ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 5 (11), стр. 937–944

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ

А. В. Гусев [a*], *Д. А. Литвинов* [a,b,c], *В. Н. Руденко* [a]

[a] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119991, Москва, Россия*

[b] *Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 117997, Москва, Россия*

[c] *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана 105005, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 мая 2016 г.

Прецизионное тестирование эффекта гравитационного замедления времени предполагает сравнение хода часов в точках с разными гравитационными потенциалами. Такая конфигурация возникает при размещении стандартов радиочастоты на борту орбитальной и наземной станций. При этом наземный стандарт доступен непосредственно, а бортовой только через обмен электромагнитными сигналами. Восстановление текущей частоты бортового стандарта представляет собой некорректную обратную задачу, решение которой существенно зависит от характеристик стохастического электромагнитного фона. Известно решение для гауссова шума, но природа самих стандартов ассоциирована с нестационарными флуктуациями широкого класса распределений. Предлагается решение для фона фликкерных флуктуаций со спектром типа $(1/f)^\gamma$, где $1 < \gamma < 3$, и стационарными приращениями. Результатом являются формулы для ошибки восстановления частоты бортового стандарта и численные оценки точности измерения релятивистского эффекта красного смещения.

DOI: 10.7868/S0044451016110109

1. МОТИВАЦИЯ

Сенсационное обнаружение всплеска гравитационных волн от сливающихся компонент двойной черной дыры на космологическом расстоянии в 400 Мпк [1] фактически закрывает список релятивистских эффектов, предсказанных в ОТО [2, 3] и получивших экспериментальное подтверждение. Объявленная регистрация всплеска гравитационных волн служит доказательством сразу двух предсказаний теории: существования экзотических сверхплотных звезд — черных дыр и космического гравитационного излучения, которые долгое время сохраняли элемент гипотезы. Дальнейшие эксперименты по проверке ОТО имеют смысл прецизионного тестирования ее основных постулатов и главного из них — принципа эквивалентности (ПЭ). Проверка этой базовой для ОТО (как метрической теории) аксиомы с нарастающей точностью имеет целью отыскание границ ее применимости и, значит, сопряжено с поиском новой физики в случае обнаружения нарушений. Современная трактовка ПЭ выделяет три его характерных аспекта [4]: а) универсальность свободного падения пробных тел в гравитационном поле (независимость ускорения от массы тел), б) локально лоренцевскую инвариантность (независимость физических законов от скорости системы отсчета), в) универсальность гравитационного смещения частоты спектральных линий электромагнитного излучения (позиционная независимость физических законов). Последний аспект, терминологически более известный как универсальность эффекта красного смещения, иногда трактуется как ПЭ для свободно падающих фотонов [5]. Как известно, этот эффект измерен в ходе эксперимента GP-A, в котором выполнялось сравнение частот наземного и бортового H-мазеров, когда последний находился в

* E-mail: avg@sai.msu.ru

точке максимального подъема баллистической ракеты ~ 10 тыс. км [6,7]. Было найдено соответствие наблюдаемого взаимного гравитационного сдвига частот теоретической величине, рассчитанной по формуле ОТО: $f = (\Delta\varphi/c^2)$, где $\Delta\varphi$ — разность гравитационных потенциалов в точках расположения стандартов. При этом относительная точность такого соответствия достигла 0.01 % (т. е. 10^{-4}). Предлагаются проекты космических миссий для улучшения точности на несколько порядков, среди которых наиболее известны ACES (2018) [8] и STE-QUEST (> 2022) [9]. Между тем уже сейчас в ходе действующей миссии РадиоАстрон [10] имеется возможность выполнения измерений эффекта красного смещения с точностью, по крайней мере на порядок превышающей точность, достигнутую с GP-A [11]. Как указано в работе [11], это может быть получено за счет накопления измерений при их повторении на каждом орбитальном цикле, а также при использовании орбитальной модуляции величины самого эффекта красного смещения. Обсуждение этих утверждений не является, однако, предметом данной работы. Мы обращаем внимание на то, что анализ данных и оценка гравитационного сдвига частоты в таком эксперименте связаны с решением некорректной обратной задачи восстановления частоты бортового стандарта по сигналу, принятому наземной станцией слежения. Проблема в том, что в канале связи сигнал испытывает воздействие стохастических когерентных помех, среди которых наиболее сильными являются доплеровский, ионосферный и тропосферный сдвиги частоты. Кроме того, существуют частотные флуктуации самого стандарта. Известно решение подобной задачи в рамках адаптивных оценочно-компенсационных алгоритмов при условии моделирования помех гауссовым белым или окрашенным шумом [12]. Это справедливо в отношении шумов «канала связи», но неприменимо к шумам стандартов, для которых типичным является присутствие нестационарного «фликкерного» стохастического фона со спектральной плотностью инверсно-степенного типа $(1/f)^\gamma$.

