

ИНФЛЯЦИЯ РАННЕЙ ХОЛОДНОЙ ВСЕЛЕННОЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ НЕЛИНЕЙНЫМ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ И НЕИДЕАЛЬНЫМ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ФЕРМИ-ГАЗОМ

Э. А. Пашитский*, В. И. Пентегов**

*Институт физики Национальной академии наук Украины
03028, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 2 августа 2016 г.

Рассмотрен один из возможных сценариев эволюции ранней холодной Вселенной, родившейся в результате достаточно большой квантовой флуктуации вакуума размером $a_0 \gg l_P$ (где l_P — планковская длина) и заполненной как нелинейным скалярным полем φ , плотность потенциальной энергии $U(\varphi)$ которого определяет плотность энергии λ вакуума, так и неидеальным ферми-газом с короткодействующим отталкиванием между частицами, уравнение состояния которого характеризуется зависящим от концентрации n_F фермионов отношением давления $P(n_F)$ к плотности энергии $\varepsilon(n_F)$. При уменьшении n_F в процессе расширения ранней Вселенной безразмерная величина $\nu(n_F) = P(n_F)/\varepsilon(n_F)$ уменьшается от максимального значения $\nu_{max} = 1$ при $n_F \rightarrow \infty$ до нуля при $n_F \rightarrow 0$. Взаимодействие скалярного и гравитационного полей, которое характеризуется безразмерной константой ξ , пропорционально скалярной кривизне четырехмерного пространства $R = \kappa[3P(n_F) - \varepsilon(n_F) - 4\lambda]$ (где κ — гравитационная постоянная Эйнштейна) и содержит как квадратичное, так и линейное по φ слагаемые. В результате этого расширяющаяся ранняя Вселенная за конечный отрезок времени достигает точки фазового перехода первого рода при критических значениях скалярной кривизны $R = R_c = -\mu^2/\xi$ и радиуса $a_c \gg a_0$. После этого ранняя замкнутая Вселенная из плоской точки перегиба потенциала $U(\varphi)$ за конечное время «скатывается» в нулевой минимум потенциала. Выделение полной потенциальной энергии скалярного поля во всем объеме расширяющейся Вселенной в процессе ее «скатывания» должно сопровождаться рождением большого числа массивных частиц и античастиц разного сорта, аннигиляция которых играет роль Большого взрыва. Обсуждается также вопрос о фундаментальности гравитационной постоянной Ньютона G_N .

DOI: 10.7868/S0044451017030075

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема возникновения нашей Вселенной остается центральной в современной космологии. В настоящей работе предполагается, что рождение Вселенной произошло в результате достаточно большой квантовой флуктуации вакуума радиусом $a_0 \gg l_P$, где $l_P = \sqrt{\hbar G_N/c^3}$ — планковская длина, G_N — гравитационная постоянная Ньютона, c — скорость света. Это соответствует, с одной стороны, ничтожно малой вероятности одновременного рождения двух (или более) подобных флуктуаций в ближайшей

окрестности пространства, в отличие от сценария «хаотической» инфляции с множественным рождением вселенных из квантовых флуктуаций размером порядка l_P [1–4]. С другой стороны, это позволяет с большей степенью точности использовать классические уравнения общей теории относительности (ОТО) для описания последующей эволюции ранней Вселенной.

Предполагается, что плотность энергии λ физического вакуума, пропорциональная космологической постоянной Эйнштейна Λ , определяется плотностью потенциальной энергии некоторого фундаментального нелинейного скалярного поля φ с «мнимой массой» μ и нелинейностью типа φ^4 , которое, по аналогии с полем Хиггса [5, 6], обладает ненулевым вакуумным средним значением амплитуды φ_0 в основном состоянии. Взаимодействие скалярного и гравитационного полей, которое характеризу-

* E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

** E-mail: pentegov@iop.kiev.ua

ется безразмерной константой ξ и пропорционально скалярной кривизне четырехмерного (4D) пространства $R = \kappa(3P - \varepsilon - 4\lambda)$, где P и ε — давление и плотность энергии вещества, а $\kappa = 8\pi G_N/c^4$ — гравитационная константа Эйнштейна, содержит как квадратичное, так и линейное по φ слагаемые. В результате этого при условии $P > \varepsilon/3$ по мере уменьшения положительной величины $3P - \varepsilon$ в процессе расширения ранней Вселенной и соответствующего уменьшения скалярной кривизны до некоторого критического значения $R = R_c = -\mu^2/\xi$ возможен фазовый переход первого рода с выделением полной потенциальной энергии скалярного поля во всем объеме расширяющейся ранней Вселенной.

В работе [7] для уравнения состояния вещества $P = 2\varepsilon/3$ с помощью компьютерных расчетов были получены самосогласованные решения нелинейных уравнений ОТО с учетом взаимодействия гравитационного и скалярного полей и было показано, что такие решения существуют только для достаточно больших начальных размеров квантовой флуктуации $a_0 \geq 5l_P$ и в сравнительно узкой области начальных значений плотности энергии вещества ε_0 . При условии, что константа взаимодействия ξ стремится к своему предельно допустимому (минимальному) значению $\xi^* = 0.04/\kappa\varphi_0^2$, полученное решение соответствует неограниченно расширяющейся Вселенной, когда критический радиус a_c в точке фазового перехода первого рода при $R = R_c$ стремится к бесконечности по закону $(\xi - \xi^*)^{-1/5}$, причем время достижения критической точки также стремится к бесконечности по логарифмическому закону $|\ln(\xi - \xi^*)|$. Такой сценарий эволюции ранней Вселенной, который был назван в работе [7] гиперинфляцией, в принципе, позволяет получить сколь угодно большую величину полной энергии $E_c = 2\pi^2 a_c^3/\lambda$, выделяющейся в результате фазового перехода первого рода за счет потенциальной энергии скалярного поля.

Однако уравнение состояния вещества $P = 2\varepsilon/3$, как известно [8], соответствует нерелятивистскому идеальному ферми-газу без учета энергии покоя фермионов с конечной массой m_F и поэтому не применимо в рамках релятивистской теории. Если же использовать приведенные в [8] точные выражения для давления и плотности энергии идеального вырожденного релятивистского ферми-газа, то уравнение состояния принимает вид $P(n_F) = \nu(n_F)\varepsilon(n_F)$, где параметр $\nu(n_F) < 1/3$ при любых значениях концентрации фермионов n_F . Это соответствует не уменьшению, а увеличению отрицательной скалярной кривизны в области $R \leq R_{vac} = -4\kappa\lambda$ по мере

расширения Вселенной, что исключает возможность фазового перехода первого рода.

В связи с этим в данной работе рассматривается модель ранней холодной Вселенной, заполненной первичным веществом в виде неидеального релятивистского вырожденного ферми-газа с короткодействующим отталкиванием между фермионами. Как было показано Зельдовичем [9], для парного взаимодействия в виде потенциала Юкавы интегральные вклады потенциальной энергии отталкивания между частицами в плотность энергии и давление вещества равны и пропорциональны квадрату концентрации частиц, так что уравнение состояния сильносжатого вещества в пределе высоких плотностей, когда можно пренебречь кинетической энергией по сравнению с энергией взаимодействия, принимает вид $P = \varepsilon$.

В разд. 2 получено уравнение состояния $P(n_F) = \nu(n_F)\varepsilon(n_F)$ неидеального ферми-газа с короткодействующим отталкиванием между фермионами. Показано, что в релятивистской области, когда ферми-импульс $p_F \geq m_F$, при определенных условиях безразмерный параметр $\nu(n_F) \approx 1$ в соответствии с результатом работы [9] для предельно сжатого вещества. В этом разделе обсуждается также влияние кривизны трехмерного (3D) пространства в замкнутой Вселенной на плотность энергии вырожденного ферми-газа вследствие квантования спектра фермионов (см. Приложение).

В разд. 3 на основе эффективного лагранжиана нелинейного скалярного поля с «мнимой массой» μ и нелинейным членом $g^2\varphi^4/4$ (где g — константа нелинейности скалярного поля) получены выражения для двухъямного потенциала $U(\varphi)$ этого поля и для массы скалярного бозона в криволинейном пространстве. При этом предполагается, что плотность энергии вакуума λ_0 определяется минимальным значением потенциала U_{min} при $\varphi = \varphi_0$, где $\varphi_0 = \mu/g$ — вакуумное среднее значение амплитуды скалярного поля в основном состоянии. При положительном начальном значении скалярной кривизны $R_0 > 0$ этот минимум является более глубоким, причем его глубина и положение остаются постоянными вплоть до точки фазового перехода первого рода при $\varphi = -2\varphi_0$ и $R = R_c$. Более того, при условии $R_0 \geq 0.125\mu^2/\xi$ этот минимум является единственным, так что зарождение Вселенной энергетически более выгодно именно в данном минимуме потенциала скалярного поля.

В разд. 3 также рассмотрена эволюция ранней холодной Вселенной с «жестким» уравнением состояния предельно сжатого вещества, $P = \varepsilon$, и показа-

но, что так же, как и в случае уравнения состояния $P = 2\varepsilon/3$ в [7], при условии, что безразмерная константа взаимодействия ξ скалярного и гравитационного полей стремится к ξ^* , ранняя холодная Вселенная в процессе своего экспоненциального (де ситтеровского) расширения асимптотически медленно в течение времени $t_c \propto |\ln(\xi - \xi^*)|$ приближается к точке фазового перехода первого рода при $R = R_c(\xi^*) = -\mu^2/\xi^*$. При этом происходит неограниченный рост максимального радиуса Вселенной по степенному закону, который в данном случае имеет вид $a_c \propto (\xi - \xi^*)^{-1/6}$, что соответствует рассмотренному ранее [7] сценарию гиперинфляции.

