ЖЭТФ, 2017, том 151, вып. 2, стр. 409–415

МАСШТАБИРОВАНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ КОНВЕКЦИИ В БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПЛОСКОМ СЛОЕ

С. В. Старченко[*]

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова Российской академии наук
142190, Троицк, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 сентября 2016 г.

Предложено оптимальное, на взгляд автора, масштабирование комбинированной тепловой и композиционной конвекции в быстро вращающемся плоском слое, которое следует из самосогласованных оценок типичных физических величин. Соответственно вводятся коэффициенты подобия для отношения диссипация/генерация конвекции s и соотношения тепловая/композиционная конвекция r. Третий новый коэффициент δ равен отношению характерного размера перпендикулярно оси вращения к толщине слоя. Чем быстрее вращение, тем меньше δ. В условиях жидкого ядра Земли $\delta \sim 10^{-3}$ замещает общепринятое число Экмана $E \sim 10^{-15}$, а $s \sim 10^{-6}$ — обратное число Рэлея $1/\,\mathrm{Ra} \sim 10^{-30}$. Выявлено, что при турбулентных коэффициентах переноса число s и числа Прандтля имеют значения порядка единицы для любых объектов, а δ не зависит от коэффициентов переноса. В результате разложения по степеням δ изначальную нелинейную трехмерную систему из шести переменных удалось упростить до почти двумерной системы из четырех переменных, не содержащей δ. Задача о возбуждении конвекции в основном объеме решается алгебраически, а для критических величин — аналитически. Получены дисперсионные соотношения, общие выражения для критических волновых чисел, чисел s, определяющих числа Рэлея, прочих критических параметров и асимптотических решений. Численные оценки сделаны для жидких ядер планет, подобных Земле. Обсуждаются возможные дальнейшие приложения полученных результатов к недрам планет и лун и их океанам, звездам, экспериментальным объектам.

DOI: 10.7868/S0044451017020195

1. ВВЕДЕНИЕ

Дж. Прудман [1] первым обосновал почти двумерную природу быстро вращающейся конвективной системы в 1916 г. Вместе с тем, в этой тематике больше известен Дж. И. Тейлор [2], который не только прославился своей теоремой, но и подтвердил ее экспериментально в 1921 г. Эта двумерность на протяжении последующих тридцати лет качественно отображалась в виде вытянутых вдоль оси вращения узких конвективных колонок Тейлора. В середине прошлого века была детально рассчитана подобная простейшая линейная конвекция в быстро вращающемся плоском бесконечном слое [3, 4], а в 1960–70-х гг. были получены ключевые асимптотические результаты [5, 6]. Позже были оценены типичные физические величины для этой конвективной системы [7], которая, несмотря на свою простоту, долго еще будет актуальной. Эта актуальность определяется тем, что подобная упрощенная система позволяет максимально возможно приблизиться к экстремальным значениям общепринятых коэффициентов подобия, характерным для соответствующих астрофизических объектов [8]. Так, в жидком ядре Земли определенное по угловой скорости вращения обратное число Рейнольдса, или число Экмана E, принимает значения 10^{-15}, а общепринятое число Рэлея Ra имеет значение порядка 10^{30} для молекулярных значений коэффициентов переноса [9–11]. Наилучший результат, достигаемый реалистичными (в сферическом слое и с магнитным полем) численными моделями, $E \sim 10^{-4}$ и $\mathrm{Ra} \sim 10^6$ [12–14]. В то же время упрощение численных и экспериментальных моделей до конвекции в плоском слое позволяют продвинуться в использовании этих величин еще на несколько порядков — до $E \sim 10^{-8}$ и

[*] E-mail: sstarchenko@mail.ru

$\mathrm{Ra} \sim 10^{13}$ [8]. Очевидно, что и эти значения все еще очень далеко отстоят от реальных, воистину астрономических, значений. Поэтому оправдан асимптотический подход [3–6, 8, 15, 16], постулирующий для подобных «жестких» систем стремление к нулю прежде всего числа Экмана E, которое фактически входит в систему как малый параметр при старших производных. При этом число Рэлея Ra, прочие параметры и переменные выражаются через E так, чтобы в асимптотических разложениях определенная комбинация этих коэффициентов подобия входила как внешний множитель в главном порядке. Таким образом, сложная изначальная система сводится к простой системе из уравнений более низкого порядка, допускающих малозатратные численное [8, 15], алгебраическое [3–6] и даже аналитическое [3, 16] решения.

