (7) следует

$$\left(\hat{\Lambda}_d\right)_\mu = -\frac{a_x a_y a_z}{3} \frac{1}{1 - n^{(\mu)}}, \tag{12}$$

так что при $a_x = a_y = R \neq a_z$ находим

$$N_{Id} = \frac{A_d}{R^3}, \quad A_d = \frac{9\gamma}{4\pi} \frac{1 - \left(n^{(z)}\right)^2}{5 - 3n^{(z)}}, \quad \gamma = \frac{R}{a_z}. \tag{13}$$

Здесь величина $n^{(z)}$ определена согласно (8) и γ — отношение полуосей сплюснутого ($\gamma \geqslant 1$) сфероида.

Для идеально проводящего эллипсоида из формулы (7) получаем

$$\left(\hat{\Lambda}_s\right)_\mu = \frac{a_x a_y a_z}{3} \frac{1}{n^{(\mu)}}, \tag{14}$$

так что для включений в виде эллипсоидов вращения получаем

$$N_{Is} = \frac{A_s}{R^3}, \quad A_s = \frac{9\gamma}{4\pi} \frac{n^{(z)}\left(1 - n^{(z)}\right)}{1 + 3n^{(z)}} \tag{15}$$

с теми же $n^{(z)}$ и γ. Для сферического ($\gamma = 1$) включения $n^{(z)} = 1/3$ и из (13), (15) следуют выражения (11).

При $a_z \ll R$ ($\gamma \gg 1$) из формулы (8) находим

$$n^{(z)} \simeq 1 - \frac{\pi}{2\gamma}, \quad n^{(x)} = n^{(y)} \simeq \frac{\pi}{4\gamma}. \tag{16}$$

В пределе $\gamma \to \infty$, отвечающем включению в виде бесконечно тонкого кругового диска, из выражений (13) и (15) получаем

$$N_{Id} = \frac{9}{8R^3} = \frac{1.125}{R^3}, \quad N_{Is} = \frac{9}{32R^3} \simeq \frac{0.281}{R^3}. \tag{17}$$

Сравнение выражений (17) и (11) показывает, что непроницаемый диск радиуса R вносит в сопротивление композита такой же вклад, как и диэлектрическая сфера радиуса приблизительно $0.521R$, а идеально проводящий диск — как и сфера радиуса примерно $0.656R$ в проводимость.

Заметим, что необходимым условием справедливости линейного приближения (2) является независимость вкладов отдельных включений в сопротивление или проводимость. Это условие выполняется, если не перекрываются области возмущенного потока вокруг включений. Другими словами, размер такой области должен быть мал по сравнению со средним расстоянием между центрами включений $\ell \sim N^{-1/3}$. В случае сферы радиуса R поток возмущается на расстоянии порядка R, так что условием применимости выражения (10) является $NR^3 \ll 1$ или $c \ll 1$ для безразмерной концентрации. Для круговых дисков радиуса R аналогичные соображения также приводят к условию $NR^3 \ll 1$. В общем случае линейное по концентрации приближение справедливо при $N \ll \left\{N_{Id}, N_{Is}\right\}$, т. е. когда поправка к единице в выражении (2) мала.

С увеличением концентрации идеально проводящих включений (например, дисков) эффективная проводимость σ_e композита возрастает и при $N = N_{cs}$ происходит фазовый переход, при котором σ_e обращается в бесконечность. Для качественной оценки порога протекания N_{cs} заметим, что если среднее расстояние между центрами дисков $\ell \sim N^{-1/3}$ велико по сравнению с их радиусом R, то в такой системе не может образоваться так называемый бесконечный кластер [1], по которому происходит протекание. Напротив, при $\ell \ll R$ и хаотической ориентации дисков такое протекание будет происходить. Следует ожидать поэтому, что пути протекания, пронизывающие весь образец, начнут появляться при промежуточных значениях $\ell \sim R$, так что для соответствующего порога получаем оценку

$$N_{cs} \sim \frac{1}{R^3}. \tag{18}$$

Оценка (18) справедлива по порядку величины, т. е. с точностью до численного коэффициента.

В случае идеально проводящих сфер для порога протекания N_{cs} также получаем оценку типа (18), но, вообще говоря, с другим численным коэффициентом.