Однако, как показано в разд. 4, использование точного уравнения состояния неидеального ферми-газа, $P(n_F) = \nu(n_F)\varepsilon(n_F)$, с учетом уменьшения коэффициента $\nu(n_F)$ при уменьшении концентрации фермионов, $n_F(t) = n_{F0}a_0^3/a^3(t)$, приводит к устранению расходимостей критического радиуса a_c и времени достижения точки перехода t_c при $\xi \rightarrow \xi^*$, характерных для «жесткого» уравнения состояния вещества при $\nu = \text{const}$. С помощью компьютерных вычислений получены области существования инфляционных решений нелинейных уравнений ОТО в зависимости от параметров модели и представлены временные зависимости радиуса расширяющейся Вселенной вплоть до точки фазового перехода первого рода для разных значений полного числа N_F фермионов.

В разд. 5 показано, что время пребывания ранней холодной Вселенной в абсолютно плоской точке перегиба потенциала $U(\varphi)$ скалярного поля, в которой выполняются условия $\partial U/\partial\varphi = \partial^2 U/\partial\varphi^2 = 0$, оказывается конечным благодаря локальной пространственной неоднородности скалярного поля, которая возникает в результате его взаимодействия с веществом. В процессе дальнейшего «скатывания» системы в нулевой минимум потенциала Вселенная продолжает расширяться, а выделяющаяся при этом потенциальная энергия скалярного поля может приводить к рождению из вакуума большого числа массивных частиц и античастиц разного сорта [10]. Предполагается, что последующая почти полная аннигиляция родившегося первичного вещества и антивещества является причиной быстрого нагрева Вселенной и рождения горячей радиационной эры нашей Вселенной с уравнением состояния $P = \varepsilon/3$ ультрарелятивистского вещества и электромагнитного излучения, что согласуется с гипотезой Большого взрыва [11]. В заключение разд. 5 проведены оценки параметров μ и φ_0 , а также плотности потенциальной энергии скалярного поля, которая опре-

деляет плотность энергии вакуума $\lambda_0 = 6.75\mu^2\varphi_0^2$ и космологическую постоянную $\Lambda_0 = \kappa\lambda_0$ ранней Вселенной.

Наконец, в разд. 6 на основе представлений об источниках векторных и тензорных полей для частиц со спинами $S = 1$ и $S = 2$ [12] обсуждается вопрос о фундаментальности гравитационной константы Ньютона G_N , размерность которой совпадает с размерностью феноменологической константы Ферми G_F для слабого взаимодействия [13].

2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ФЕРМИ-ГАЗА С КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ОТТАЛКИВАНИЕМ МЕЖДУ ФЕРМИОНАМИ

Предположим, что в некоторый начальный момент времени $t = 0$ в результате достаточно большой сферически-симметричной квантовой флуктуации вакуума с характерным размером $a_0 \gg l_P$, где $l_P = \sqrt{G_N}$ — планковская длина (здесь и далее используется система единиц $\hbar = c = 1$), рождаются N_F массивных фермионов (для сохранения нулевого полного момента импульса системы число N_F должно быть четным). При этом начальная концентрация фермионов $n_{F0} = N_F/v_0$, заполняющих объем $v_0 = 2\pi^2 a_0^3$ замкнутого криволинейного 3D-пространства с положительной гауссовой кривизной, должна быть ограничена условием $n_{F0} \leq n_P = 1/3\pi^2 l_P^3$, которое является следствием ограничения сверху импульса Ферми $p_{F0} = (3\pi^2 n_{F0})^{1/3} \leq M_P$ (где $M_P = 1/\sqrt{G_N}$ — планковская масса). В результате этого возникает следующее ограничение на полное число частиц в родившейся Вселенной: $N_F \leq 2a_0^3/3l_P^3$.

В дальнейшем будем предполагать, в соответствии с моделью Зельдовича [9], что между фермионами существует короткодействующее отталкивание в виде парного потенциала Юкавы

$$V(r) = q \exp(-\chi r)/r, \tag{1}$$

так что полная потенциальная энергия взаимодействия частиц определяется выражением

$$E_{int} = q^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\exp(-\chi r_{ij})}{r_{ij}} \right], \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем частицам i и j . При условии, что среднее расстояние $\bar{r} = n_F^{-1/3}$

между частицами меньше «радиуса экранирования» $r_s = 1/\chi$, суммирование в выражении (2) с хорошей точностью можно заменить двукратным интегрированием по объему V системы взаимодействующих частиц [9]:

$$E_{int} = \frac{1}{2} q^2 n_F^2 \int_V \int_V \frac{\exp(-\chi r_{12})}{r_{12}} dV_1 dV_2 = \frac{2\pi q^2 n_F^2 V}{\chi^2}. \quad (3)$$

В этом случае парциальные вклады в давление и плотность энергии вещества за счет потенциальной энергии (1) короткодействующего отталкивания между фермионами равны друг другу и зависят квадратично от концентрации частиц:

$$P_{int} = \varepsilon_{int} = 2\pi(q/\chi)^2 n_F^2. \quad (4)$$

В то же время давление и плотность энергии вырожденного идеального ферми-газа при любых значениях n_F во всем диапазоне от нерелятивистского приближения, когда энергия Ферми равна $E_F = p_F^2/2m_F \ll m_F$, до ультрарелятивистского предела, когда $E_F = p_F \gg m_F$, согласно [8], определяются следующими выражениями:

$$P_F = \frac{1}{4\pi^2} \left[p_F \left(\frac{2}{3} p_F^2 - m_F^2 \right) \times \sqrt{p_F^2 + m_F^2} + m_F^4 \operatorname{Arsh} \frac{p_F}{m_F} \right], \quad (5)$$

$$\varepsilon_F = \frac{1}{4\pi^2} \left[p_F (2p_F^2 + m_F^2) \times \sqrt{p_F^2 + m_F^2} - m_F^4 \operatorname{Arsh} \frac{p_F}{m_F} \right]. \quad (6)$$

На рис. 1 показано отношение суммарного давления идеального вырожденного ферми-газа $P = P_F + P_{int}$ к полной плотности его энергии $\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_{int}$ с учетом выражений (4)–(6) в зависимости от безразмерной величины p_F/m_F для разных значений безразмерного параметра $\alpha_F = q^2 m_F^2 / \chi^2 M_P^2$. Как видим, при условии $\alpha_F \gg 1$ в широкой области фермионных концентраций n_F безразмерная величина $\nu(n_F) = P(n_F)/\varepsilon(n_F) \approx 1$, т.е. уравнение состояния идеального ферми-газа имеет вид $P \approx \varepsilon$, близкий к уравнению состояния предельно сжатого вещества [9]. Однако при понижении концентрации параметр $\nu(n_F)$ уменьшается от единицы до нуля. В то же время для идеального релятивистского

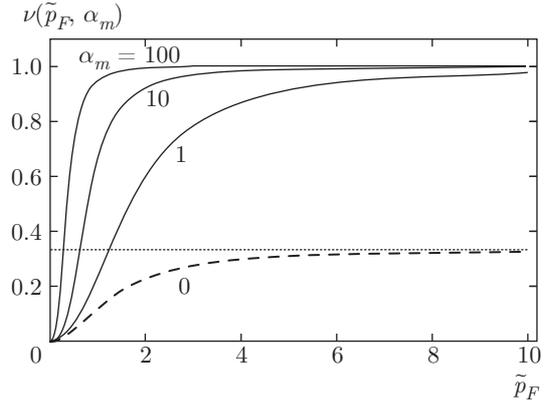


Рис. 1. Зависимости отношения полного давления $P = P_F + P_{int}$ идеального релятивистского ферми-газа к его полной плотности энергии $\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_{int}$ от безразмерного ферми-импульса $\tilde{p}_F = p_F/m_F$ для разных значений безразмерного параметра $\alpha_m = q^2 m_F^2 / \chi^2 M_P^2$, полученные с помощью выражений (4)–(6). Штриховая кривая при $q = 0$ соответствует отношению $P_F/\varepsilon_F < 1/3$ для идеального релятивистского ферми-газа

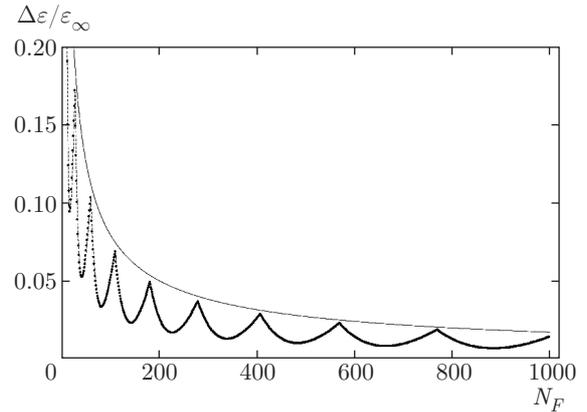


Рис. 2. Относительная плотность энергии фермионов $\Delta\varepsilon/\varepsilon_\infty = [\varepsilon_\infty - \varepsilon(N_F)]/\varepsilon_\infty$ в зависимости от их числа N_F в замкнутом объеме криволинейного трехмерного пространства для нерелятивистских фермионов. Здесь ε_∞ — плотность энергии идеального ферми-газа в плоском пространстве при $N_F \rightarrow \infty$. Максимумы на кривой $\varepsilon_{max}(N_{F\ max})$ возникают при полном заполнении всех дискретных уровней вплоть до уровня Ферми (т.е. для уровня Ферми выполняется соотношение $n(N_{F\ max}) = 2[l_F(N_{F\ max}) + 1]^2$, см. Приложение). Для таких чисел заполнения отношение $\Delta\varepsilon_{max}/\varepsilon_\infty$ при больших значениях $N_{F\ max}$ убывает как $(9/4)(3N_{F\ max}/2)^{-2/3}$ (сплошная кривая)

ферми-газа согласно выражениям (5) и (6) отношение $P_F/\varepsilon_F < 1/3$ при любых конечных значениях n_F (см. штриховую кривую на рис. 1).