Основная идея этой работы — ввести вместо E и Ra новые коэффициенты подобия так, чтобы они, непосредственно отражая физическую сущность почти двумерности и мощности рассматриваемой конвекции, оптимальным для дальнейших упрощений образом входили в соответственно масштабируемые уравнения. Эта идея рассматривается в разд. 2, где даются оценки физических параметров для комбинированной конвекции в быстро вращающемся плоском слое при условиях, характерных для приполярных регионов в недрах большинства известных планет и быстро вращающихся звезд. Рассмотрение комбинированной тепловой и композиционной конвекции в небыстро вращающемся плоском слое было предложено А. Масуда [17] для океанов, в которых конвекция поддерживается тепловыми эффектами, а подавляется — композиционными. В настоящей работе исследуются как обратная ситуация, так и возможная поддержка конвекции обоими эффектами, но с преобладанием композиционного. Все это характерно, прежде всего, для жидкого ядра Земли [9–14, 18], но может быть справедливо и для других планет [10–14, 18–20]. В результате предложено оптимальное на данный момент масштабирование комбинированной конвекции в быстро вращающемся плоском слое. Самосогласованные оценки типичных физических величин дают коэффициенты подобия для отношения диссипация/генерация конвекции s и соотношения тепловая/композиционная конвекция r. Третий новый коэффициент δ равен отношению характерного размера перпендикулярно оси вращения к толщине слоя. В ядре Земли $\delta \sim 10^{-3}$ замещает общепринятое число Экмана $E \sim 10^{-15}$, а $s \sim 10^{-6}$ — обратное число Рэлея $1/\mathrm{Ra} \sim 10^{-30}$. Выявлено, что при турбулентных коэффициентах переноса число s и числа Прандтля имеют значения порядка единицы для любых объектов, а единственный реально остающийся параметр в этой проблеме, δ, не зависит от коэффициентов переноса.

В разд. 3 настоящей работы разложенная по степеням δ изначальная нелинейная трехмерная система упрощается в главном порядке до практически двумерной системы, которая в основном объеме не содержит δ. При этом δ, разумеется, войдет в размерное решение, которое получается соответствующим умножением горизонтальных переменных на δ и толщину слоя D.

В разд. 4 линеаризованная задача о возбуждении конвекции в основном объеме решается алгебраически, а для критических величин — аналитически. В результате получены дисперсионные соотношения, общие выражения для критических волновых чисел, чисел s, определяющих числа Рэлея, прочих критических параметров и асимптотических решений. Численные оценки сделаны для жидких ядер планет, подобных Земле.

В заключительном разд. 5 приводятся основные результаты и обсуждаются их возможные дальнейшие приложения к недрам планет и лун и их океанам, звездам, экспериментальным объектам.

2. МАСШТАБИРОВАНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ ЕЕ ТИПИЧНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Рассмотрим плоский бесконечный слой толщиной D, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω в постоянном и антипараллельном вектору $\mathbf{\Omega}$ гравитационном поле с ускорением свободного падения g. Слой заполнен жидкостью с почти постоянными плотностью, коэффициентами термического и композиционного расширения α и β (примерно $\pm 10^{-5}$/К и 0.6 соответственно для ядра Земли [9–14, 18]), кинематической вязкостью ν, коэффициентами термодиффузии κ и диффузии λ. Известные [9–14, 18–21] уравнения конвекции для скорости $\mathbf{u}$, давления p, отклонений θ и ξ от стационарной (с $\mathbf{u}=0$) температуры $(D-z)T'$ и концентрации легкой примеси $(D-z)\Xi'$ запишем в размерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\nabla^2\mathbf{u} + 2\Omega\mathbf{1}_z \times \mathbf{u} + \nabla p = g(\alpha\theta + \beta\xi)\mathbf{1}_z, \quad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta - \kappa\nabla^2\theta = T' u_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\xi - \lambda\nabla^2\xi = \Xi' u_z. \tag{4}$$

На скорость накладываются граничные условия прилипания у границ с твердыми телами (например, в недрах планет земной группы и ледяных планет) или условия проскальзывания на границах с газом или другой жидкостью (примеры — океаны или плотные атмосферы). У верхней $z = D$ и нижней $z = 0$ границ величины θ, ξ, u_z принимают нулевое значение. В горизонтальном направлении используются условия периодичности для бесконечного слоя или граничные условия прилипания на цилиндрических стенках для ограниченного слоя.