Целью данной работы является решение обратной задачи восстановления частоты бортового стандарта по сигналу, принятому наземной станцией слежения на фоне нестационарного фликкерного шума со спектральным индексом $1 < \gamma < 3$. Численная оценка точности восстановления позволяет вынести суждение о реалистичности программы увеличения точности измерения эффекта красного смещения с космическим аппаратом (КА) РадиоАстрон.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть информация, посланная с борта КА, принята наземной станцией слежения в виде реализации

$$v(t) = u(t;\mathbf{a}) + n(t),$$

которая представляет собой смесь информационного сообщения $u(t;\mathbf{a})$, зависящего от векторного параметра $\mathbf{a} = \|a_0 \ \ldots \ a_m\|^{\mathrm{T}}$, и аддитивной случайной помехи $n(t)$. Для посылки в классе узкополосных колебаний удобно использовать комплексную форму записи

$$v(t) = \mathrm{Re}\left[\widetilde{v}((t;\mathbf{a}))\exp\{j\omega_0 t\}\right],$$

где ω_0 — номинальная несущая частота, а $\widetilde{v}((t;\mathbf{a}))$ — комплексная огибающая, медленно меняющаяся фаза которой определена как $\vartheta(t;\mathbf{a}) = \arg[\widetilde{v}(t;\mathbf{a})]$. Введение векторного параметра $\mathbf{a}$ призвано описать медленные изменения несущей частоты, связанные с движением КА и вариациями среды в канале связи.

Мгновенная несущая частота ω тогда представляется как сумма ее номинального значения и переменной добавки — производной меняющейся фазы

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\vartheta(t;\mathbf{a})}{dt}.$$

При этом уравнение меняющейся фазы задается в следующей форме:

$$\frac{d\vartheta(t;\mathbf{a})}{dt} = x(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i + \xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad (1a)$$

т. е. ее медленно меняющаяся (квазидетерминированная) часть аппроксимируется степенным полиномом с коэффициентами векторного параметра $\mathbf{a}$, а стохастическая часть представлена на интервале наблюдения T флуктуационной переменной $\xi(t)$. Для случая гауссовых флуктуаций оценка потенциальной точности измерения ω не представляет проблемы, и может быть дана на основе обобщенного неравенства Рао–Крамера [13]. Однако для стандартов частоты микроволнового диапазона характерно присутствие нестационарного «фликкерного» стохастического фона $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$N_\xi(\omega) = \frac{A}{|\,\omega\,|^\gamma}, \quad 1 < \gamma < 3, \qquad (1b)$$

и присущими ей постоянными параметрами: уровнем мощности A и спектральным индексом γ. В этом случае универсального решения для оценки точности не существует, и его отыскание требует дополнительного анализа, который представлен ниже.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛИККЕРНОГО ШУМА

Нестационарный фликкерный шум $\xi(t)$ относится к классу случайных процессов со стационарными приращениями, для описания которых традиционно используется структурная функция [14]

$$d_\xi(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = \\ = M_1\left\{[\xi(t_1+\tau_1)-\xi(t_1)][\xi(t_2+\tau_2)-\xi(t_2)]\right\}.$$

Частным случаем структурной функции $d_\xi(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2)$ ($t_1=t_2=t$ и $\tau_1=\tau_2=\tau$) оказывается статистическая структурная функция [14]

$$d_\xi(\tau) = M_2\left\{\xi(t+\tau)-\xi(t)\right\} = \\ = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty N_\xi(\omega)\sin^2\frac{\omega\tau}{2}d\omega, \quad (2a)$$

где $M_{1,2}\{\cdot\}$ — центральные моменты первого и второго порядков.

В радиофизике, однако, для характеристики флуктуационных свойств частотных стандартов принято описание с помощью так называемой дисперсии Аллана $\sigma_A^2(T_0)$ [15], которая измеряется экспериментально на интервале усреднения T_0 и представляется в паспорте такого индивидуального инструмента. По этой причине следует указать на связь параметров стационарной структурной функции с дисперсией Аллана:

$$\sigma_A^2(T_0) = M_2\left\{\frac{1}{T_0}\int\limits_t^{t+T_0}[\xi(t+T_0)-\xi(t)]dt\right\} = \\ = \frac{16}{\pi}\int\limits_0^\infty N_\xi(\omega)\frac{\sin^4(\omega T_0/2)}{(\omega T_0)^2}\,d\omega. \quad (2b)$$

Вычисляя интегралы (2a), (2b) с учетом (1), получаем соотношения связи

$$d_\xi(\tau) = \frac{4A}{\pi}\left(\frac{|\tau|}{2}\right)^{\gamma-1} I_{-\gamma+1,2}, \\ \sigma_A^2(T_0) = \frac{4A}{\pi}\left(\frac{T_0}{2}\right)^{\gamma-1} I_{-\gamma-1,4}, \quad (3a)$$

где введено обозначение

$$I_{\alpha,n} = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\sin^n x\,dx.$$