Следует подчеркнуть, что данные результаты справедливы лишь в плоском пространстве, тогда

как для ранней замкнутой Вселенной малого радиуса, вообще говоря, необходимо учитывать искривление 3D-пространства и связанное с этим квантование спектра фермионов. В Приложении приведены результаты вычислений плотности энергии идеального ферми-газа с учетом квантования спектра фермионов в замкнутом криволинейном 3D-пространстве. Показано, что при достаточно больших значениях числа частиц, $N_F \gg 1$, поправки на кривизну пространства не превышают нескольких процентов (рис. 2), а по мере расширения Вселенной и увеличения радиуса $a(t)$ амплитуда осцилляций плотности энергии фермионов убывает.

3. ЛАГРАНЖИАН НЕЛИНЕЙНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПЕРВОГО РОДА В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СКАЛЯРНОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЕЙ

Предположим, что исходное состояние физического вакуума определяется основным состоянием некоторого фундаментального нелинейного вещественного скалярного поля φ с «мнимой массой» μ и с нелинейностью типа φ^4 .

Эффективный лагранжиан такого поля в криволинейном 4D-пространстве-времени при учете взаимодействия возмущений амплитуды скалярного поля $\delta\varphi = (\varphi - \varphi_0)$ с гравитационным полем вещества (φ_0 — вакуумное среднее значение амплитуды в основном состоянии) имеет вид [7]

$$L_{eff} = \frac{g^{ik}}{2} \partial_i \varphi \partial_k \varphi + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{g^2}{4} \varphi^4 - \xi R (\varphi - \varphi_0)^2, \quad (7)$$

где g^{ik} — метрический тензор, g — константа нелинейности (самодействия) скалярного поля, ξ — безразмерная константа взаимодействия скалярного и гравитационного полей, а R — скалярная кривизна 4D-пространства.

Путем линеаризации лагранжиана (7) по малым возмущениям амплитуды φ можно найти зависящую от R массу скалярного бозона, аналогичного бозону Хиггса [5, 6]:

$$M_B(R) = \sqrt{3g^2\varphi^2 - (\mu^2 - 2\xi R)}. \quad (8)$$

Плотность потенциальной энергии нелинейного скалярного поля, согласно (7), имеет вид

$$U(\varphi, R) = \frac{1}{4} g^2 \varphi^4 - \frac{1}{2} (\mu^2 - 2\xi R) \varphi^2 - 2\xi R \varphi_0 \varphi + \xi R \varphi_0^2 + U_0, \quad (9)$$

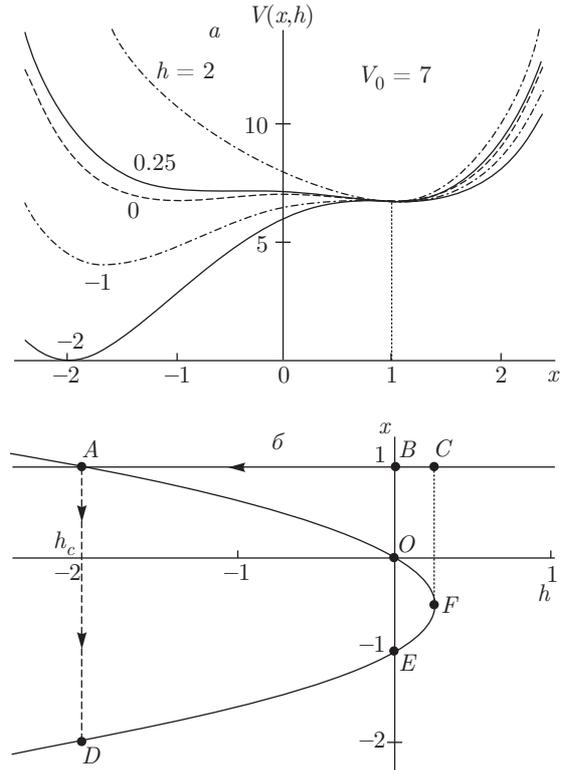


Рис. 3. Зависимость безразмерного потенциала скалярного поля $V(x, h) = U(\varphi, R)/\mu^2 \varphi_0^2$ от безразмерной амплитуды $x = \varphi/\varphi_0$ для разных значений безразмерного параметра «внешнего поля» $h = 2\xi R/\mu^2$ (а) и корни кубического уравнения (11) в зависимости от h (б)

где U_0 — константа, обеспечивающая нулевое минимальное значение потенциала $U(\varphi)$. Из выражения (9) следует, что одному из минимумов потенциала соответствует вакуумное среднее значение амплитуды скалярного поля $\varphi_0 = \mu/g$.

Вводя безразмерный потенциал $V = U/\mu^2 \varphi_0^2$ и безразмерную амплитуду $x = \varphi/\varphi_0$, перепишем (9) в следующем виде:

$$V(x, h) = \frac{x^4}{3} - (1 - h) \frac{x^2}{2} - h \left(x - \frac{1}{2} \right) + V_0, \quad (10)$$

где $h = 2\xi R/\mu^2$ — безразмерный параметр эффективного «внешнего поля» [7].

Условие существования экстремумов потенциала (10) сводится к кубическому уравнению относительно x :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^3 - (1 - h)x - h = 0. \quad (11)$$

На рис. 3 представлены зависимости потенциала (10) от x для разных значений параметра h и зависимости корней кубического уравнения (11) от h .

Видно, что в области $-2 < h < 0.25$ потенциал (10) является двухъямным, а кубическое уравнение (11) в этой области имеет три вещественных корня, которые соответствуют двум минимумам потенциала, разделенным максимумом (потенциальным барьером). При условии $h > 0.25$ существует только один минимум потенциала в точке $x = 1$. С уменьшением величины h положение и глубина этого минимума остаются постоянными, $V_{min}^{(1)} = 6.75$, тогда как второй минимум, который появляется в области $x < 0$ при $h < 0.25$, постепенно понижается, сравниваясь по глубине с первым минимумом при $h = 0$ и достигая при $h = h_c \equiv -2$ в точке $x = -2$ нулевого значения при выборе константы $V_0 = 7$. При этом минимум потенциала в точке $x = 1$ вырождается в плоскую точку перегиба, в которой выполняются условия $\partial V/\partial x = \partial^2 V/\partial x^2 = 0$. Для системы, находящейся в точке $x = 1$, область $-2 \leq h < 0.25$ является метастабильной, а в точке $h = -2$ возможен фазовый переход первого рода, который соответствует «скатыванию» системы из точки перегиба потенциала $x = 1$ в точку нулевого минимума $x = -2$ (см. ниже).

Предположим, что начальный радиус флуктуации вакуума достаточно велик, $a_0 \gg l_P$, так что можно пренебречь квантовыми эффектами, в частности туннелированием зародыша Вселенной через потенциальный барьер между минимумами потенциала. При этом с хорошей точностью можно использовать классические уравнения ОТО в метрике Фрийдмана – Робертсона – Уокера – Леметра для описания эволюции замкнутой, изотропной и однородной ранней Вселенной с учетом космологической постоянной Эйнштейна Λ , которая связана с плотностью энергии вакуума λ соотношением $\Lambda = \tilde{\kappa}\lambda$:

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{\tilde{\kappa}}{3}(\varepsilon + \lambda)a^2, \quad \ddot{a} = -\frac{\tilde{\kappa}}{6}(\varepsilon + 3P - 2\lambda)a, \quad (12)$$

где a – зависящий от времени t масштабный фактор (радиус) замкнутой Вселенной, \dot{a} и \ddot{a} – его первая и вторая производные по времени, ε и P – переменные плотность энергии и давление вещества, $\tilde{\kappa} = \kappa/(1 + \tilde{\xi})$ – перенормированная за счет взаимодействия гравитационного и скалярного полей гравитационная постоянная Эйнштейна [14], а $\tilde{\xi} = 2\xi\kappa\varphi_0^2$ – перенормированная безразмерная константа этого взаимодействия.

Согласно уравнениям (12), должен выполняться закон сохранения энергии, который с учетом возможной зависимости λ от времени имеет вид

$$3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\varepsilon} + \dot{\lambda}}{\varepsilon + P} = 0. \quad (13)$$

При этом скалярная кривизна 4D-пространства равна

$$R = -\frac{6}{a^2}(a \cdot \ddot{a} + \dot{a}^2) = \tilde{\kappa}(3P - \varepsilon - 4\lambda). \quad (14)$$

В дальнейшем будем предполагать, что плотность энергии вакуума λ определяется плотностью потенциальной энергии скалярного поля. Если в начальный момент рождения Вселенной при $t = 0$ выполнялось условие

$$3P_0 - \varepsilon_0 > 4\lambda_0, \quad (15)$$

то начальное значение скалярной кривизны (14) было положительным, $R_0 > 0$. При этом энергетически более выгодным является зарождение Вселенной в более глубоком минимуме $U_{min}^{(1)} = V_{min}^{(1)}\mu^2\varphi_0^2$ потенциала скалярного поля (9) при $\varphi = \varphi_0$.