Будем считать, что конвекция, как и в ядре Земли [9–11, 18], определяется композиционными эффектами. При этом тепловые воздействия могут приводить как к добавочному вкладу в конвективную неустойчивость (при $\alpha > 0$), так и к некоторой стабилизации конвекции (при $\alpha < 0$). Обозначим, соответственно, типичную скорость как U, типичное отклонение концентрации как Φ, а типичный малый размер перпендикулярно оси вращения будет равен δD. Пренебрегая малыми в основном объеме вязкостью и обеими диффузиями, запишем оценку как

$$\frac{U\Phi}{\delta D} = U\Xi', \tag{5}$$

$$\Omega\frac{U}{D} = g\beta\frac{\Phi}{\delta D}, \tag{6}$$

$$g\beta\frac{\Phi}{\delta D} = \frac{U^2}{(\delta D)^2}. \tag{7}$$

Оригинальная оценка (5) приравнивает по порядку величины член (4), отвечающий за основную конвективную неустойчивость (справа), к адвективному члену (второму слева) и/или к временно́й производной (первая) при времени $D\delta/U$. Оценки, подобные (6), (7), уже, по сути, общеприняты (см. [11–13, 18], а первое применение было, по-видимому, в [7]) и означают баланс роторов силы Кориолиса, плавучести и инерции. При этом из-за быстрого вращения типичный размер вдоль оси вращения совпадает с D, а перпендикулярно оси вращения размер в $1/\delta$ раз меньше.

Решая систему (4)–(6) для U, Φ и δ, выразим, таким образом, физически обоснованные типичные величины через малый относительный размер δ:

$$\delta = \frac{\sqrt{g\beta\Xi'}}{\Omega}, \tag{8}$$

$$\Phi = \Xi' D\delta, \tag{9}$$

$$U = \Omega D\delta^2. \tag{10}$$

Этот важный результат хорошо согласуется с множеством известных результатов, базирующихся на относительном изменении плотности $\beta\Xi' D$, которое может быть обусловлено как заданным перепадом температуры [12–14], так и тепловыми [9, 19], композиционными [9–11, 18] и прочими [9, 19] потоками плавучести. Например, в работе [12] и во многих других работах (см. [9–16, 18–21]) эта величина для ядра Земли ($D = 2200$ км) оценивается различными независимыми способами как $\beta\Xi' D \approx 10^{-8}$. Подставляя это значение в (8), (10), получим $\delta = 2\cdot 10^{-3}$ и $U = 1$ мм/с. Последняя величина хорошо согласуется не только с аналитическими [9–11, 18] и численными [12–14] моделями геодинамо, но и с непосредственными наблюдениями за дрейфом геомагнитного поля [22]. Соответствующая грубая оценка максимально возможного значения коэффициента турбулентной вязкости/диффузии имеет вид

$$UR\delta \approx \nu \approx \kappa \approx \lambda. \tag{11}$$

Исходя из изложенного выше, получаем значения этих турбулентных коэффициентов переноса, равных около нескольких м^2/с для жидкого ядра Земли. Соотношения (8)–(11) можно, безусловно, применить для оценок и многих других физических параметров в конкретных объектах; это потребует отдельных узкоспециализированных работ.

Масштабируем уравнения конвекции (1)–(4) на полученные выше типичные значения скорости (10) и композиционного отклонения (9). При этом используя соответствующие давление, время и размер, переопределим переменные:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} := \delta^2 D\Omega\mathbf{u}, \quad \theta := \delta\frac{\beta}{\alpha}\,\Xi' D\theta, \quad \xi := \delta\Xi' D\xi, \\ p := \delta^3 D^2\Omega^2 p, \quad t := t/(\Omega\delta), \\ x := \delta D x, \quad y := \delta D y, \quad z := D z.\end{gathered} \tag{12}$$

В результате получим, по-видимому, оптимально масштабированную систему:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \delta u_z\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \\ &\qquad - s\left(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial y^2} + \delta^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{\delta}\left(2\mathbf{1}_z\times\mathbf{u} + \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathbf{1}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathbf{1}_y\right) + \\ &\qquad + \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathbf{1}_z = (\theta+\xi)\mathbf{1}_z,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\delta\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u_x\frac{\partial \theta}{\partial x}+u_y\frac{\partial \theta}{\partial y}+\delta u_z\frac{\partial \theta}{\partial z}- -\frac{s}{\sigma}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\delta^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)=ru_z, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+u_x\frac{\partial \xi}{\partial x}+u_y\frac{\partial \xi}{\partial y}+\delta u_z\frac{\partial \xi}{\partial z}- -\frac{s}{\mu}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\delta^2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)=u_z. \tag{16}$$