Соотношения (3a) можно записать в более явном виде, определяя также спектральный индекс по двум значениям дисперсии Аллана на разных интервалах усреднения T_0, T_1:

$$d_\xi(\tau) = C_0|\tau|^{\gamma-1}, \quad C_0 = \frac{\sigma_A^2(T_0)}{T_0^{\gamma-1}}\,\frac{I_{-\gamma+1,2}}{I_{-\gamma=1,4}}, \\ \gamma = 1 + \frac{1}{\ln(T_0/T_1)}\ln\frac{\sigma_A^2(T_0)}{\sigma_A^2(T_1)}, \quad T_1\neq T_0. \quad (3b)$$

Как было сказано выше (разд. 2), целью анализа является оценка потенциальной точности измерения мгновенной частоты ω, а значит, векторного параметра **a** на фоне нестационарного фликкерного шума $\xi(t)$ со спектральной плотностью (1). В литературе [14] указывается, что для фликкерного шума существенна характерная зависимость от начального значения реализации. В небайесовской постановке начальное значение рассматривается как неизвестный, но неслучайный параметр, что приводит к появлению систематической ошибки измерения. Влияние флуктуационной части фликкерного шума на оценку параметров может вычисляться на основе обобщенного неравенства Рао – Крамера. При этом корреляционная матрица флуктуационной составляющей определяется с помощью условных статистических характеристик фликкерного шума как условного гауссова случайного процесса. Перейти к анализу условных характеристик $\xi(t)$ можно с помощью процедуры регуляризации, рассматривая обобщенный флуктуационный фон, зависящий от параметра α:

$$\xi(t)\to\xi(t;\alpha)\to\xi(t) = \lim_{\alpha\leftrightarrow 0}\xi(t;\alpha), \\ \downarrow \\ \lim_{\alpha\to 0} d_\xi(\tau;\alpha) = d_\xi(\tau),$$

где

$$d_\xi(\tau;\alpha) = M_2\left\{\xi(t+\tau;\alpha)-\xi(t;\alpha)\right\}$$

— статистическая структурная функция вспомогательного стационарного гауссова случайного процесса $\xi(t;\alpha)$ со спектральной плотностью $N_\xi(\omega;\alpha)$ и корреляционной функцией $k_\xi(\tau;\alpha)$,

$$N_\xi(\omega;\alpha) = \frac{A}{(\omega^2+\alpha^2)^{\gamma/2}}, \quad 1<\gamma<3, \\ k_\xi(\tau;\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty N_\xi(\omega;\alpha)\cos\omega\tau\,d\omega. \quad (4)$$

Пусть $\sigma^2(\alpha) = M_2\{\xi(t;\alpha)\}$ и $\varrho(\tau;\alpha) = k_\xi(\tau;\alpha)/\sigma^2(\alpha)$ — соответственно дисперсия и коэффициент корреляции. Тогда структурная функция вспомогательного процесса $d_\xi(\tau;\alpha)$ может быть представлена в виде

$$d_\xi(\tau;\alpha) = 2\sigma_A^2(\alpha)[1-\varrho(\tau;\alpha)].$$

Учитывая, что на практике используется цифровая обработка данных, перейдем далее к описанию процесса $x(t)$ в дискретном времени (что позволяет заменить суммированием интегралы непрерывных функционалов правдоподобия [16]) $t \to t_k = k\Delta t$, Δt — шаг дискретизации, $k = \overline{0, M}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{s}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\xi}. \tag{5}$$

Здесь

$$\mathbf{x} = \|x_0 \ldots x_M\|^{\mathrm{T}}, \quad x_k = x(t_k);$$
$$\mathbf{s}(\mathbf{a}) = \|s_0(\mathbf{a}) \ldots s_M(\mathbf{a})\|^{\mathrm{T}}, \quad s_k(\mathbf{a}) = s(t_k;\mathbf{a});$$
$$\boldsymbol{\xi} = \|\xi_0 \ldots \xi_M\|^{\mathrm{T}}, \quad \xi_k = \xi(t_k).$$

4. ФЛУКТАЦИОННЫЙ ФЛИККЕРНЫЙ ФОН КАК УСЛОВНЫЙ ГАУССОВ ПРОЦЕСС

Пусть $\boldsymbol{\xi}(\alpha) = \|\xi_0(\alpha) \ \ldots \ \xi_M(\alpha)\|^{\mathrm{T}}$ — стационарный гауссов дискретный случайный процесс, $\xi_k(\alpha) = \xi(t_k;\alpha)$, т. е. $\xi_0(\alpha)$ — его начальное состояние. Тогда можно показать (см. Приложение), что условные среднее значение $M_1\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\}$ и дисперсия $M_2\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\}$ случайной величины $\xi_i(\alpha)$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{gathered} M_1\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\} = \varrho(t_i;\alpha)\xi_0(\alpha), \\ M_2\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\} = \sigma^2(\alpha)[1-\varrho^2(t_i;\alpha)], \\ t_i = i\Delta t. \end{gathered} \tag{5a}$$