В среде с диэлектрическими включениями при $N = N_{cd}$ происходит другой фазовый переход, при котором эффективная проводимость обращается в нуль. Порядковая оценка для N_{cd} в случае непроницаемых для тока дисков и сфер также имеет вид (18), однако следует ожидать, что здесь численный коэффициент будет существенно больше, чем для идеально проводящих включений. Это связано с тем, что прервать течение тока по проводящей матрице с помощью диэлектрических дисков или сфер значительно труднее, чем организовать по ним «протекание». Для обращения величины σ_e в нуль диэлектрические включения должны сблизиться на гораздо меньшее расстояние, чем идеально проводящие для обращения σ_e в бесконечность. Эти соображения подтверждаются результатами компьютерных экспериментов (см. разд. 4), в ходе которых определялись соответствующие численные коэффициенты в выражениях для N_{cd} и N_{cs}. Подчеркнем, что в этих экспериментах включения считались, как правило, «мягкими» (перекрывающимися), а распределение их центров — пуассоновским.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ EMA

Для количественной оценки проводимости обсуждаемой модели при немалых концентрациях воспользуемся приближением эффективной среды — методом EMA [16], обобщенным на случай включений произвольной формы.

Рассмотрим модель бинарного композита, состоящего из изотропной матрицы проводимости σ_1 и одинаковых включений (проводимости σ_2) фиксированной формы. Включения случайным образом распределены в пространстве и хаотически ориентированы, так что система в целом изотропна, а ее эффективная проводимость σ_e является скалярной величиной. Основное уравнение метода EMA в этом случае имеет вид [15]

$$p\,(\sigma_e-\sigma_1)\,\frac{3\sigma_e}{2\sigma_e+\sigma_1}-\frac{4\pi}{3}\,N\,\sigma_e\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}=0\,. \qquad (19)$$

Здесь p — безразмерная концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты (матрицы), N — размерная концентрация включений (их число в единице объема), $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости включения, окруженного «эффективной средой» с проводимостью σ_e.

В общем случае тензор $\hat{\Lambda}$ в (19) зависит от отношения σ_2/σ_e, так что без знания такой зависимости это уравнение неразрешимо. Однако для диэлектрических ($\sigma_2=0$) включений тензор $\hat{\Lambda}_d$ зависит только от их геометрии, и в этом случае для безразмерной эффективной проводимости $f_d=\sigma_e^{(d)}/\sigma_1$ из уравнения (19) находим

$$f_d=\frac{p-(4\pi/9)\,N\,|\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d|}{p+(8\pi/9)\,N\,|\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d|}\,. \qquad (20)$$

Для «бестелесных» (нулевого объема) включений имеем $p=1$, так что из равенства (20) следует

$$f_d=\frac{1-(4\pi/9)\,N\,|\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d|}{1+(8\pi/9)\,N\,|\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d|}\,. \qquad (21)$$

Отсюда для соответствующего порога протекания находим выражение

$$N_{cd}^{EMA}=\frac{9}{4\pi\,|\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_d|}\,. \qquad (22)$$

Для «бестелесных» включений в приближении метода EMA сравнение выражений (22) и (4) дает

$$N_{cd}^{EMA}=3\,N_{Id}\,. \qquad (23)$$

Для кругового диска, согласно (12), имеем

$$(\hat{\Lambda}_d)_x=(\hat{\Lambda}_d)_y=0\,,\quad (\hat{\Lambda}_d)_z=-\frac{2}{3\pi}\,R^3 \qquad (24)$$

и из (22) получаем

$$N_{cd}^{EMA}=\frac{27}{8}\,\frac{1}{R^3}=\frac{3.375}{R^3}\,. \qquad (25)$$

Этот же результат следует из соотношения (23) при подстановке выражения для N_{Id} из (17).

В случае идеально проводящих включений для безразмерной проводимости $f_s=\sigma_e^{(s)}/\sigma_1$ из (19) находим

$$f_s=\frac{p+(4\pi/9)\,N\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s}{p-(8\pi/9)\,N\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s}\,. \qquad (26)$$

Для «бестелесных» включений соотношение (26) принимает вид

$$f_s=\frac{1+(4\pi/9)\,N\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s}{1-(8\pi/9)\,N\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s}\,, \qquad (27)$$

откуда для соответствующего порога протекания получаем следующее выражение:

$$N_{cs}^{EMA}=\frac{9}{8\pi\,\mathrm{Sp}\,\hat{\Lambda}_s}\,. \qquad (28)$$

Сравнение выражений (28) и (6) дает

$$N_{cs}^{EMA}=(3/2)\,N_{Is}\,. \qquad (29)$$

Для идеально проводящего диска, согласно (14), имеем

$$(\hat{\Lambda}_s)_x=(\hat{\Lambda}_s)_y=\frac{4}{3\pi}\,R^3\,,\quad (\hat{\Lambda}_s)_z=0\,, \qquad (30)$$

так что в этом случае

$$N_{cs}^{EMA} = \frac{27}{64}\,\frac{1}{R^3} \simeq \frac{0.422}{R^3}\,. \qquad (31)$$

Этот же результат следует из соотношения (29) при подстановке выражения для N_{Is} из (17).