Здесь $\sigma=\nu/\kappa$ — тепловое число Прандтля, $\mu = \nu/\lambda$ — композиционное. Перечислим новые коэффициенты подобия. Важнейший из них — горизонтальный относительный размер δ, следующий — соотношение тепловая/композиционная конвекция r, которое примерно меньше единицы по модулю в ядре Земли. Третий коэффициент — отношение диссипации к генерации конвекции s, которое приблизительно равно единице для турбулентных коэффициентов переноса из (11) и порядка 10^{-6} для молекулярных в ядре Земли. Выразим эти новые коэффициенты через исходные величины и общепринятые коэффициенты подобия:

$$\delta=\frac{\sqrt{g\beta\Xi'}}{\Omega}=E\sqrt{\frac{\mathrm{Ra}}{\mu}}, \tag{17}$$

$$r=\frac{\alpha T'}{\beta\Xi'}, \tag{18}$$

$$s=\frac{\nu\Omega^2/D^2}{(g\beta\Xi')^{3/2}}=E^{-1}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Ra}}\right)^{3/2}. \tag{19}$$

Здесь $E=\nu/(\Omega D^2)$ — общепринятое число Экмана, а $\mathrm{Ra}=g\beta\Xi' D^4/(\nu\lambda)$ — число Рэлея, определяющееся композиционной конвекцией.

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Разложим все переменные в ряд по степеням δ:

$$(u_x,u_y,u_z,p,\theta,\xi)= =\sum_{n\ge 0}(X_n,Y_n,Z_n,P_n,\Theta_n,\Xi_n)\delta^n. \tag{20}$$

В главном ($n=0$) порядке из (13)–(16) получим

$$\frac{\partial X_0}{\partial x}=-\frac{\partial Y_0}{\partial y}, \tag{21}$$

$$Y_0=\frac{1}{2}\frac{\partial P_0}{\partial x}, \tag{22}$$

$$X_0=-\frac{1}{2}\frac{\partial P_0}{\partial y}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t}+X_0\frac{\partial Z_0}{\partial x}+Y_0\frac{\partial Z_0}{\partial y}-s\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2}- -s\frac{\partial^2 Z_0}{\partial y^2}+\frac{\partial P_0}{\partial z}=\Theta_0+\Xi_0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial t}+X_0\frac{\partial \Theta_0}{\partial x}+Y_0\frac{\partial \Theta_0}{\partial y}- -\frac{s}{\sigma}\left(\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial y^2}\right)=rZ_0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \Xi_0}{\partial t}+X_0\frac{\partial \Xi_0}{\partial x}+Y_0\frac{\partial \Xi_0}{\partial y}- -\frac{s}{\mu}\left(\frac{\partial^2\Xi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Xi_0}{\partial y^2}\right)=Z_0. \tag{26}$$

Из-за вырожденности системы, видной по (21)–(23), необходимо рассмотреть следующее приближение ($n=1$ в (20)) для (14) и горизонтальных компонент (13):

$$\frac{\partial Z_0}{\partial z}=-\frac{\partial Y_1}{\partial y}-\frac{\partial X_1}{\partial x}, \tag{27}$$

$$s\frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2}+s\frac{\partial^2 Y_0}{\partial y^2}-\frac{\partial Y_0}{\partial t}- -X_0\frac{\partial Y_0}{\partial x}-Y_0\frac{\partial Y_0}{\partial y}-\frac{\partial P_1}{\partial y}=2X_1, \tag{28}$$

$$X_0\frac{\partial X_0}{\partial x}+Y_0\frac{\partial X_0}{\partial y}-s\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}- -s\frac{\partial^2 X_0}{\partial y^2}+\frac{\partial X_0}{\partial t}+\frac{\partial P_1}{\partial x}=2Y_1. \tag{29}$$