Видно, что в отличие от среднего значения $M_1\{\xi_i|\xi_0\}$ условная дисперсия $M_2\{\xi_i|\xi_0\}$ не зависит от начального состояния и может быть выражена через структурную функцию $d_\xi(\tau;\alpha)$ (см. выше):

$$M_2\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\} = \frac{1}{2}[1+\varrho(t_i;\alpha)]d_\xi(t_i;\alpha), \ i = \overline{0, M}.$$

Для того чтобы осуществить предельный переход $\alpha \to 0$, воспользуемся функцией корреляции (4) стационарного гауссова случайного процесса $\xi(t;\alpha)$, которая может быть представлена в виде

$$k_\xi(\tau;\alpha) = \frac{A\alpha^{-2\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma/2)}\left(\frac{\alpha\tau}{2}\right)^\nu K_\nu(\alpha\tau),$$

где $\nu = (1/2)(\gamma-1)$, $0 < \nu < 1$, $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (функция Бесселя третьего рода). Учитывая, что

$$K_\nu(z) = \frac{\pi[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)]}{2\sin\pi\nu},$$

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

(где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя ν-го порядка), можно показать, что

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{A\alpha^{-2\nu}\sqrt{\pi}}{2\sin\pi\nu\Gamma(\gamma/2)\Gamma(-\nu+1)},$$

$$\varrho(\tau;\alpha) = \Gamma(-\nu+1) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha\tau/2)^{2m}}{m!}\left[\frac{1}{\Gamma(-\nu+m+1)} - \frac{(\alpha\tau/2)^{2\nu}}{\Gamma(\nu+m+1)}\right].$$

Анализ этого выражения показывает, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \varrho(\tau;\alpha) = 1,$$

т. е. зависимость среднего значения от начального состояния сохраняется (см. (5а)) и, следовательно,

$$\begin{gathered} \lim_{\alpha\to 0} M_1\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\} = M_1\{\xi_i|\xi_0\} = \xi_0, \\ \lim_{\alpha\to 0} M_2\{\xi_i(\alpha)|\xi_0(\alpha)\} = M_2\{\xi_i|\xi_0\} = d_\xi(t_i), \\ k = \overline{0, M}. \end{gathered} \tag{6}$$

Опираясь на результат (6), можно вычислить корреляцию дискретных отсчетов

$$\xi_i = \xi_0 + \delta\xi_i, \quad i = \overline{0, M},$$

где $\delta\xi_i$ — гауссова случайная величина с нулевым средним значением и не зависящей от начального состояния дисперсией $M_2\{\delta\xi_i\} = d_\xi(t_i)$.

Статистические свойства гауссовой последовательности $\delta\boldsymbol{\xi} = \|\delta\xi_0 \ \ldots \ \|^{\mathrm{T}}$ гауссовых случайных величин определяются корреляционной матрицей

$$\mathbf{K} = M_1\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\} = [K_{ik}], \quad [K_{ik}] = M_1\{\delta\xi_i\delta\xi_k\}. \tag{7a}$$

Для того чтобы определить элементы этой матрицы, введем разность отсчетов

$$\zeta = \xi_i - \xi_k = \delta\xi_i - \delta\xi_k, \quad i, k = \overline{0, M}.$$

Тогда, учитывая, что

$$\begin{gathered} M_2\{\zeta\} = M_2\{\delta\xi_i\} - 2M_1\{\delta\xi_i\delta\xi_k\} + M_2\{\delta\xi_k\} = \\ = d_\xi(t_i - t_k), \end{gathered}$$

получим

$$M_1\{\delta\xi_i\delta\xi_k\} = (1/2)[d_\xi(t_i) + d_\xi(t_k) - d_\xi(t_i - t_k)].$$

Здесь $d_\xi(\tau)$ — структурная функция, заданная в (3). Используя (2), последнюю формулу можно переписать в явном виде:

$$M_1\left\{\delta\xi_i\delta\xi_k\right\}=\frac{C_0}{2}\left(\frac{1}{T_0}\right)^{\gamma-1}\times \\ \times\left((i\Delta t)^{\gamma-1}+(k\Delta t)^{\gamma-1}-(|i-k|\Delta t)^{\gamma-1}\right), \quad (7b)$$

что полностью определяет корреляционную матрицу (7a).

Итак, в векторном представлении дискретный фликкерный шум $\boldsymbol{\xi}$, как условный гауссов случайный процесс, определяется следующим выражением:

$$\boldsymbol{\xi}=\xi_0\mathbf{1}+\delta\boldsymbol{\xi}, \quad (8)$$

где $\mathbf{1}=\|1\ \ldots\ 1\|^{\mathrm{T}}$ — единичный вектор.

5. ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФЛИККЕРНОГО ШУМА

При обработке информации в дискретном времени совокупность стохастических помех записывается в виде (см. (5), (8))

$$x_k=\xi_0+\sum_{i=0}^{m}a_it_k^i+\delta\xi_k, \quad k=\overline{0,M}.$$

Как уже отмечалось, $\xi_0=\xi(0)$ рассматривается как неизвестный, но неслучайный параметр. Следовательно, характерная для нестационарного фликкерного шума зависимость от начального состояния приводит к систематической (неустранимой) ошибке при измерении параметра a_0. Фактически, параметр аппроксимации дрейфа a_0 следует объединить с систематикой $\xi_0=\xi(0)$ и перенести в правую часть предыдущего уравнения, рассматривая стохастическую переменную

$$\Delta x_k=x_k-\xi_0-a_0=\sum_{i=1}^{m}a_it_k^i+\delta\xi_k, \quad k=\overline{1,M}.$$

Флуктуационная ошибка обусловлена наличием аддитивной гауссовой помехи $\delta\boldsymbol{\xi}$, у которой элементы (7) корреляционной матрицы $\mathbf{K}$ уже свободны от параметров начального состояния. Поэтому минимальные дисперсии несмещенных оценок $\widehat{a}_i$ определяются обобщенным неравенством Рао–Крамера [13]:

$$\mathbf{M}_2\left\{a_i-\widehat{a}_i\right\}\geqslant\sigma_{ii}^2, \quad i=\overline{1,M}, \quad (9)$$

где σ_{ii}^2 — диагональные элементы матрицы $\mathbf{I}^{-1}$, обратной информационной матрице Фишера $\mathbf{I}$,

$$\sigma_{ii}^2=\frac{1}{\det[I_{ij}]}\frac{\partial}{\partial I_{ii}}\det[I_{ik}],$$

$\det[I_{ij}]$ — детерминант информационной матрицы Фишера (далее D). Элементы матрицы Фишера определяются следующим выражением:

$$\mathbf{I}=[I_{ij}],\ I_{ij}=-\mathbf{M}_1\left\{\left[\frac{\partial^2z(\mathbf{a})}{\partial a_i\partial a_j}\right]\right\}, \quad (10)$$

где $z(\mathbf{a})$ — логарифм условного отношения правдоподобия.

Как известно [16], для гауссова случайного процесса $\delta\boldsymbol{\xi}$ функционал правдоподобия $z(\mathbf{a})$ строится по формуле

$$z(\mathbf{a})=\Delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}(\mathbf{a})-(1/2)\Delta\mathbf{s}^{\mathrm{T}}(\mathbf{a})\mathbf{r}(\mathbf{a}), \\ \Delta\mathbf{s}^{\mathrm{T}}(\mathbf{a})=\mathbf{s}^{\mathrm{T}}(\mathbf{a})-a_0, \quad (11)$$

где весовой вектор $\mathbf{r}(\mathbf{a})=\|r_1(\mathbf{a})\ \ldots\ r_M(\mathbf{a})\|^{\mathrm{T}}$ подчиняется уравнению

$$\mathbf{r}(\mathbf{a})=\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{s}(\mathbf{a}). \quad (12)$$

Выражения (11) и (12) можно преобразовать к эквивалентному виду, удобному для работы с дискретным представлением:

$$z(\mathbf{a})=\sum_{k=0}^{M}\Delta x_kr_k(\mathbf{a})-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M}\Delta s_k(\mathbf{a})r_k(\mathbf{a}),$$

$$r_k(\mathbf{a})=\sum_{m=0}^{M}K_{km}^{-1}\Delta s_m(\mathbf{a}),$$

где K_{km}^{-1} — элементы обратной матрицы $\mathbf{K}^{-1}$.

Учитывая, что $\Delta s_k(\mathbf{a})=\sum\limits_{i=1}^{m}a_it_k^i$, имеем

$$I_{ik}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M}\left(t_k^i\frac{\partial r_k(\mathbf{a})}{\partial a_j}+t_k^j\frac{\partial r_k(\mathbf{a})}{\partial a_i}\right), \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial r_k(\mathbf{a})}{\partial a_i}=\sum_{m=0}^{M}K_{km}^{-1}t_m^i.$$

6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НОМИНАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ПОСЫЛКИ

Вернемся теперь к изначальной постановке задачи — восстановление номинальной частоты ω_0 сигнала, посланного с борта КА. Очевидно, что номинальная частота получается в результате обработки принятого сигнала ω в соответствии с процедурой

$$\omega_0 = \omega - \frac{d\vartheta(t;\mathbf{a})}{dt} = \omega - \xi_0 - a_0 - \sum_{i=1}^{m} a_i t^i - \delta\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{14}$$

Здесь мы разделили фликкерное воздействие на неизвестный стационарный сдвиг ξ_0 и гауссову стохастическую часть $\delta\xi(t)$. Формула (14) представляет собой классическую процедуру компенсации помехи с ее предварительной оценкой, которая осуществлялась по алгоритму максимума правдоподобия, изложенному в разд. 5. По существу, в (14) предлагается вычитание медленной эволюции частоты, заданной оценками параметров вектора **a**, с последующим расчетом точности восстановления (измерения) ω_0 на фоне гауссовой компоненты шума $\delta\xi(t)$. В этом смысле данная процедура логически совпадает с обработкой эмпирическими алгоритмами типа [12] с тем отличием, что она проходит на фоне фликкерной помехи.