Использованный в этом разделе метод ЕМА является, как уже отмечалось, приближенным. Следует ожидать, тем не менее, что, как и в ряде других случаев (см. [15–17]), этот метод удовлетворительно описывает проводимость рассмотренной модели в достаточно широком диапазоне изменения концентрации и других входящих в задачу параметров. В то же время приближение эффективной среды теряет применимость в окрестности порога протекания — точки фазового перехода. Поэтому даваемые методом ЕМА значения критических концентраций (порогов протекания) имеют оценочный, по порядку величины, характер. Сравнительно точные значения порогов протекания определяются в ходе компьютерных экспериментов, результаты которых обсудим в следующем разделе.

4. ПОРОГИ ПРОТЕКАНИЯ

Изучение влияния формы включений на проводимость трехмерных моделей композитов проводилось компьютерными методами в ряде работ [10–14]. Рассматривались включения в виде сфер, эллипсоидов, кубов, а также бесконечно тонких пластинок различных форм (круговых, квадратных и др.). При этом основное внимание уделялось определению критической концентрации, при которой возникает протекание по включениям. Достаточно подробно эта проблема исследована, например, в работе [10], где в качестве включений были взяты эллипсоиды вращения с отношением полуосей, меняющимся практически от нуля до бесконечности.

В модели работы [10] эллипсоиды были хаотически ориентированы, а их центры случайным образом (по Пуассону) распределены в пространстве. При этом включения являлись «мягкими», т. е. допускалось их взаимное пересечение. В этом случае безразмерная концентрация c включений (доля занятого ими объема) связана с размерной концентрацией N соотношением [10]

$$c = 1 - e^{-\phi}, \quad \phi = vN, \qquad (32)$$

где v — объем включения.

По мере увеличения концентрации N в момент достижения некоторого порогового значения в такой системе возникает протекание по включениям. Для соответствия с предыдущим следует считать эти включения идеально проводящими, так что упомянутая критическая концентрация является порогом N_{cs}, при котором проводимость системы обращается в бесконечность. Соответствующая безразмерная критическая концентрация включений c_{cs} связана с N_{cs} соотношением, аналогичным (32):

$$c_{cs} = 1 - e^{-\phi_{cs}}\,, \quad \phi_{cs} = vN_{cs}. \qquad (33)$$

В работе [10] вычислялась зависимость величины c_{cs} (в [10] она обозначена как p_c) от отношения полуосей сфероида $\gamma = R/a_z$.

В настоящей работе по приведенным в [10] данным для c_{cs} вычислялась величина

$$\phi_{cs} = \ln\frac{1}{1-c_{cs}}\,, \qquad (34)$$

после чего находился размерный порог

$$N_{cs} = \frac{B_s(\gamma)}{R^3}\,, \quad B_s(\gamma) = \gamma\frac{3\phi_{cs}}{4\pi}\,, \quad \gamma = \frac{R}{a_z}\,. \qquad (35)$$

Для сферы ($\gamma = 1$) получаем $B_s(1) \simeq 0.080$, в то время как $B_s^{EMA}(1) \simeq 0.097$. Соответственно для диска ($\gamma = \infty$) $B_s(\infty) \simeq 0.304$ и $B_s^{EMA}(\infty) \simeq 0.422$. Таким образом, как и отмечалось выше, метод ЕМА дает для порога N_{cs} только оценку по порядку величины.

В то же время, как следует из сравнения с (11) и (17), в обоих предельных случаях определенная по формуле (35) величина B_s близка к значениям коэффициента A_s из выражения (15) для константы N_{Is}. Приближенное выполнение в этих двух пределах равенства величин B_s и A_s наводит на мысль о его проверке и при промежуточных значениях параметра γ. Вычисление зависимости от γ отношения B_s/A_s с использованием данных для c_{cs} из работы [10] и формулы (15) для A_s приводит к выводу о том, что с точностью в несколько процентов $B_s/A_s = 1.08$ при всех доступных для проверки значениях γ. Это обстоятельство позволяет получить приближенное аналитическое выражение для коэффициента B_s из формулы (35) для N_{cs},

$$B_s(\gamma) \simeq 1.08\,\frac{9\gamma}{4\pi}\,\frac{n^{(z)}\bigl(1-n^{(z)}\bigr)}{1+3n^{(z)}}, \qquad (36)$$

с $n^{(z)}$ из (8) при $a_x = R$. Коэффициент B_s как функция величины $1/\gamma$ представлен на рис. 1. Квадраты — значения B_s, вычисленные по данным для c_{cs} из работы [10].