Как уже отмечалось выше (см. рис. 3а), положение и глубина этого минимума остаются постоянными в области изменения скалярной кривизны $R_0 \geq R \geq R_c$. В связи с этим в рамках данной модели удобно выбрать величину λ постоянной и равной начальному значению:

$$\lambda = \lambda_0 = U_{min}^{(1)} = 6.75\mu^2\varphi_0^2 = \text{const}. \quad (16)$$

Если использовать уравнение состояния неидеального ферми-газа в пределе высокой плотности в виде $P = \varepsilon$, то из (13) при $\dot{\lambda} = 0$ получаем

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 a_0^6 / a^6(t). \quad (17)$$

В этом случае безразмерный параметр «внешнего поля», пропорциональный скалярной кривизне, принимает вид

$$h(t) = -\frac{\tilde{\xi}}{1 + \tilde{\xi}} \left[4\tilde{\lambda}_0 - 2\tilde{\varepsilon}_0 \frac{a_0^6}{a^6(t)} \right], \quad (18)$$

где введены безразмерные величины $\tilde{\lambda}_0 \equiv \lambda_0/\mu^2\varphi_0^2 = 6.75$ и $\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0/\mu^2\varphi_0^2$. В точке фазового перехода первого рода величина $h(t)$ достигает критического значения $h_c = -2$. При этом критический радиус ранней холодной Вселенной, согласно (18), равен (ср. с [7])

$$a_c = a_0 \left[\frac{\tilde{\xi}}{(2\tilde{\lambda}_0 - 1)\tilde{\xi} - 1} \frac{2\tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\lambda}_0} \right]^{1/6}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что условие расширения Вселенной $a_c > a_0$ требует выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &\geq \tilde{\xi}^* \equiv \frac{1}{2\tilde{\lambda}_0 - 1} = 0.08, \\ \tilde{\varepsilon}_0 &> \frac{\tilde{\lambda}_0}{2\tilde{\xi}} \left[(2\tilde{\lambda}_0 - 1)\tilde{\xi} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что первое из неравенств (20) представляет собой условие разрешимости уравнения $h = h_c$, а второе заведомо выполняется при выполнении условия (15).

Согласно (19), в точке фазового перехода первого рода радиус a_c расходится при $\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}^* = 0.08$ по закону $(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}^*)^{-1/6}$, что соответствует рассмотренному в работе [7] режиму гиперинфляции.

Следует подчеркнуть, что в силу быстрого убывания плотности энергии $\varepsilon(t)$ вещества по степенному закону (17) в соответствии с уравнениями ОТО (12), начиная с некоторого момента времени t_λ , когда становится справедливым сильное неравенство $\lambda_0 \gg \varepsilon(t_\lambda)$, эволюция Вселенной переходит на экспоненциальный (де ситтеровский) режим расширения:

$$a(t) = a_\lambda \exp[\gamma(t - t_\lambda)], \quad \gamma = l_P \sqrt{\Lambda_0/3}, \quad (21)$$

где a_λ — радиус ранней Вселенной в момент времени $t = t_\lambda$, а $\Lambda_0 = \tilde{\kappa}\lambda_0$ — исходная космологическая постоянная. В связи с этим время t_c при $\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}^*$ стремится к бесконечности по логарифмическому закону, $t_c \propto |\ln(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}^*)|$.

Заметим также, что при $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^* = 0.08$ и $\lambda_0 = 6.75\mu^2\varphi_0^2$ величина $R_{vac} = -4\tilde{\kappa}\lambda_0$ равна критическому значению скалярной кривизны R_c в точке фазового перехода первого рода:

$$R_{vac} = R_c(\xi^*) = -\mu^2/\xi^*, \quad \xi^* = 0.04/\kappa\varphi_0^2, \quad (22)$$

так что масса (8) скалярного бозона, которая при $\varphi = \varphi_0 \equiv \mu/g$ и $\xi = \xi^*$ равна

$$M_B(R) = \sqrt{2(\mu^2 + R\xi^*)}, \quad (23)$$

стремится к нулю, $M_B(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow R_c(\xi^*)$.

Таким образом, отсюда следует, что для любого «жесткого» уравнения состояния вещества $P = \nu\varepsilon$ при $\nu = \text{const}$ и $\nu > 1/3$ в рамках рассматриваемой модели взаимодействия скалярного и гравитационного полей при условии $\xi \rightarrow \xi^*$ реализуется сценарий гиперинфляции, при котором точка фазового перехода первого рода не может быть достигнута за конечный отрезок времени. В связи с этим представляет интерес рассмотрение сценария эволюции ранней холодной Вселенной с более точным уравнением состояния вещества.

4. ЭВОЛЮЦИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ С ТОЧНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ФЕРМИ-ГАЗА С КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ОТТАЛКИВАНИЕМ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

Рассмотрим процесс расширения ранней холодной Вселенной с учетом точного уравнения состояния $P(n_F) = \nu(n_F)\varepsilon(n_F)$ неидеального вырожденного релятивистского ферми-газа с короткодействующим отталкиванием между частицами. Для этой цели удобно перейти к безразмерным переменным $\tilde{P} = P/\mu^2\varphi_0^2$ и $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\mu^2\varphi_0^2$. Используя приведенную в [8] форму записи давления и плотности энергии релятивистского ферми-газа через переменную $\zeta = 4 \text{Arsh}(p_F/m_F)$, представим парциальные составляющие давления и плотности энергии в следующем виде:

$$\tilde{P}_{int} = \tilde{\varepsilon}_{int} = \beta_{int} \text{sh}^6 \frac{\zeta}{4}, \quad (24)$$

$$\tilde{P}_F = \beta_F \left(\frac{1}{3} \text{sh} \zeta - \frac{8}{3} \text{sh} \frac{\zeta}{2} + \zeta \right), \quad (25)$$

$$\tilde{\varepsilon}_F = \beta_F (\text{sh} \zeta - \zeta). \quad (26)$$

Здесь

$$\beta_F = \frac{\tilde{\varepsilon}_P}{32\pi^2} \tilde{m}_F^4, \quad \beta_{int} = \frac{2\tilde{\varepsilon}_P}{9\pi^3} \alpha \tilde{m}_F^6, \quad (27)$$

$$\zeta = 4 \text{Arsh} \left(\frac{\tilde{p}_F}{\tilde{m}_F} \right),$$

где $\tilde{\varepsilon}_P = \varepsilon_P/\mu^2\varphi_0^2$, $\tilde{p}_F = p_F/M_P$ и $\tilde{m}_F = m_F/M_P$, $\varepsilon_P = M_P^4$ — планковская плотность энергии, а $\alpha = q^2/\chi^2$ — безразмерная константа короткодействующего отталкивания между фермионами.

Если в явном виде выразить ферми-импульс $p_F = (3N_F/\chi^2)^{1/3}a^{-1}$ через масштабный фактор a и полное число фермионов $N_F = 2\pi^2 a^3 n_F$ и ввести безразмерные переменные $\tilde{a} = a/l_P$ и $\tau = t/t_P$, где l_P и t_P — планковские масштабы длины и времени ($l_P = t_P = 1/M_P$), то первое уравнение (12) и выражение (18) для безразмерной скалярной кривизны, которая играет роль эффективного «внешнего поля», с учетом соотношений (24)–(26) принимают вид

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tau} \right)^2 = \frac{\Omega_P}{\tilde{\varepsilon}_P(1 + \tilde{\xi})} \left\{ \tilde{\lambda}_0 + \beta_F [\text{sh} \zeta(\tilde{a}) - \zeta(\tilde{a})] + \beta_{int} \text{sh}^6 \left(\frac{\zeta(\tilde{a})}{4} \right) \right\} \tilde{a}^2 - 1, \quad (28)$$

$$h(\tilde{a}) = -\frac{\tilde{\xi}}{1+\tilde{\xi}} \left\{ 4\tilde{\lambda}_0 + \beta_F \left[8 \operatorname{sh} \left(\frac{\zeta(\tilde{a})}{2} \right) - 4\zeta(\tilde{a}) \right] - 2\beta_{int} \operatorname{sh}^6 \left(\frac{\zeta(\tilde{a})}{4} \right) \right\}, \quad (29)$$

где $\Omega_P = \kappa \varepsilon_P l_P^2 / 3$ — безразмерная константа, а зависящая от \tilde{a} величина $\zeta(\tilde{a})$ определена в (27) и может быть записана как $\zeta(\tilde{a}) = 4 \operatorname{Arsh}[(3N_F/2)^{1/3} / \tilde{m}_F \tilde{a}]$.