Для выполнения процедуры (14) имеются все требуемые конструкции: корреляционная матрица фликкерного шума (7a), (7b); погрешность оценки параметров эволюции a_i (9); формулы отыскания элементов информационной матрицы Фишера (10)–(13). Имеется, однако, особенность, связанная с наличием систематической ошибки квазистатических сдвигов частоты. Преодоление этой неопределенности невозможно только в рамках алгоритмов правдоподобия и требует использования дополнительных информационных каналов.

7. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ФЛИККЕРНОГО ШУМА С $\gamma = 2$

Хотя процедура оценки номинальной частоты ω_0 полностью определена в разд. 5 и 6, она предполагает выполнение численного счета по обработке экспериментальных данных в дискретном времени. Таким образом, результат как восстановление (оценка) номинальной частоты посылки с приемлемой точностью остается неявным и поддерживается лишь оптимальностью предлагаемых алгоритмов фильтрации. Между тем возможна относительно быстрая оценка достижимой точности для частного случая фликкерного фона с показателем индекса $\gamma = 2$ (1b), так называемый «шум случайного блуждания» [17]. Чтобы найти такую оценку, вернемся к непрерывному представлению данных: $\Delta t \to 0$, $t = i\Delta t$, $\tau = k\Delta t$.

Тогда вместо (11) имеем для логарифма отношения правдоподобия $z(\Delta x(a))$ реализации случайного процесса $\Delta x(t)$ следующие выражения:

$$z(\Delta x|\mathbf{a}) = \int_0^T \Delta x(t) r(t;\mathbf{a})\, dt - \frac{1}{2}\int_0^T \Delta s(t;\mathbf{a}) r(t;\mathbf{a})\, dt. \tag{15a}$$

Здесь вектор $r(t;\mathbf{a})$ задан интегральным уравнением:

$$\int_0^T k_{\delta\xi}(t,\tau) r(t;\mathbf{a}) d\tau = \Delta s(t;\mathbf{a}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{15b}$$

где $k_{\delta\xi}(t,\tau)$ — функция корреляции процесса $\delta\xi$,

$$k_{\delta\xi}(t,\tau) = \langle \delta\xi(t)\delta\xi(\tau)\rangle = \frac{C_0}{2T}\left[t^{\gamma-1} + \tau^{\gamma-1} - |t-\tau|^{\gamma-1}\right], \quad 0 \leqslant t,\tau \leqslant T.$$

Информационная матрица Фишера определена формулой (10). В соответствии с неравенством Рао – Крамера, минимальные дисперсии несмещенных оценок $\widehat{a}_{1,2}$ неизвестных параметров a_1 и a_2 равны

$$\sigma_{ii}^2 = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial I_{ii}}, \quad i = 1, 2,$$

где D — детерминант матрицы Фишера,

$$D = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21} = I_{11}I_{22} - I_{12}^2.$$

В частном случае фликкерного шума с $\gamma \approx 2$ функция корреляции гауссова случайного процесса $\delta\xi(t)$ равна

$$k_{\delta\xi}(t,\tau) = \frac{C_0}{2T}\left[t + \tau - |t-\tau|\right], \quad 0 \leqslant t, \tau, \tag{16}$$

а опорный вектор $r(t,\mathbf{a})$ находится из приведенных выше уравнений как [18]

$$r(t,\mathbf{a}) = \frac{1}{C_0}\left[-2a_2 + 2(a_1 + 2a_2T)\delta(t-T)\right].$$

Появление δ-функции в этом выражении обусловлено тем, что производная сигнала $\Delta s(t;\mathbf{a})$ не обращается в нуль на конце интервала интегрирования $(0,T)$.

