ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 5 (11), стр. 929–936

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ПОЛЕ МНОГОМЕРНОГО ГЛОБАЛЬНОГО МОНОПОЛЯ

Ю. В. Грац*[*], *П. А. Спирин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 мая 2016 г.

Получено приближенное выражение для евклидовой функции Грина безмассового скалярного поля в пространстве-времени многомерного глобального монополя. Методом размерной регуляризации получены выражения для вакуумных средних $\langle\phi^2\rangle_{ren}$ и $\langle T_{00}\rangle_{ren}$. Проводится сравнение с результатами, полученными с использованием альтернативных методов регуляризации.

DOI: 10.7868/S0044451016110092

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы многомерные обобщения известных решений эйнштейновской теории гравитации стали объектом интенсивного исследования в связи с активно разрабатываемыми теориями в пространстве-времени с размерностью больше четырех. И хотя факт существования дополнительных измерений к настоящему моменту экспериментально не подтвержден (о результатах последних экспериментов см. [1]), современные теории стимулировали исследование общей теории относительности в пространстве-времени с размерностью $d > 4$. Одной из целей такого исследования является выяснение, какие из предсказаний теории характерны только для четырехмерного случая, а какие являются универсальными и распространяются на высшие измерения.

Предлагаемая работа посвящена рассмотрению эффекта поляризации вакуума в пространстве-времени, которое является многомерным обобщением решения четырехмерной теории, известного как пространство-время точечного глобального монополя.

Глобальный монополь — это один из типов топологических дефектов, который, образовавшись при фазовых переходах в ранней вселенной, мог «дожить» до настоящего времени [2, 3].

Пространство-время точечного монополя представляет собой ультрастатическое пространство, метрика которого, как правило, записывается в виде

$$ds^2 = -dt^2 + d\varrho^2 + \beta^2\varrho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\,, \qquad (1)$$

где $0 < \beta < 1$. Эта метрика соответствует сферически-симметричному пространству с дефицитом телесного угла, равным $\delta\Omega = 4\pi(1-\beta^2)$. Любая поверхность, проходящая через начало координат и делящая пространство-время (1) на две симметричные части, представляет собой конус с угловым дефицитом $\Delta = 2\pi(1-\beta)$. Это делает метрику монополя похожей на метрику калибровочной космической струны. Существенным отличием является то, что пространство (1) не является локально плоским, в отличие от пространства-времени струны.

Простейшей моделью, которая предсказывает существование глобальных монополей, является триплет скалярных полей с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^a)(\partial^\mu\phi^a) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^a\phi^a - \eta^2\right)^2, \quad a = \overline{1,3},$$

чья глобальная симметрия $O(3)$ спонтанно нарушается до $U(1)$.

Строго говоря, метрика самосогласованного сферически-симметричного решения уравнений Эйнштейна и уравнений движения скалярного триплета содержит массовый член [4, 5]. Однако, как было показано, массовый член слишком мал, чтобы играть заметную роль в явлениях астрофизических масштабов, и им пренебрегают, записывая метрику в форме (1). При этом гравитационное поле монопо-

[*] E-mail: grats@phys.msu.ru

ля целиком определяется дефицитом телесного угла, а параметр β оказывается связанным с энергетическим масштабом фазового перехода η соотношением

$$\eta^2 = \frac{1-\beta^2}{8\pi G}, \tag{2}$$

и он предполагается крайне малым (при $\eta = \eta_{GUT} \sim \sim 10^{16}$ ГэВ величина $\delta\Omega \sim 10^{-5}$).

Для дальнейшего нам будет удобно представить метрику (1) в несколько ином виде.

Заметим, что замена радиальной координаты $\varrho \to r$ согласно

$$\beta\varrho = r_0(r/r_0)^\beta,$$

где r_0 — произвольный масштаб с размерностью длины, позволяет привести метрику на сечении $t = = \text{const}$ рассматриваемого пространства-времени к явно конформно евклидову виду:

$$\begin{gathered} ds^2 = -dt^2 + e^{-2(1-\beta)\ln(r/r_0)}\delta_{ik}dx^i dx^k, \\ r^2 = \delta_{ik}x^i x^k, \quad i,k = \overline{1,3}, \end{gathered} \tag{3}$$

с обычной связью между декартовыми координатами x^i и сферическими координатами r, θ, φ.