Аналогичная задача для системы с диэлектрическими включениями в виде сжатых сфероидов решалась компьютерными методами в работе [19]. В этом случае безразмерный порог протекания p_{cd} (доля объема, занятая проводящей компонентой) связан с размерной критической концентрацией N_{cd} следующим образом:

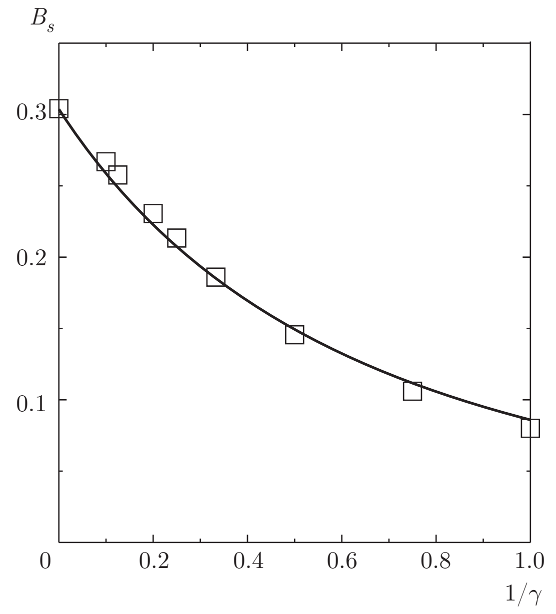

Рис. 1. Зависимость коэффициента B_s от параметра $1/\gamma$, вычисленная по формуле (36); значки — значения B_s, вычисленные по данным для c_s из работы [10]

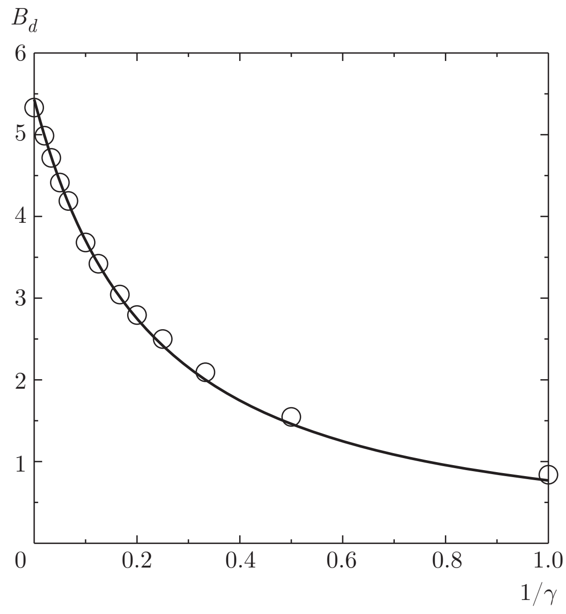

Рис. 2. Зависимость коэффициента B_d от параметра $1/\gamma$, вычисленная по формуле (39); значки — значения B_d, вычисленные по данным для p_{cd} из работы [19]

$$p_{cd} = \exp(-\phi_{cd}), \quad \phi_{cd} = vN_{cd}\,. \tag{37}$$

Здесь включения считаются «мягкими» и распределенными по Пуассону.

С учетом определения величины ϕ_{cd} из (37) выражение для размерного порога N_{cd} запишем в виде

$$N_{cd} = \frac{B_d(\gamma)}{R^3}\,, \quad B_d(\gamma) = \gamma\,\frac{3\phi_{cd}}{4\pi}\,. \tag{38}$$

Используя данные работы [19], для сферы находим $B_d(1) \simeq 0.839$, в то время как $B_d^{EMA}(1) \simeq 0.477$. Для диска получаем соответственно $B_d(\infty) \simeq 5.332$ и $B_d^{EMA} = 3.375$. Здесь метод EMA также дает для порога протекания только порядковую («буквенную») оценку.

Вычисление отношения коэффициентов B_d/A_d с использованием данных из [19] и формулы (13) показывает, что с удовлетворительной (порядка 1%) точностью выполняется равенство $B_d/A_d = 4.83$ во всем диапазоне изменения параметра γ. Это позволяет предложить следующее приближенное аналитическое выражение для коэффициента B_d:

$$B_d(\gamma) \simeq 4.83\,\frac{9\gamma}{4\pi}\,\frac{1-\left(n^{(z)}\right)^2}{5-3n^{(z)}}\,, \tag{39}$$

где $n^{(z)}$ дается формулой (8) при $a_x = R$. Зависимость B_d из (39) от величины $1/\gamma$ изображена на рис. 2.