Отсюда находим элементы матрицы Фишера

$$I_{11} = \frac{2T}{C_0}, \quad I_{12} = I_{21} = \frac{2T^2}{C_0}, \quad I_{22} = \frac{8}{3}\frac{T^3}{C_0}, \tag{17a}$$

и дисперсии оценок параметров a_1, a_2

$$\sigma_{11}^2 = \frac{I_{22}}{D} = \frac{4C_0}{3T}, \quad \sigma_{22}^2 = \frac{I_{11}}{D} = \frac{3C_0}{2T^3}. \tag{17b}$$

С помощью формул (16), (17) можно сделать численную оценку точности восстановления номинальной частоты посылки для конкретных Н-стандартов, используемых в миссии РадиоАстрон. Стандарты, наземный и бортовой, производства компании «Время-Ч» [19] обладают наилучшей «алановской» относительной стабильностью $\Delta f/f \approx 3 \cdot 10^{-15}$ при времени усреднения порядка 1000 с. Отсюда оценка параметра C_0 по формулам (3) имеет вид $C_0 = \sigma_A^2(T_0)/T_0 \approx 10^{-12}$ Гц^3. Для стандартных отклонений параметров a_1, a_2 по (9), (17b) соответственно получаем $3.6 \cdot 10^{-8}$ Гц^2 и $3.3 \cdot 10^{-11}$ Гц^3. Отсюда ошибка восстановления эволюции частоты посылки составит по абсолютной величине $3 \cdot 10^{-5}$ Гц. Величина гравитационного сдвига частоты на орбите КА РадиоАстрон в среднем $(5 \div 6)$ Гц, т. е. прогнозируемая точность измерения эффекта красного смещения должна составить $\sim 10^{-6}$ даже в однократном измерении. Ошибка, вносимая флуктуационной частью фликкерного шума $\sqrt{\langle \delta\xi^2 \rangle} \approx \sqrt{C_0 T_0}$ также оказывается того же порядка. Таким образом, наш пример в частном случае фликкера типа «случайных блужданий» иллюстрирует возможность достаточно качественного выполнения оценочно-компенсационной фильтрации по указанному алгоритму для достижения повышенной (до двух порядков) точности измерения гравитационного сдвига частоты в экспериментах с радиотелескопом РадиоАстрон. Заметим, что переход к другому значению $\gamma < 3$ не изменяет результаты по порядку величины.

8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решена задача восстановления номинальной частоты бортового стандарта по принятому наземной станцией сигналу с учетом нестационарного фликкерного шума, присущего атомным часам данного типа. Описание такого шума проведено с помощью статистической структурной функции $d_\xi(\tau)$. Ее параметры определялись по данным, полученным при измерении дисперсии Аллана $\sigma_A^2(T_{0,1})$. Хотя структурная функция часто принимается как аналог корреляционной функции, такой подход оказывается не вполне корректным. Для преодоления возникающих осложнений в данной работе случайный процесс $\xi(t)$ рассматривался не как гауссов, а только как условно гауссов случайный процесс. При этом удается полностью сохранить «тонкую структуру» фликкерного шума и ее зависимость от начального состояния. Найдена корреляционная матрица фликкерного шума $\mathbf{K}_\xi$ как условно гауссова процесса, уже свободная от начального состояния. Ее элементы определены с помощью статистической структурной функции.

В результате в работе сформулирован алгоритм оптимальной фильтрации. На частном примере показана ее эффективность, позволяющая рассчитывать на увеличение точности до двух порядков при регистрации относительного гравитационного сдвига частоты бортовых часов, расположенных на спутнике РадиоАстрон. Это верно, однако, по отношению к стохастической части фликкерной помехи. Присутствие неконтролируемого квазистатического сдвига номинальной частоты приводит к систематической ошибке измерения, порождаемой негравитационными отклонениями $\xi_0 = \xi(0)$ и a_0. В рамках аксиоматики, представленной в разд. 1, 2, преодолеть это затруднение невозможно. Необходимо изменение методики эксперимента, в частности, путем перехода к измерению орбитальных вариаций гравитационного сдвига вместо его средней абсолютной величины.

Замечательно, что потребность в такой модификации диктуется не только особенностями статистических свойств фликкерной помехи, но также технической спецификой, изначально заложенной в схеме экспериментов с космическим радиотелескопом РадиоАстрон. Действительно, тождественность номинальных значений частот наземного и бортового стандартов изначально не гарантируется с идеальной точностью. Метрологическая погрешность или «погрешность воспроизводимости» номинальной частоты, в принципе, для водородных стандартов лежит в интервале 10^{-13}–10^{-14}, чего можно добиться предусмотренными регулировками частоты задающего резонатора. На практике сдвиг номинальных частот для разных образцов может достигать 10^{-11}. В частности, по результатам мониторинга 2015–2016 гг. для бортового стандарта КА РадиоАстрон и наземного стандарта на станции слежения Пущино (филиал АКЦ ФИАН) сдвиг составляет порядка 10^{-11}. Зная этот сдвиг на стадии предварительных наземных измерений, его можно было бы вычесть из полного сдвига, измеряемого в процессе эксперимента по определению красного смещения. К сожалению, он не постоянен, а медленно дрейфует под действием фликкерного шума. Фактически, он суммируется со смещениями $\xi_0 = \xi(0)$ и a_0 и участвует в формировании систематической ошибки измерения гравитационного сдвига частоты.