Идея использовать конформно евклидовы координаты на пространствах с коническими особенностями была предложена в рамках $(2+1)$-мерной теории гравитации достаточно давно [6]. Это позволило получить самосогласованное решение для метрики трехмерного пространства-времени N точечных масс. Позже это решение было обобщено на случай четырехмерного пространства N параллельных космических струн [7]. Та же идея позволила получить точное выражение для собственной энергии и силы самодействия точечного электрического мультиполя в $(2+1)$-теории [8], а также исследовать эффекты классического самодействия [9] и поляризации вакуума [10] в системе параллельных космических струн.

Ниже мы рассмотрим многомерное обобщение пространства (3), метрика которого имеет вид

$$\begin{gathered} ds^2 = -dt^2 + \sum_{N=n+1}^{d-1} dx_N^2 + e^{-2(1-\beta)\ln r}\delta_{ik}dx^i dx^k, \\ r^2 = \delta_{ik}x^i x^k, \quad i,k = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{4}$$

Это пространство представляет собой прямое произведение $(d-n)$-мерного пространства Минковского и n-мерного сферически-симметричного пространства с дефицитом телесного угла

$$\delta\Omega = 2\pi^{n/2}(1-\beta^2)/\Gamma(n/2)\,.$$

Ненулевые компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна этого пространства в выбранных координатах имеют вид

$$\begin{gathered} R_{ik} = (1-\beta^2)(n-2)\frac{r^2\,\delta_{ik} - x_i\,x_k}{r^4}, \\ R = (1-\beta^2)\frac{(n-1)(n-2)}{r^{2\beta}}\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Будем называть пространство (4) пространством типа (d,n). В этих обозначениях пространство-время четырехмерного глобального монополя — это пространство типа $(4,3)$. Многомерным обобщением пространства точечного монополя является пространство $(d, d-1)$ при $d > 4$. При этом пространства типа $(d,3)$ при $d > 4$ было предложено рассматривать в качестве простой модели пространства-времени четырехмерного глобального монополя с $d-4$ дополнительными плоскими измерениями [11, 12].

Отметим, что случай пространства (4) — это один из немногих случаев, когда локальная геометрия и геометрия в целом достаточно просты. При этом, метрика не содержит каких-либо размерных параметров, что облегчает получение качественных оценок. Тем не менее, получить точное и достаточно простое выражение для функции Грина не удается даже в случае безмассового скалярного поля. Поэтому исследовать эффекты поляризации вакуума в поле многомерного монополя удалось только в небольшом числе частных случаев.

В работе получено приближенное выражение для евклидовой функции Грина безмассового скалярного поля, а также для вакуумных средних $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ и $\langle T_{00}(x)\rangle_{ren}$, которые справедливы при произвольных значениях d, n и произвольном значении константы связи ξ скалярного поля с гравитационным.

Всюду ниже используется система единиц $G = = \hbar = c = 1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(-\,+\,+\ldots+)$. Тензоры Римана и Риччи определены как $R^M{}_{NLP} = \partial_L \Gamma^M_{NP} - \ldots$, $R_{MN} = = R^L{}_{MLN}$.

2. ЕВКЛИДОВА ФУНКЦИЯ ГРИНА: ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим евклидов вариант метрики (4):

$$\begin{gathered} ds_E^2 = g_{MN}dx^M dx^N = dx_d^2 + \ldots + dx_{n+1}^2 + \\ + e^{-2(1-\beta)\ln r}\delta_{ik}dx^i dx^k\,, \quad x_d = it\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь и далее прописные латинские индексы M, $N, \ldots = \overline{1,d}$, Как уже было сказано, в случае пространства-времени (6) точный вид функции Грина, который позволял бы работать с ней дальше, в общем случае не известен. Частные результаты, полученные в случае пространств типа $(4,3)$, $(5,4)$, $(6,5)$ и $(6,3)$ [11–13], крайне громоздки, что заставило авторов ограничиться низшим приближением по $\eta^2 \sim 1-\beta$.

Мы также будем предполагать этот параметр малым, что позволяет при нахождении функции Грина воспользоваться методами теории возмущений.

Евклидова функция Грина безмассового скалярного поля с неминимальной связью является решением уравнения

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(x,\partial)\, G^E(x,x'|d,n) = -\delta^d(x-x')\,, \\ \mathcal{L}(x,\partial) = \sqrt{g}\, \left(g^{MN}\nabla_M\nabla_N - \xi R\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Уравнение (7), следуя Швингеру [14], записывают в виде операторного соотношения:

$$\mathfrak{L}\mathcal{G} = -1\,, \quad \mathcal{G} = -\mathfrak{L}^{-1}\,. \tag{8}$$