Таким образом, поведение системы в рамках данного сценария эволюции ранней холодной Вселенной определяется безразмерными параметрами \tilde{a}_0 , \tilde{m}_F , N_F , α , $\tilde{\varepsilon}_P$ и $\tilde{\xi}$ при заданном значении величины $\tilde{\lambda}_0 = 6.75$. При этом необходимо учитывать условие ограничения полного числа фермионов,

$$N_F \leq N_{F \max} = 2\tilde{a}_0^3 / 3, \quad (30)$$

которое следует из ограничения сверху величины безразмерного ферми-импульса $\tilde{p}_F \leq 1$, а также условие положительности правой части уравнения (28) и условие $h(\tilde{a}_0) > 0$, следующее из неравенства (15). Например, при начальном значении $\tilde{a}_0 = 5$ максимально допустимое четное число фермионов, родившихся в результате квантовой флуктуации вакуума, равно $N_{F \max} = 82$. Это означает, что в этом случае относительная начальная амплитуда осцилляций плотности энергии ферми-газа, связанных с квантованием спектра фермионов в криволинейном 3D-пространстве, порядка 5% (см. рис. 2). Разумеется, по мере расширения Вселенной эффект квантования спектра фермионов быстро уменьшается.

В то же время в точке фазового перехода первого рода выполняется равенство $h(\tilde{a}_c) \equiv h_c = -2$, которое определяет конечное максимальное значение критического радиуса \tilde{a}_c ранней Вселенной как функцию перечисленных выше параметров данной модели, в том числе, и константы $\tilde{\xi}$. Вместе с тем требование разрешимости этого уравнения в действительных переменных эффективно ограничивает снизу возможные значения $\tilde{\xi} \geq \tilde{\xi}_{min}$. Можно показать, что для зависящей от параметров величины $\tilde{\xi}_{min}$ всегда выполняется условие $\tilde{\xi}_{min} < \tilde{\xi}^* = 0.08$. Однако, как следует из численных расчетов, зависимость $\tilde{\xi}_{min}$ от параметров является весьма слабой, а ее величина близка к $\tilde{\xi}^*$.

С другой стороны, зависимость величины \tilde{a}_c от $\tilde{\xi}$, как правило, имеет резкий максимум вблизи значения $\tilde{\xi}_{min}$ (рис. 4). В рамках данной модели это соответствует обсуждавшемуся выше сценарию гиперинфляции в моделях с «жестким» уравнением состояния вещества $P = \nu \varepsilon$ при $\nu = \text{const}$ и $\nu > 1/3$, когда реализуется неограниченный рост $\tilde{a}_c \rightarrow \infty$ при

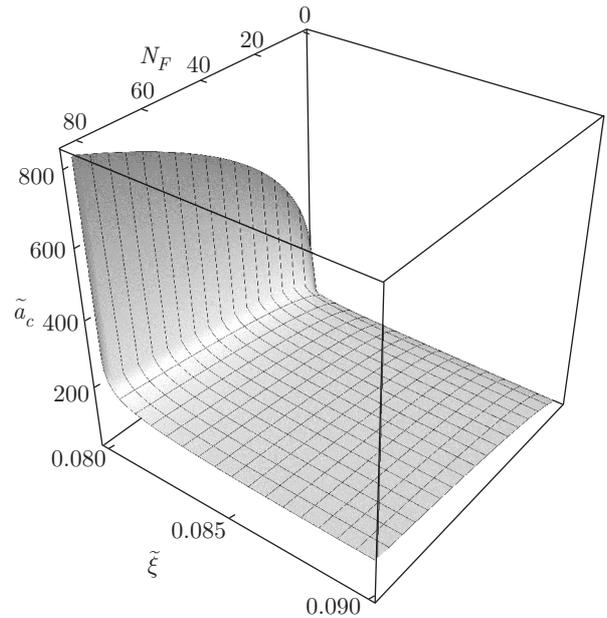


Рис. 4. Зависимость критического радиуса \tilde{a}_c от $\tilde{\xi}$ и N_F при $\tilde{a}_0 = 5$, $\tilde{\lambda}_0 = 6.75$. Для безразмерных параметров $\tilde{m}_F = m_F/M_P$ и $\alpha = q^2/\chi^2$ выбраны значения $\tilde{m}_F = 0.01$ и $\alpha = 10^5$ (такая величина константы α короткодействующего отталкивания получается, если предположить, что масса бозона, переносящего взаимодействие (1), также равна $\tilde{m}_B = \chi = 0.01$, а константа взаимодействия $q^2 = 10$). Кроме того, принято значение $\tilde{\varepsilon}_P = 4 \cdot 10^5$ (относительно выбора величины этого параметра см. разд. 5)

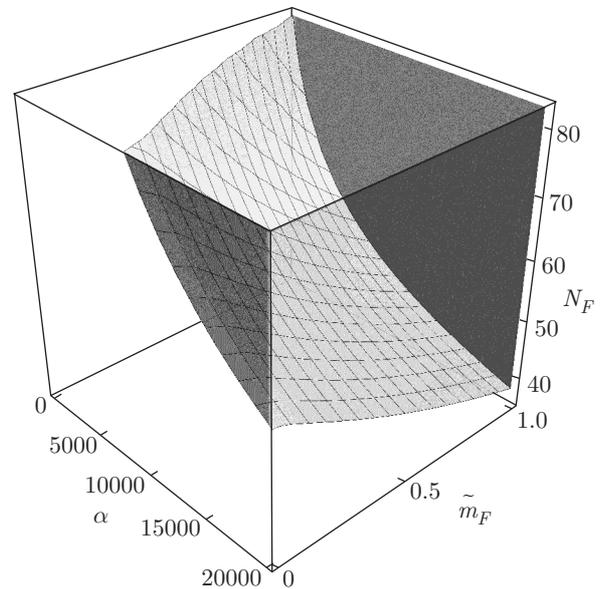


Рис. 5. Область существования инфляционных самосогласованных решений нелинейных уравнений (28) с учетом ограничений (15) и (30) в пространстве параметров \tilde{m}_F , N_F и α при $\tilde{a}_0 = 5$, $\tilde{\xi} = 0.08$, $\tilde{\lambda}_0 = 6.75$ и $\tilde{\varepsilon}_P = 4 \cdot 10^5$

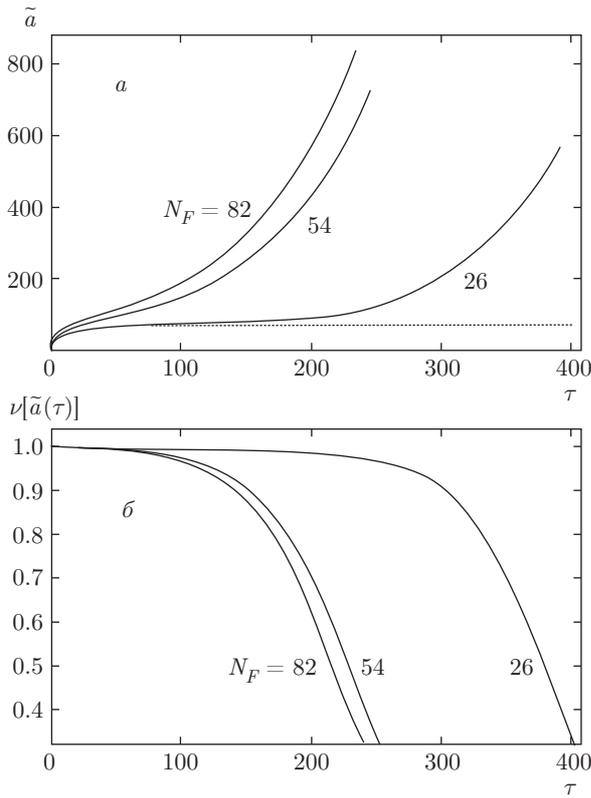


Рис. 6. Зависимости от времени τ радиуса \tilde{a} расширяющейся Вселенной (а) и параметра $\nu = P/\varepsilon$ (б) для разных значений N_F и $\xi = 0.08$. Для параметров $\tilde{m}_F = 0.01$, $\tilde{\alpha}_0 = 5$, $\tilde{\lambda}_0 = 6.75$, $\alpha = 10^5$, $\tilde{\varepsilon}_P = 4 \cdot 10^5$ выбраны те же значения, что и на рис. 4

$\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}^*$. В связи с вышеизложенным при дальнейших компьютерных расчетах для параметра $\tilde{\xi}$ используется постоянное значение $\tilde{\xi} = 0.08$.

На рис. 5 показана область существования инфляционных самосогласованных решений нелинейных уравнений (28) с учетом ограничений (15) и (30) в пространстве параметров \tilde{m}_F , N_F и α при $\tilde{\alpha}_0 = 5$, $\tilde{\xi} = 0.08$, $\tilde{\lambda}_0 = 6.75$ и $\tilde{\varepsilon}_P = 4 \cdot 10^5$ (относительно выбора величины последнего параметра см. ниже).

На рис. 6 показаны временные зависимости радиуса расширяющейся ранней Вселенной и соответствующие зависимости параметра $\nu = P/\varepsilon$ для разных значений полного числа фермионов N_F . Как видим, происходит достаточно быстрое нарастание радиуса Вселенной, приближающееся к инфляционному (де ситтеровскому) режиму эволюции, вплоть до конечного максимального радиуса a_c в точке фазового перехода первого рода.