Радикальным решением этой проблемы является переход от измерения абсолютной величины сдвига к измерению его переменной составляющей, которая обусловлена движением КА по сильно вытянутой эллиптической орбите. Для орбиты с наименьшим перигеем в одну тысячу км и апогеем в 350 тыс. км коэффициент модуляции гравитационного сдвига составляет 0.6 при его средней относительной величине $6\cdot10^{-10}$. Выделяя в процессе измерений (минимум 3 точки на одной орбите) гармонику на частоте обращения спутника (период 8 дней), можно легко отфильтровать постоянные и медленно меняющиеся (негравитационные) компоненты сдвига, выделяя эффект гравитационного красного смещения в чистом виде.

В заключение напомним, что доминирующими помехами при измерении гравитационного сдвига являются доплеровский сдвиг несущей частоты, сдвиги, порождаемые ионосферными и тропосферными флуктуациями. Однако для борьбы с ними существует техническое решение при их онлайн компенсации за счет разности одно- и двухпутевых данных (однопутевые содержат перечисленные помехи в сумме с гравитационным сдвигом, в то время как двухпутевые — только удвоенную помеху), см. детали в [6, 11]. Полученные после такой процедуры данные будут страдать только от фликкерного шума. Соответствующие рецепты фильтрации были найдены в данной работе.

Авторы выражают благодарность группе сопровождения миссии РадиоАстрон в АКЦ ФИАН за постоянный интерес к работе и обсуждение результатов. Особо выделяем внимание со стороны руководителей проекта Н. С. Кардашева, Ю. Ю. Ковалева и М. В. Попова. Работа поддержана Программой перспективного развития МГУ им. М. В. Ломоносова и частично РФФИ (гранты №№ 14-02-00567, 14-22-03036).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $\zeta_{1,2}$ — гауссовы случайные величины с параметрами $M_1\{\zeta_{1,2}\} = m_{1,2}$, $M_2\{\zeta_{1,2}\} = \sigma^2_{1,2}$ и коэффициентом взаимной корреляции ρ. Тогда можно показать, что условное среднее значение $M_1\{\zeta_2|\zeta_1\}$ случайной величины ζ_2 определяется следующим выражением:

$$M_1\{\zeta_2|\zeta_1\} = m_2 + \rho(\zeta_1 - m_1)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \tag{A.1}$$

Условная дисперсия $M_2\{\zeta_2|\zeta_1\}$ случайной величины ζ_2 не зависит от того, какое значение приобретает случайная величина ζ_1:

$$M_2\{\zeta_2|\zeta_1\} = \sigma_2^2(1-\rho^2). \tag{A.2}$$

В частном случае, при

$$m_1 = m_2 = 0, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

из (A.1) и (A.2) находим

$$M_1\{\zeta_2|\zeta_1\} = \rho\xi_1, \quad M_2\{\zeta_2|\zeta_1\} = \sigma^2(1-\rho^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. **116**, 241103 (2016).

2. В. Б. Брагинский, В. Н. Руденко, УФН **100**, 395 (1970).

3. В. Н. Руденко, УФН **126**, 361 (1978).

4. C. Lammerzahl and Y. Dittus, in the book *Lasers, Clocks and Drag-Free Control*, Springer-Verlag, Berlin (2008), p. 3.

5. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер, *Гравитация*, т. 3, Мир, Москва (1977), с. 297.

6. R. F. C. Vessot, M. W. Levine, E. M. Mattison et al., Phys. Rev. Let. **45**, 2081 (1980).

7. R. F. C. Vessot and M. W. Levine, Gen. Rel. Grav. **10**, 181 (1979).

8. M. P. Hess, L. Strinhetti, B. Hummelsberger et al., Acta Astronautica **69**, 929 (2011).

9. STE-QUEST Assessment Study Report, http://sci.esa.int/ste-quest/53445-ste-quest-yellow-book.

10. Н. С. Кардашев, В. В. Хартов, В. В. Абрамов и др., Астрон. ж. **90**, 179 (2013).

11. А. В. Бирюков, В. Л. Кауц, В. В. Кулагин, Д. А. Литвинов, В. Н. Руденко, Астрон. ж. **91**, 887 (2014).

12. D. Duev, G. Molera, S. V. Pogrebenko et al., Astron. Astrophys. **541**, A43 (2012).

13. Г. Ван Трис, *Теория обнаружения, оценок и модуляции*, т. 1, Сов. радио, Москва (1977).

14. А. Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*, Наука, Москва (1968).

15. D. W. Allan, IEEE **54**(2), 221 (1966).

16. Б. Р. Левин, *Теоретические основы статистической радиотехники*, Радио и связь, Москва (1989).

17. Proc. IEEE, Special Issue on Time and Frequency **79**, July (1991).

18. И. Н. Амиантов, *Избранные вопросы статистической теории связи*, Сов. радио, Москва (1971).

19. A. Utkin, A. Belyaev, and Y. Pavlenko, in *6th Int. Symp. "Metrology of Time and Space"* Mendeleevo, Russia (2012), http://www.vremya-ch.com/russian/materials/files/utkin.pdf.