Исключая из этих уравнений X_1, Y_1 и (тождественным образом) P_1, окончательно в главном порядке получим почти двумерную систему ($\Delta^H\equiv\partial^2/\partial x^2+ +\partial^2/\partial y^2$):

$$\frac{\partial \Delta^H P_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\frac{\partial \Delta^H P_0}{\partial y}-\frac{\partial P_0}{\partial y}\frac{\partial \Delta^H P_0}{\partial x}\right)- -s\Delta^H(\Delta^H P_0)=\frac{\partial Z_0}{\partial z}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\frac{\partial Z_0}{\partial y}-\frac{\partial P_0}{\partial y}\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right)- -s\Delta^H Z_0+\frac{\partial P_0}{\partial z}=\Theta_0+\Xi_0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial t}+X_0\frac{\partial \Theta_0}{\partial x}+Y_0\frac{\partial \Theta_0}{\partial y}-\frac{s}{\sigma}\,\Delta^H\Theta_0=rZ_0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \Xi_0}{\partial t} + X_0 \frac{\partial \Xi_0}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial \Xi_0}{\partial y} - \frac{s}{\mu} \Delta^H \Xi_0 = Z_0. \quad (33)$$

На эту систему в направлении z (вдоль оси вращения) можно наложить только два граничных условия непроникновения

$$Z_0 = 0 \quad (34)$$

на внутренних границах нижнего и верхнего слоев Экмана, а остальные четыре условия выполняются на внешних границах этих слоев, которые при слабой нелинейности мало влияют на решение в основном объеме [5, 6].

При достаточно сильной нелинейности влияние этих пограничных слоев может быть весьма существенным (см. [23] и приведенные там ссылки). Соответствующее асимптотическое описание подобных пограничных слоев требует дальнейшего отдельного исследования и не входит в рамки этой работы.

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрим окончательно асимптотически масштабированные уравнения (30)–(34) в линейном приближении для исследования возбуждения конвекции. Поскольку все эти уравнения явно не зависят ни от пространственных переменных, ни от времени, можно искать простейшее экспоненциально-гармоническое решение в виде

$$(\Theta_0, \Xi_0, Z_0, P_0) = (\Theta, \Xi, Z, P) \times \times \exp\left[\Gamma t + i(Ix + Jy + Kz)\right]. \quad (35)$$

Подставляя представление (35) в (30)–(34), получим

$$\left[\Gamma(I^2 + J^2) + s(I^4 + 2I^2J^2 + J^4)\right] P = -iKZ, \quad (36)$$

$$\left[\Gamma + s(I^2 + J^2)\right] Z + iKP = \Theta + \Xi, \quad (37)$$

$$\left[\Gamma + \frac{s}{\sigma}(I^2 + J^2)\right] \Theta = rZ, \quad (38)$$

$$\left[\Gamma + \frac{s}{\mu}(I^2 + J^2)\right] \Xi = Z. \quad (39)$$

Приравнивая к нулю определитель этой линейной системы с правой нулевой частью, получим дисперсионное соотношение четвертого порядка по собственному числу Γ:

$$\Gamma + s(I^2 + J^2) = \frac{r}{\Gamma + s\sigma^{-1}(I^2 + J^2)} + + \frac{1}{\Gamma + s\mu^{-1}(I^2 + J^2)} - \frac{K^2}{\Gamma(I^2 + J^2) + s(I^2 + J^2)^2}. \quad (40)$$

Для критической, стационарной и горизонтально-симметричной конвекции с естественными для быстрого вращения квадратными ячейками [1–6]

$$\Gamma = 0, \quad I = J = A \Rightarrow s^2 = \frac{\mu + r\sigma}{4A^4} - \frac{K^2}{8A^6}. \quad (41)$$

Приравнивая производную от s^2 по A к нулю, находим критическое волновое число:

$$A = \sqrt{\frac{3}{\mu + r\sigma}} \, \frac{K}{2}. \quad (42)$$

Это число, последнее соотношение из (41) и граничные условия (34), сводящиеся к $K = \pi$ для наиболее легко возбуждающейся моды $\sim \sin(Kz)$ с максимальным значением s, определяют все основные критические параметры. Выразим их через числа Прандтля, соотношение r и общепринятые коэффициенты подобия:

$$A = \sqrt{\frac{3}{\mu + r\sigma}} \, \frac{\pi}{2}, \quad (43)$$

$$s^2 = \frac{4}{27} \frac{(\mu + r\sigma)^3}{\pi^4} = \frac{\mu^3}{E^4 \, \mathrm{Ra}^3}. \quad (44)$$

Из-за вырожденности системы выражение для s получается точно таким же, как (44), и для бесконечно вытянутых вдоль оси y конвективных ячеек с $I = A$ и $J = 0$, а $A = \sqrt{3/2}\,\pi/\sqrt{\mu + r\sigma}$ — в $\sqrt{2}$ раз больше, чем (43), в этом случае.