5. ПРОЦЕСС «СКАТЫВАНИЯ» РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ В МИНИМУМ ПОТЕНЦИАЛА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПЕРВОГО РОДА

Потенциал скалярного поля (11) в безразмерных переменных при $h = h_c \equiv -2$ принимает вид (см. соответствующую кривую на рис. 1)

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 6. \quad (31)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к новой переменной $y = x + 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y) &= y^2 \left(\frac{9}{2} - 2y + \frac{y^2}{4} \right), \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} = y(3-y)^2, \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} &= 3(3-y)(1-y). \end{aligned} \quad (32)$$

Как следует из (32), потенциал $\tilde{V}(y)$ имеет нулевой минимум в точке $y = 0$ и две точки перегиба при $y = 1$ и при $y = 3$. При этом в точке $y = 3$ выполняется условие

$$\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right)_{y=3} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \right)_{y=3} = 0, \quad (33)$$

которое соответствует «абсолютно плоскому» потенциалу с горизонтальной асимптотой, в отличие от почти плоского потенциала в сценарии «гибридной» инфляции [15] или в модели «экспоненциально плоского» потенциала [16].

Динамические уравнения, описывающие самосогласованную эволюцию ранней Вселенной и нелинейного скалярного поля в системе единиц $\hbar = c = 1$, имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 3H\dot{y} &= -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}, \\ H^2 + \frac{1}{\tilde{a}^2} &= \frac{1}{3} \left[\tilde{\varepsilon} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \tilde{V}(y) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где $H = \dot{\tilde{a}}/\tilde{a}$ — «постоянная» Хаббла, а точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ .

При условии достаточно медленного «скатывания», когда выполняются сильные неравенства

$$\ddot{y} \ll 3H\dot{y}, \quad 1/\tilde{a}^2 \ll H^2, \quad \dot{y}^2/2 \ll \tilde{V}(y),$$

система уравнений (34) существенно упрощается и приводится к виду

$$3H\dot{y} = -y(3-y)^2, \quad H^2 = \frac{y^2}{12}(18 - 8y + y^2). \quad (35)$$

Отсюда следует нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(3-y)^2}{\sqrt{18-8y+y^2}} = 0, \quad (36)$$

решение которого сводится к вычислению следующего интеграла для определения времени «скатывания» системы из точки перегиба при $y = 3$ в точку минимума потенциала при $y = 0$:

$$\tau_{roll} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^3 dy \frac{\sqrt{18-8y+y^2}}{(3-y)^2}. \quad (37)$$

Как легко видеть, интеграл (37) расходится на верхнем пределе как $(3-y)^{-1}$, что обусловлено абсолютно плоской формой потенциала в точке перегиба при $y = 3$. Это означает, что даже в том случае, когда ранняя Вселенная за конечное время достигает точки фазового перехода первого рода, $R = R_c \equiv -\mu^2/\xi$, время ее нахождения в точке перегиба при $y = 3$ с нулевым наклоном в классическом приближении оказывается бесконечно большим.

Однако следует учитывать, что между фермионным и скалярным полями может существовать взаимодействие с некоторой константой g_F по аналогии с полем Хиггса [5, 6] (см. также [17, 18]). В результате этого может возникнуть слабая неоднородность амплитуды скалярного поля в области локализации вещества (неидеального ферми-газа) с критическим радиусом \tilde{a}_c .

Предположим для простоты, что такая неоднородность имеет вид гауссиана:

$$\tilde{y}(\rho, \tau) = y(\tau) [1 + \sigma \exp\{-\rho^2/\tilde{a}_c^2\}], \quad (38)$$

где $\rho = r/l_P$, а σ — безразмерный параметр, пропорциональный константе g_F . В этом случае в уравнении Клейна–Гордона для амплитуды скалярного поля (34) следует учесть отличный от нуля за счет радиальной неоднородности $\tilde{y}(\rho, \tau)$ сферически-симметричный оператор Лапласа:

$$3H \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \rho} \right) = -\tilde{y}(3 - \tilde{y})^2. \quad (39)$$

Подставляя выражение (38) в уравнение (39), при условии $\sigma \ll 1$ с точностью до главных членов получаем

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{2}{3} [(3-y)^2 + \delta^2], \quad \delta = \frac{\sqrt{6}\sigma}{\tilde{a}_c}. \quad (40)$$

В результате интегрирования уравнения (40) вблизи точки $y = 3$ получаем выражение для оценки конечного времени «выкатывания» системы из плоской точки перегиба потенциала:

$$\tau_{roll} = -\int_0^3 \frac{dy}{(3-y)^2 + \delta^2} = \frac{3}{2\delta} \operatorname{arctg} \frac{3}{\delta}. \quad (41)$$

Безразмерное время τ_{roll} , которое при слабой неоднородности, когда $\delta \ll 1$, характеризует наиболее медленную фазу «выкатывания» Вселенной из точки $y = 3$, фактически определяет по порядку величины полное время «скатывания» системы в нулевой минимум потенциала, т. е. время фазового перехода первого рода.

Действительно, безразмерное время «скатывания» системы на параболическом участке потенциала $V(y) = 9y^2/2$ с безразмерной «эффективной массой» скалярного поля $m = 3$, которое сопровождается уменьшением плотности потенциальной энергии скалярного поля от максимального значения $V_{max} \approx 6.75$ при $y_0 \approx 2$ до нуля в точке $y = 0$, определяется как $\tau_0 = y_0/\sqrt{6} \approx 0.5$, так что за это время Вселенная практически не успевает заметно расширяться, в отличие от рассмотренного в [4] случая «хаотической» инфляции при $y_0 \gg 1$ и $m \ll 1$.

Основной процесс расширения ранней Вселенной в данном случае после прохождения точки фазового перехода первого рода при $R = R_c$, т. е. при $h = -2$, происходит за время τ_{roll} , когда потенциал остается практически постоянным и равным $V \approx \lambda_0 = 6.75$. Тем самым потенциал (37) вблизи точки $y = 3$ обеспечивает режим медленного скатывания (slow roll), необходимый для достаточно быстрого расширения Вселенной. Это означает, что за время τ_{roll} безразмерный радиус Вселенной, согласно (28), достигает своего максимального значения

$$\tilde{a}_{max} \equiv \tilde{a}(\tau_{roll}) = \tilde{a}_c \exp(\tilde{\gamma}\tau_{roll}), \quad \tilde{\gamma} = \sqrt{\Lambda_0/3}. \quad (42)$$

Однако, следует подчеркнуть, что для полного описания эволюции ранней Вселенной после фазового перехода первого рода необходимо получить решение следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + [3H(\tau) + \Gamma] \dot{y} + \Delta y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ H^2(\tau) + \frac{1}{\tilde{a}^2(\tau)} &= \frac{1}{3} \left[\varepsilon(\tau) + \frac{\dot{y}^2}{2} + V(y) \right], \end{aligned} \quad (43)$$

где Γ — декремент затухания амплитуды скалярного поля за счет множественного рождения пар массивных частиц и античастиц разного сорта [10]. Но по-

скольку энергия, выделяющаяся в результате аннигиляции первичного вещества и антивещества, расходуется на быстрый нагрев Вселенной, уравнения (43) должны быть дополнены уравнением, описывающим рост энтропии Вселенной.

Кроме того, следует учитывать температурную зависимость параметра $\mu(T) = \mu(0)\sqrt{1 - T/T_c}$, где T_c — критическая температура [19, 20], при которой происходит фазовый переход второго рода. В результате этого скалярное поле может исчезнуть еще до достижения нулевого минимума потенциала, однако при этом остается ненулевой среднеквадратичный уровень тепловых флуктуаций амплитуды $\sqrt{\langle(\delta\varphi_T)^2\rangle}$ и плотности потенциальной энергии $\sqrt{\langle(\delta U_T)^2\rangle}$ скалярного поля φ .

Последняя величина может играть роль средней плотности так называемой темной энергии ρ_{dark} в расширившейся современной холодной Вселенной с аномально малой космологической постоянной $\Lambda = \tilde{\kappa}_T \rho_{dark} \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}$, где $\tilde{\kappa}_T = \kappa/[1 + 2\xi\kappa\langle(\delta\varphi_T)^2\rangle]$. Однако детальное описание эволюции нашей Вселенной с учетом ее нагрева за счет аннигиляции первичного вещества и антивещества и последующего расширения и охлаждения выходит за рамки данной работы.

В заключение этого раздела проведем количественные оценки параметров нелинейного скалярного поля μ , φ_0 , g и λ_0 в рамках рассмотренной выше модели эволюции ранней Вселенной. Прежде всего предположим, что масса скалярного бозона (8), которая при $R = 0$ определяется соотношением $M_B = \mu\sqrt{2}$, не превышает массу Планка, т. е. $M_B \leq M_P = 1/\sqrt{G_N}$. Отсюда следует ограничение сверху на величину параметра $\mu \leq M_P/\sqrt{2} \approx 0.707M_P$. Такое ограничение предполагает, что гравитационная постоянная Ньютона G_N является такой же фундаментальной мировой константой, как \hbar и c (по этому поводу см. разд. 6).

С другой стороны, если предположить, что безразмерные константы самодействия скалярного поля и его взаимодействия с гравитационным полем равны $g = \xi = 1$, то из условия $\tilde{\xi} \equiv 2\xi\kappa\varphi_0^2 = 0.08$, где $\kappa = 8\pi/M_P^2$, получаем следующую оценку для вакуумного среднего: $\varphi_0 = \mu \approx 0.04M_P$. При этом получаем оценки для плотности энергии вакуума, $\lambda_0 = 6.75\mu^4 \approx 1.72 \cdot 10^{-5}M_P^4$, и для безразмерной плотности планковской энергии, $\tilde{\varepsilon}_P \equiv \varepsilon_P/\mu^4 \approx 4 \cdot 10^5$ (отсюда следует значение параметра $\tilde{\varepsilon}_P$, выбранное при численных расчетах).