Если оператор $\mathfrak{L}$ можно представить как $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \delta\mathfrak{L}$, рассматривая $\delta\mathfrak{L}$ в качестве малого возмущения, то, записывая решение уравнения (8) в виде $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \delta\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}_0 = -\mathfrak{L}_0{}^{-1}$ — невозмущенная функция Грина, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left[-\mathfrak{L}_0\left(1-\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\right)\right]^{-1} = \\ &= \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0 + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

В рассматриваемом случае $\mathfrak{L}_0$ определяется нулевым порядком по $1-\beta$:

$$\mathcal{L}_0(x,\partial) = \partial^2, \quad \partial^2 = \delta^{MN}\partial_M\partial_N\,.$$

При этом оператор возмущения,

$$\delta\mathcal{L}(x,\partial) = \partial_M\left(\sqrt{g}\; g^{MN}\partial_N\right) - \sqrt{g}\,\xi R - \partial^2,$$

в первом порядке по $1-\beta$ можно записать как

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(x,\partial) &= -n\,\alpha(r)\sum_{N=n+1}^{d}\partial_N^2 - \xi\gamma(r) - \\ &- (n-2)\sum_{i=1}^{n}\Big[\alpha(r)\,\partial_i^2 + \big(\partial_i\alpha(r)\big)\,\partial_i\Big], \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\alpha(r) = (1-\beta)\ln r, \quad \gamma(r) = 2(1-\beta)\frac{(n-1)(n-2)}{r^2}.$$

Далее, в базисе Фурье функция $\langle x|\mathcal{G}_0|x'\rangle \equiv \langle x|\partial^{-2}|x'\rangle$ имеет вид[1)]

$$G_0^E(x-x'|d,n) = \langle x|\partial^{-2}|x'\rangle = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{ip\,(x-x')}}{p^2}\,.$$

[1)] Здесь и ниже преобразование Фурье определено соотношением

$$\mathcal{F}[\varphi(x)](q) = \int d^dx\,\varphi(x)\,e^{-iqx}.$$

При этом для первой поправки к функции Грина (второго члена в правой части (9)) получаем выражение

$$\begin{aligned} G_1^E(x,x'|d,n) &= \langle x|\mathcal{G}_0\,\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0|x'\rangle = \\ &= \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,e^{iqx}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,e^{ip(x-x')}\,\frac{\delta\mathcal{L}(q,ip)}{p^2\,(p+q)^2}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

где функция $\delta\mathcal{L}^{(1)}(q,ip)$ определена следующим образом:

$$\delta\mathcal{L}(q,ip) = \int d^dx\,e^{-iqx}\Big[\delta\mathcal{L}(x,\partial)|_{\partial\to ip}\Big]\,.$$

В нашем случае оператор возмущения имеет вид (10) и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(q,ip) = \Big[np^2 - 2\mathbf{p}^2 + (n-2)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})\Big]\mathcal{F}[\alpha](q) - \\ - \xi\mathcal{F}[\gamma](q), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ и $\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n)$ — n-мерные векторы с евклидовым правилом скалярного умножения.

Подстановка (12) в (11) дает

$$\begin{aligned} G^E(x,x'|d,n) = \int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,e^{iqx}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2(p+q)^2}\times \\ \times\Big\{\big[np^2 - 2\,\mathbf{p}^2 + (n-2)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})\big]\,\mathcal{F}[\alpha](q) - \xi\mathcal{F}[\gamma](q)\Big\}. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись хорошо определенными в смысле обобщенных функций интегралами [15]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\ln r](q) &= -\frac{(2\pi)^d}{2\pi^{n/2}}\,\frac{\Gamma[n/2]}{(\mathbf{q}^2)^{n/2}}\prod_{N=n+1}^{d}\delta(q^N)\,, \\ \mathcal{F}\big[r^{-\lambda}\big](q) &= \frac{(2\pi)^d}{2^\lambda\,\pi^{n/2}}\,\frac{\Gamma\left[(n-\lambda)/2\right]}{\Gamma\left[\lambda/2\right]}\times \\ &\times\frac{1}{|\mathbf{q}|^{n-\lambda}}\prod_{N=n+1}^{d}\delta(q^N), \end{aligned} \tag{13}$$

получаем, что в первом порядке теории возмущений

$$\begin{aligned} G^E(x-x'|d,n) = G_0^E(x-x'|d,n) + \\ + (1-\beta)\frac{\Gamma[n/2]}{2\pi^{n/2}}\int d^nq\,\frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{(\mathbf{q}^2)^{n/2}}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2(p+q)^2}\times \\ \times\Big[2\mathbf{p}^2 - (n-2)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}) - 2\,\xi(n-1)\,\mathbf{q}^2 - np^2\Big], \end{aligned} \tag{14}$$

где теперь $q = (\mathbf{q},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{d-n})$.