Замечательно, что как критическое волновое число A, так и отношение диссипация/генерация s наипростейшим образом выражается при выбранных коэффициентах подобия. При этом для критического числа Рэлея и волнового числа следуют значительно более сложно связанные зависимости, которые для чисто тепловой конвекции ($\mu = 0$, $r = 1$) совпадают с известными соотношениями из работ [3–6].

Для жидкого ядра Земли молекулярные $\sigma \approx \approx 10^{-2}$ [24, 25], $\mu \approx 10^3$ [9] и совсем плохо определено r [9–14, 18, 19, 24, 25], которое примерно может быть в пределах от менее 1 до -1. Последнее мало влияет на критические значения из (43), (44), которые для этих молекулярных значений коэффициентов переноса оцениваются как

$$A = 0.086, \quad s = 1200. \quad (45)$$

Огромная последняя величина s для критического отношения диссипация/генерация свидетельствует о том, что конвекция предельно легко возбуждается в ядре Земли и носит суперкритичный или сильно нелинейный характер, когда реальное значение $s \sim 10^{-6}$ из (19). Такую конвекцию на малых масштабах естественно считать предельно хаотической или турбулентной. Более разнообразна ситуация для соответствующих турбулентных величин на больших масштабах, где $\sigma \approx \mu \approx 1$. Если в рамках неопределенности величины r пренебречь тепловым вкладом, полагая $r = 0$, то

$$A = 2.7, \quad s = 0.04. \tag{46}$$

Столь же «умеренные» величины получим и при всех возможных значениях r, которые, по-видимому, существенно превосходят -1 в ядрах планет с магнитным полем, подобным геомагнитному полю. При приближении же к -1 возможны нестандартные слабо нелинейные или почти критические режимы с практически ламинарными течениями, а при $r \leq -1$ конвекция может и вовсе не возбудиться.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценки в конце предыдущего раздела базируются на положении о безусловном доминировании композиционной конвекции, слабости или более вероятном противодействии/стабилизации конвекции со стороны тепловых эффектов в ядре Земли [9–14, 18, 19, 24, 25]. Соответствующая «умеренная», в терминах конца предыдущего раздела, конвекция вполне может поддерживать магнитное поле не только в Земле, но и в подобных ей планетах и лунах. Предельно сильная стабилизация (значение r чуть больше -1) возможна в недрах некоторых планет земной группы. Для Меркурия с его необычным магнитным полем это частично подтверждается численной моделью [20] и асимптотической моделью [26]. Аналогичная ситуация возможна на спутнике Юпитера Ганимеде. Для Венеры, Марса и большинства крупных лун возможно, что $r \leq -1$, при этом конвекция не возбуждается.

Результаты предыдущего раздела можно приложить к другим быстро вращающимся астрофизическим объектам и, прежде всего, к звездам, а также к достаточно плотным недрам газообразных и ледяных планет. Возможны приложения и к экспериментальным объектам, моделирующим все перечисленные выше астрофизические объекты. К океанам Земли приложение ограничено из-за их недостаточно быстрого вращения ($\delta \sim 0.1$) и относительно небольшой глубины. Возможно, по-видимому, приложение к глубоким океанам и плотным частям атмосфер других быстро вращающихся планет (Юпитер, Сатурн), лун (Европа) и экзопланет.

Дальнейшее развитие этой работы видится в получении почти критических и слабо нелинейных решений упрощенной асимптотической системы (30)–(34). Пока это представляется возможным только численно, но для систем, упрощенных вплоть до обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее, на пути приближения к реальным объектам, возможно решение сильно нелинейной задачи с активными пограничными слоями с использованием малого параметра s при старших производных.

Перечислим основные результаты этой работы.

1. Предложено, на взгляд автора, оптимальное масштабирование комбинированной тепловой и композиционной конвекций в быстро вращающемся плоском слое, которое следует из самосогласованных оценок типичных физических величин.

2. Вводятся оригинальные коэффициенты подобия для отношения диссипация/генерация конвекции s и соотношения тепловая/композиционная конвекция r. Третий новый и важнейший здесь коэффициент δ равен отношению характерного размера перпендикулярно оси вращения к толщине слоя. Чем быстрее вращение, тем меньше δ.