Это позволяет оценить начальное значение космологической постоянной $\Lambda_0 = \tilde{\kappa}\lambda_0 \leq 4.32 \cdot 10^{-4}M_P^2$ в ранней Вселенной. Тот факт, что после фазового

перехода первого рода плотность энергии скалярного поля и плотность энергии вакуума стремятся к нулю, коррелирует с аномально малым значением космологической постоянной $\Lambda \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ в современной Вселенной.

С другой стороны, с помощью современных астрономических данных можно оценить максимальную энергию, которая должна была выделиться в результате фазового перехода первого рода за счет полной потенциальной энергии скалярного поля в расширившейся до некоторого максимального размера a_{max} ранней холодной Вселенной.

Если принять в качестве грубой оценки, что полное число барионов в наблюдаемой Вселенной равно по порядку величины $N_B \sim 10^{80}$, то общая масса барионного вещества составляет примерно $M_B \approx 2 \cdot 10^{56} \text{ г}$. Поскольку полное число равновесных реликтовых фотонов в 10^9 раз больше, с учетом так называемой темной материи, масса которой в 5 раз больше барионной массы, получим следующую оценку для суммарной массы первичного вещества и антивещества: $M_0 \approx 10^{71}M_P$. Такое количество материи и антиматерии должно было родиться за счет полной потенциальной энергии скалярного поля $E_0 = 2\pi^2 a_{max}^3 \lambda_0$ во всем объеме расширившейся ранней замкнутой Вселенной. С учетом приведенной выше оценки для λ_0 получаем оценку $a_{max} \approx 10^{25}l_P \approx 10^{-8} \text{ см}$ для максимального радиуса ранней Вселенной до начала аннигиляции вещества и антивещества, т. е. до Большого взрыва.

Как отмечалось выше, современное значение Λ , пропорциональное плотности так называемой темной энергии, может быть сопоставлено с остаточным (реликтовым) средним уровнем остывших тепловых флуктуаций скалярного поля в расширившейся холодной Вселенной, а хаотическая пространственная неоднородность поля таких флуктуаций могла задать первоначальную крупномасштабную неоднородность нашей Вселенной, которая в настоящее время наблюдается в виде сложной фрактальной структуры скоплений галактик.

Таким образом, рассмотренная выше модель рождения Вселенной в результате достаточно большой квантовой флуктуации вакуума, заполненной нелинейным скалярным полем и неидеальным вырожденным ферми-газом с короткодействующим отталкиванием между фермионами, позволяет качественно описать процесс эволюции Вселенной как до, так и после фазового перехода первого рода, который происходит благодаря уменьшению параметра «внешнего поля», пропорционального скалярной кривизне. В рамках такой модели роль Большого

взрыва играет быстрый нагрев Вселенной в результате аннигиляции первичного вещества и антивещества, рождающегося за счет выделяющейся потенциальной энергии скалярного поля.

6. К ВОПРОСУ О ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ НЬЮТОНА

Следует иметь в виду, что приведенные оценки параметров рассмотренной выше модели эволюции ранней Вселенной были получены с учетом их ограничения сверху соответствующими величинами планковских масштабов, которые определяются гравитационной постоянной Ньютона G_N в предположении, что она является одной из фундаментальных мировых констант наряду со скоростью света и постоянной Планка \hbar .

Между тем хорошо известно, что размерность G_N совпадает с размерностью феноменологической константы Ферми G_F , которая была введена в гамильтоновом приближении в рамках эффективной теории слабого взаимодействия и, согласно Стандартной модели элементарных частиц [12], характеризует косвенный характер слабого взаимодействия, обусловленного обменом тяжелыми промежуточными бозонами. Возникает вопрос: не может ли такое совпадение размерностей констант G_N и G_F свидетельствовать о феноменологической природе константы G_N и о существовании некоторого сходства (своеобразного скейлинга) между слабым и гравитационным взаимодействиями?

Если пренебречь относительно малой разницей масс промежуточных бозонов W^\pm и Z^0 , которая обусловлена взаимодействием заряженных W^\pm -бозонов с электромагнитным полем и определяется параметром электрослабого смешивания (углом Вайнберга–Салама), то этот триплет частиц может рассматриваться как компоненты единого массивного векторного бозона со спином $S = 1$, функция Грина (пропагатор) которого, как известно, в системе единиц $\hbar = c = 1$ и в сигнатуре с мнимым временем имеет вид [12]

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \left(g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right), \quad (44)$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор псевдоэвклидова 4D-пространства–времени, p_μ — компоненты 4-вектора энергии–импульса, $p^2 \equiv g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = (\omega^2 + \mathbf{k}^2)$, ω — мнимая энергия бозона, \mathbf{k} — его трехмерный импульс, а m — масса векторного бозона, которая в

данном случае должна быть равна массе m_Z нейтрального промежуточного Z^0 -бозона.

Такое предположение вполне естественно, поскольку конечная масса промежуточных бозонов в рамках Стандартной модели возникает как результат спонтанного нарушения калибровочной симметрии безмассового векторного электромагнитного поля [13].

Заметим, что неполосная часть функции Грина (44) определяется структурой приведенного в [12] матричного элемента вакуум–вакуумного перехода для массивных частиц со спином $S = 1$ и с векторными (токовыми) источниками $J^\mu(p)$:

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle^J &= \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\omega_p J^\mu(p)^* \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right] J^\nu(p) \right\}, \quad (45) \end{aligned}$$

где $d\omega_p$ — элемент фазового объема 4D-пространства энергии–импульса.

Поскольку свертка пропагатора массивного векторного бозона (44) с метрическим тензором $g^{\mu\nu}$ равна

$$D_V \equiv g^{\mu\nu} D_{\mu\nu} = 1/m^2, \quad (46)$$

в соответствии с размерностью константы G_F , вводя некоторый эффективный заряд e_w слабого взаимодействия, феноменологическую константу Ферми можем представить в виде

$$G_F = e_w^2 D_V \equiv e_w^2 / m_Z^2. \quad (47)$$

В стандартных обозначениях [12] величина $e_w^2 = g^2 m_Z^2 / 4m_w^2 \sqrt{2}$, где g — одна из констант единого электрослабого взаимодействия, имеющая размерность электрического заряда.

С учетом эмпирического значения константы Ферми $G_F \approx 1.1664 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$ и величины $m_Z \approx 92.5 \text{ ГэВ}$ получаем оценку для безразмерной константы связи $e_w^2 \approx 10^{-1}$, что более чем на порядок превышает безразмерную константу связи $e_\mu^2 = 1/129$ электромагнитного взаимодействия мюонов. При этом отношение констант e_w^2 / e_μ^2 близко к логарифму отношения масс промежуточного бозона и мюона, $\ln(m_Z / m_\mu)$, что согласуется с результатами метода ренормгруппы на плавающем массовом масштабе в квантовой теории поля [13].

По аналогии со слабым взаимодействием, которое переносится тяжелыми векторными бозонами, можно предположить, что «сверхслабое» гравитационное взаимодействие, которое в классическом

приближении описывается тензорными нелинейными уравнениями ОТО, также переносится некоторыми гипотетическими «сверхтяжелыми» тензорными бозонами со спином $S = 2$ и с массой M_T , которая с учетом отношения констант $G_F/G_N \approx 1.67 \cdot 10^{33}$ должна на 17 порядков превышать m_Z (см. ниже).

В связи с этим будем исходить из приведенного в [12] выражения для матричного элемента вакуум-вакуумного перехода массивных тензорных бозонов со спином $S = 2$, который определяется источниками тензорного поля $T^{\mu\nu}(p)$:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^T = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\omega_p \bar{T}^{*\mu\nu}(p) \bar{g}_{\mu\kappa}(p) \bar{g}_{\nu\lambda}(p) \bar{T}^{\kappa\lambda}(p) \right\}, \quad (48)$$

где

$$\bar{T}^{\mu\nu}(p) = T^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{3} g^{\mu\nu} [\bar{g}_{\rho\sigma}(p) T^{\rho\sigma}(p)], \quad (49)$$

$$\bar{g}_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. \quad (50)$$

Отсюда по аналогии с (44) и (45) следует, что функция Грина тензорных бозонов с массой $m = M_T$ имеет вид

$$D_{\mu\nu,\kappa\lambda}^T(p) = \frac{\bar{g}_{\mu\nu}(p) \bar{g}_{\kappa\lambda}(p)}{p^2 + M_T^2}. \quad (51)$$

Двойная свертка функции Грина (51) с метрическими тензорами $g^{\mu\nu}$ и $g^{\kappa\lambda}$ с учетом соотношения (50) равна

$$D_T(p) \equiv g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} D_{\mu\nu,\kappa\lambda}^T(p) = \frac{1}{M_T^2} \left(1 + \frac{p^2}{M_T^2} \right). \quad (52)$$

В статическом длинноволновом пределе, когда $p \rightarrow 0$, гравитационную постоянную, по аналогии с (47), можно представить в виде

$$G_N = e_g^2 D_T(0) = e_g^2 / M_T^2, \quad (53)$$

где e_g — эффективный «гравитационный заряд» некоторого сильного взаимодействия на массовом масштабе M_T . Если предположить, что «заряды» e_g и e_w связаны ренормализационным соотношением

$$e_g^2 = e_w^2 \ln(M_T/m_Z), \quad (54)$$

то для определения отношения масс тензорных M_T и промежуточных m_Z бозонов получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$\left(\frac{M_T}{m_Z} \right)^2 = \frac{G_F}{G_N} \ln \frac{M_T}{m_Z}. \quad (55)$$

Уравнение (55) имеет два корня, меньший из которых с точностью порядка $G_N/G_F \approx 6 \cdot 10^{-34}$ равен единице и соответствует области энергий Стандартной модели, тогда как второй корень равен

$M_T/m_Z \approx 2.6 \cdot 10^{17}$ и соответствует массе сверхтяжелых тензорных бозонов $M_T \approx 2.4 \cdot 10^{19}$ ГэВ, которая вдвое превышает планковскую массу $M_P \approx 1.2 \times 10^{19}$ ГэВ.