Использованная в настоящей работе размерная концентрация N удобна тем, что в равной мере применима и к объемным, и к «бестелесным» включениям. В то же время в стандартной теории протекания [1, 20] обычно рассматриваются объемные включения, используется безразмерная концентрация и, соответственно, безразмерные пороги протекания. Как известно [1,20], в такой системе имеются две безразмерные критические концентрации, связь которых с порогами N_{cd} и N_{cs} следует выяснить.

Рассмотрим бинарную систему, состоящую из проводящей матрицы (первая компонента с долей занимаемого объема p) и диэлектрических включений (вторая компонента с объемной концентрацией $c = 1 - p$). При концентрации p, меньшей некоторого значения p_{c1}, проводящая компонента (матрица) представляет собой изолированные, не связанные друг с другом, конечные кластеры и поэтому система в целом является диэлектриком. Напротив, при $p > p_{c1}$ образуется бесконечный кластер [1, 20], возникает протекание тока по матрице и система становится проводящей. Первая критическая концентрация p_{c1}, при которой происходит этот фазовый переход, обычно и называется порогом протекания и обозначается как p_c. Величина p_{c1} очевидным образом совпадает с p_{cd} из соотношения (37), так что

$$p_c \equiv p_{c1} = \exp\left(-vN_{cd}\right)\,. \tag{40}$$

С дальнейшим ростом концентрации p вторая (диэлектрическая) компонента становится все более изреженной и при $p > p_{c2}$ превращается в набор не связанных между собой островков. Величина p_{c2} является второй критической концентрацией, при которой исчезает (в процессе увеличения p) «протекание» по диэлектрической компоненте. Нетрудно видеть, что $p_{c2} = 1 - c_{cs}$ с c_{cs} из соотношения (33), так что

$$p_{c2} = \exp\left(-vN_{cs}\right). \tag{41}$$

Здесь и в (40) считается, что включения «мягкие» и распределены по Пуассону.

По определению $p_{c2} > p_{c1}$, так что

$$N_{cs} < N_{cd} \tag{42}$$

при одинаковых по размеру и форме включениях. Для рассмотренных в работе сфероидов из неравенства (42) следует

$$B_s < B_d, \tag{43}$$

что согласуется с соображениями, высказанными в конце разд. 2.

Таким образом, с изменением концентрации в бинарной системе происходят следующие метаморфозы. При $p < p_{c1}$ отсутствует протекание по первой компоненте, но имеется по второй. При $p > p_{c2}$, напротив, есть протекание по первой компоненте и отсутствует по второй. А при промежуточной концентрации $p_{c1} < p < p_{c2}$ сосуществуют протекания по обеим компонентам. Иллюстрацией последнего случая может служить губчатый металл с развитой системой пор. Через такой образец могут одновременно протекать электрический ток по металлической матрице и жидкость по порам.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).

2. G. E. Pike and C. H. Seager, Phys. Rev. B **10**, 1421 (1974).

3. I. Balberg and N. Binenbaum, Phys. Rev. B **28**, 3799 (1983).

4. W. J. Boudville and T. C. McGill, Phys. Rev. B **39**, 369 (1989).

5. E. J. Garboczi, M. F. Thorpe, M. S. De Vries, and A. R. Day, Phys. Rev. A **43**, 6473 (1991).

6. J. Tobochnik, M. A. Dubson, M. L. Wilson, and M. F. Thorpe, Phys. Rev. A **40**, 5370 (1989).

7. K. H. Han, J. O. Lee, and Sung–Ik Lee, Phys. Rev. B **44**, 6791 (1991).

8. Б. Я. Балагуров, ЖТФ **81**(5), 1 (2011).

9. Б. Я. Балагуров, ЖТФ **82**(8), 11 (2012).

10. E. J. Garboczi, K. A. Snyder, J. F. Douglas, and M. F. Thorpe, Phys. Rev. E **52**, 819 (1995).

11. C. D. Lorenz and R. M. Ziff, J. Chem. Phys. **114**, 3659 (2001).

12. D. R. Baker, G. Paul, S. Sreenivasam, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **66**, 046136 (2002).

13. Y. B. Yi, Phys. Rev. E **74**, 031112 (2006).

14. Y. B. Yi and E. Tawerghi, Phys. Rev. E **79**, 041134 (2009).

15. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS–Ленанд, Москва (2015).

16. R. J. Landauer, J. Appl. Phys. **23**, 779 (1952).

17. S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973).

18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).

19. Y. B. Yi and K. Esmail, J. Appl. Phys. **111**, 124903 (2012).

20. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975).