3. В условиях жидкого ядра Земли $\delta \sim 10^{-3}$ замещает общепринятое число Экмана $E \sim 10^{-15}$, а $s \sim 10^{-6}$ — обратное число Рэлея $1/\mathrm{Ra} \sim 10^{-30}$. Выявлено, что при турбулентных коэффициентах переноса число s и числа Прандтля имеют значения порядка единицы для любых объектов, а δ не зависит от коэффициентов переноса.

4. В результате асимптотического разложения по степеням δ изначальную нелинейную трехмерную систему из шести переменных удалось упростить до почти двумерной системы из четырех переменных, не содержащей δ. При этом δ входит в размерное решение, которое получается соответствующим умножением горизонтальных переменных на δ и толщину слоя D.

5. Линеаризованная задача о возбуждении конвекции в основном объеме решается алгебраически, а для критических величин — аналитически. Получены дисперсионные соотношения, общие выражения для критических волновых чисел, чисел s, определяющих числа Рэлея, для прочих критических параметров и асимптотических решений. Численные оценки сделаны для жидких ядер планет, подобных Земле.

6. Предлагаются возможные дальнейшие приложения к недрам планет и лун и их океанам, звездам, экспериментальным объектам.

Автор благодарен рецензенту за плодотворную критику и советы, которые позволили существенно улучшить эту работу как в ее представительной, так и в содержательной части. В аспектах, связанных с магнитными полями планет, работа поддержана РФФИ (грант № 16-05-00507).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Proudman, Proc. Roy. Soc. (London) A **92**, 408 (1916).

2. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. (London) A **100**, 114 (1921).

3. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. (London) A **217**, 306 (1953).

4. S. Chandrasekhar and D. D. Elbert, Proc. Roy. Soc. (London) A **231**, 198 (1955).

5. P. P. Niiler and F. E. Bisshopp, J. Fluid Mech. **22**, 753 (1965).

6. W. B. Heard and G. Veronis, Geophys. Fluid Dyn. **2**, 299 (1971).

7. P. B. Rhines, J. Fluid Mech. **69**, 417 (1975).

8. J. S. Cheng, S. Stellmach, A. Ribeiro, A. Grannan, E. M. King, and J. M. Aurnou, Geophys. J. Int. **201**, 1 (2015).

9. S. I. Braginsky and P. H. Roberts, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **79**, 1 (1995).

10. S. V. Starchenko and C. A. Jones, Icarus **157**, 426 (2002).

11. S. V. Starchenko, Geomagnetism and Aeronomy **54**, 694 (2014).

12. U. R. Christensen and J. Aubert, Geophys. J. Int. **166**, 97 (2006).

13. U. R. Christensen, Space Sci. Rev. **152**, 565 (2010).

14. P. L. Olson, G. A. Glatzmaier, and R. S. Coe, Earth Planet. Sci. Lett. **304**, 168 (2011).

15. S. V. Starchenko, M. S. Kotelnikova, and I. V. Maslov, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **100**, 397 (2006).

16. С. В. Старченко, М. С. Котельникова, ЖЭТФ **143**, 388 (2013).

17. A. Masuda, J. Oceanograph. Soc. Japan **34**, 8 (1978).

18. S. V. Starchenko and Y. D. Pushkarev, Magnetohydrodynamics **49**(1), 35 (2013).

19. D. J. Stevenson, Space Sci. Rev. **152**, 651 (2010).

20. U. R. Christensen, Nature **444**, 1056 (2006).

21. С. В. Старченко, М. С. Котельникова, ЖЭТФ **121**, 538 (2002).

22. Z.-G. Wei and W.-Y. Xu, Earth Planets Space **55**, 131 (2003).

23. K. Julien, J. M. Aurnou, M. A. Calkins, E. Knobloch, P. Marti, S. Stellmach, and G. M. Vasil, J. Fluid Mech. **798**, 50 (2016).

24. M. Pozzo, C. Davies, D. Gubbins, and D. Alfe, Nature **485**, 355 (2012).

25. H. Gomia, K. Ohtaa, K. Hirosea et al., Phys. Earth Planet. Int. **224**, 88 (2013).

26. A. P. Bassom, A. M. Soward, and S. V. Starchenko, J. Fluid Mech. **689**, 376 (2011).