Исходя из аналогии с электрослабым взаимодействием, для которого масса бозона Хиггса почти в 1.5 раза больше массы промежуточных бозонов, можно ожидать, что соответствующую массу гипотетических сверхтяжелых скалярных бозонов, которые генерируют массу M_T , можно приблизительно оценить как $3M_P$.

В рамках современной концепции теории суперструн в многомерных анти-де-ситтеровских пространствах с отрицательной плотностью энергии вакуума $\lambda < 0$ (см., например, [21–23]) можно предположить, что такие «сверхмассивные» виртуальные тензорные бозоны рождаются в результате спонтанного нарушения целого ряда «калибровочных» симметрий при взаимодействии многомерных суперструн с одним или несколькими фундаментальными скалярными полями наряду с процессами быстрой коактификации «лишних» измерений.

При этом так же, как и в случае электрослабого взаимодействия, при котором вместе с массивными промежуточными бозонами существуют безмассовые калибровочные векторные бозоны со спином $S = 1$ — фотоны, в случае «сверхслабого» гравитационного взаимодействия также должны сохраняться безмассовые тензорные бозоны со спином $S = 2$, т. е. гравитоны — кванты гравитационных волн, предсказанных Эйнштейном [24] и недавно обнаруженных в эксперименте LIGO [25].

Разумеется, вопрос о конкретной модели такого «обменного» механизма гравитации требует более детального рассмотрения. Тем не менее из приведенных выше соображений следует, что гравитационная постоянная Ньютона G_N на современном уровне развития квантово-полевой теории гравитации не может рассматриваться как фундаментальная мировая константа, аналогичная скорости света и постоянной Планка. Это означает, что строгое ограничение физических параметров планковскими масштабами не является необходимым условием при рассмотрении процессов рождения и эволюции ранней Вселенной.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на основе сравнительно простой модели ранней Вселенной, которая заполнена нелинейным скалярным полем φ с мнимой «массой» и с нелинейностью типа φ^4 , а также неидеальным

ферми-газом с короткодействующим отталкиванием между массивными фермионами, рассмотрена эволюция холодной Вселенной, родившейся в результате достаточно большой квантовой флуктуации вакуума, плотность энергии которого определяется плотностью потенциальной энергии скалярного поля. С помощью компьютерных расчетов на основе решения системы нелинейных уравнений ОТО с космологическим членом, равным минимальной плотности потенциальной энергии скалярного поля, найдены временные зависимости радиуса расширяющейся ранней Вселенной и области существования таких самосогласованных решений для уравнения состояния предельно сжатого вещества, $P = \varepsilon$, а также для более точного уравнения состояния с зависящим от плотности фермионов n_F отношением $P(n_F)/\varepsilon(n_F)$. Полученные результаты позволили оценить параметры нелинейного скалярного поля φ и плотность энергии вакуума λ_0 , а также космологической постоянной $\Lambda_0 = \tilde{\kappa}\lambda_0$ в ранней Вселенной. Получены оценки для полной выделившейся энергии скалярного поля и для максимального радиуса Вселенной после фазового перехода первого рода, когда плотность потенциальной энергии скалярного поля обращается в нуль, что согласуется с аномально малой величиной космологической постоянной, определяющей плотность темной энергии в современной Вселенной.

Рассмотрен также вопрос о фундаментальности гравитационной постоянной Ньютона G_N и высказывается предположение о том, что «сверхслабое» гравитационное взаимодействие обусловлено обменом «сверхтяжелыми» тензорными бозонами с массами порядка планковской массы M_P .

Авторы выражают благодарность В. А. Рубакову, дискуссия с которым стимулировала написание данной работы, а также Г. М. Зиновьеву и В. П. Гусынину за обсуждение ряда вопросов, возникавших в процессе ее выполнения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Энергия нерелятивистского вырожденного ферми-газа в криволинейном замкнутом трехмерном пространстве

Рассмотрим влияние кривизны 3D-пространства на свойства идеального вырожденного ферми-газа в ранней холодной Вселенной. Изотропная и однородная модель замкнутой Вселенной с пространственно-временной метрикой Фрийдмана–Робертсона–Уокера–Леметра, как известно, соответствует

3D-пространству с положительной гауссовой кривизной, т. е. гипертсфере радиуса a в евклидовом 4D-пространстве с координатами $r, \theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta$ и θ_3 .

В нерелятивистском случае гамильтониан свободных частиц (фермионов) на такой гипертсфере выражается через оператор квадрата углового момента в 4D-пространстве \hat{L}_3^2 (здесь индекс «3» означает число угловых переменных):

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m_F} \frac{\hat{L}_3^2}{a^2}. \quad (A.1)$$

Собственные значения l оператора \hat{L}_3^2 , которые в данном случае определяют дискретные уровни энергии частиц, и кратность d_l вырождения уровней даются выражениями [26]

$$\hat{L}_3^2 \psi = l(l+2)\psi, \quad d_l = (l+1)^2. \quad (A.2)$$

Кроме того, необходимо учесть двукратное вырождение уровней по спину.

В результате получаем следующее выражение для полного числа частиц:

$$N = 2 \sum_{l=0}^{l_F-1} (l+1)^2 + n = \frac{1}{3} l_F(l_F+1)(2l_F+1) + n, \quad (A.3)$$

где l_F соответствует наивысшему, в общем случае частично заполненному, уровню («уровню Ферми»), а n — число частиц на этом уровне, $0 \leq n \leq 2(l_F+1)^2$. Если l_0 — вещественный положительный корень кубического уравнения

$$\frac{1}{3} l_0(l_0+1)(2l_0+1) = N, \quad (A.4)$$

то значение l_F , зависящее от N , равно наибольшему целому числу, которое меньше чем l_0 , а зависимость числа n от N определяется уравнением (A.3).

В результате для плотности энергии нерелятивистского вырожденного идеального ферми-газа в замкнутом объеме $v = 2\pi^2 a^3$ криволинейного пространства получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon(N, a) &= \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m_F a^5} \times \\ &\times \left\{ 2 \sum_{l=0}^{l_F(N)} l(l+2)(l+1)^2 + l_F(N) [l_F(N)+1] n(N) \right\} = \\ &= \frac{\hbar^2}{20\pi^2 m_F a^5} \left\{ l_F(N) [l_F^2(N) - 1]^2 [l_F(N) + 2] \times \right. \\ &\times \left. [2l_F(N) + 1] + 5l_F(N) [l_F(N) + 2] n(N) \right\}. \quad (A.5) \end{aligned}$$

При достаточно больших значениях N и a с хорошей точностью пространство может считаться плоским, так что выражения (A.3) и (A.5) переходят в известные формулы для нерелятивистского ферми-газа с числом состояний $1/(2\pi\hbar)^3$ на единицу фазового объема при $N \rightarrow \infty$:

$$N = \frac{v}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{2}{3} \left(\frac{p_F a}{\hbar} \right)^3. \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty &= \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3 m_F} \int_0^{p_F} p^4 dp = \\ &= \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m_F a^5} \left(\frac{2}{3} N \right)^{5/3}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Зависимость относительной разности $[\varepsilon_\infty - \varepsilon(N, a)]/\varepsilon_\infty$ от N показана выше на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
2. A. D. Linde, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983).
3. А. Д. Линде, Письма в ЖЭТФ **38**, 149 (1983).
4. А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва (1990).
5. P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
6. P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
7. Э. А. Пашицкий, В. И. Пентегов, ЖЭТФ **149**, 63 (2016).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2002).
9. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **41**, 1609 (1961).
10. L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D **56**, 3258 (1997).
11. G. Gamov, Phys. Rev. **70**, 572 (1946).
12. Ю. Швингер, *Частицы, источники, поля*, Мир, Москва (1973).
13. С. Вайнберг, *Квантовая теория поля*, Физматлит, Москва (2003).
14. И. В. Криве, А. Д. Линде, Е. М. Чудновский, ЖЭТФ **71**, 825 (1976).
15. A. Linde, Phys. Rev. D **49**, 748 (1994).
16. F. L. Bezrukov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008).
17. F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
18. G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
19. Д. А. Киржниц, Письма в ЖЭТФ **15**, 745 (1972).
20. Д. А. Киржниц, А. Д. Линде, ЖЭТФ **67**, 1263 (1974).
21. J. Maldacena, Adv. Theor. Mat. Phys. **2**, 331 (1980).
22. O. Aharoni, S. Gubser, J. Maldacena et al., Phys. Rep. **323**, 183 (2000).
23. O. Aharoni, O. Bergman, D. L. Jafferis et al., High Energy Phys. **10**, 91 (2008).
24. A. Einstein, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 688 (1916).
25. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
26. S. H. Dong, *Wave Equations in Higher Dimensions*, Springer, Berlin (2011).