Все интересующие нас величины выражаются через взятые в пределе совпадающих точек функцию $G^E(x,x'|d,n)$ и ее производные.

Соответствующие выражения расходятся, и для их регуляризации мы воспользуемся методом размерной регуляризации.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВАКУУМНЫХ СРЕДНИХ $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ И $\langle T_{00}\rangle_{ren}$

Начнем с вычисления вакуумного среднего $\langle\varphi^2(x)\rangle$.

Формально $\langle\varphi^2(x)\rangle$ определяется взятой в пределе совпадающих точек функцией Грина (фейнмановской или евклидовой):

$$\langle\varphi^2(x)\rangle = -i\,G^F(x,x|d,n) = G^E(x,x|d,n).$$

Прежде всего отметим, что вклады от G_0^E и ее производных в пределе совпадающих точек представляются интегралами вида

$$\int d^dp\,\frac{p_{i_1}\,\ldots\,p_{i_k}}{p^2}\,. \tag{15}$$

В рамках метода размерной регуляризации такие интегралы полагаются равными нулю (см., например, [16]).

Следовательно, для первого ненулевого вклада во взятую в пределе совпадающих точек функцию Грина из (14) имеем

$$G^E(x,x|d,n) = (1-\beta)\,\frac{\Gamma[n/2]}{2\,\pi^{n/2}}\int d^nq\,\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{(\mathbf{q}^2)^{n/2}}\times \\ \times\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{2\mathbf{p}^2-(n-2)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})-2\xi(n-1)\mathbf{q}^2}{p^2(p+q)^2}. \tag{16}$$

Стоящий в (16) интеграл по d^dp расходится. В рамках метода размерной регуляризации его следует заменить на выражение, которое формально соответствует интегрированию по D-мерному импульсному пространству ($D = d-2\varepsilon$). Последующая перенормировка включает разделение G^E_{reg} на две части, одна из которых (G^E_{div}) расходится при $\varepsilon\to 0$, а другая (G^E_{fin}) конечна, и завершается отбрасыванием расходящейся части G^E_{div} с последующим переходом к пределу $\varepsilon\to 0$. Однако, как было отмечено Хокингом [17], в случае искривленного пространства-времени этой процедуре присуща определенная неоднозначность, поскольку в общем случае искривленного пространства возможны различные варианты аналитического продолжения по размерности. Предложенный в работе [17] способ, который согласуется с результатом, полученным методом обобщенной ζ-функции, заключается в построении прямого произведения рассматриваемого d-мерного пространства-времени и плоского пространства с $D-d$ измерениями с последующим продолжением по дополнительным плоским измерениям.

Пространство (4) изначально имеет такую структуру. Поэтому, в соответствии с данным в [17] предписанием, перенормированное значение функции Грина в пределе совпадающих точек будет определяться как предел

$$G^E_{ren}(x,x|d,n) = \lim_{\varepsilon\to 0}\big[G^E_{reg}(x,x|D,n) - \\ - G^E_{div}(x,x|D,n)\big]\,,\quad D = d-2\varepsilon,$$

при фиксированном n.

Полученный в результате замены

$$\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\ldots\to\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\ldots \tag{17}$$

в выражении (16) интеграл имеет стандартный вид[2)]. Техника вычисления таких интегралов хорошо известна, и многие из них можно найти в имеющейся литературе (см., например, [18]).

Имеем

$$\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{2\mathbf{p}^2-(n-2)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})-2\xi(n-1)\mathbf{q}^2}{p^2(p+q)^2} = \\ = \left(1-\frac{\xi}{\xi_D}\right)\frac{2(n-1)}{(4\pi)^{D/2}}\,\frac{\Gamma^2[D/2]}{\Gamma[D]}\,\frac{\Gamma[2-D/2]}{(\mathbf{q}^2)^{1-D/2}}\,, \tag{18}$$

где введено обозначение

$$\xi_D = \frac{D-2}{4(D-1)}\,.$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ ($D = d$) величина ξ_D совпадает со значением константы связи ξ, при котором уравнение скалярного поля конформно инвариантно.

При четном d выражение (18) имеет простой полюс в точке $\varepsilon = 0$, и при снятии регуляризации расходимость в $G^E_{reg}(x,x|D,n)$ может возникнуть из-за этого полюса, из-за интеграла по d^nq или по той и другой причине одновременно.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Подставляя (18) в (16) и воспользовавшись интегралом

2) Имеющий размерность массы параметр μ вводится для сохранения общей размерности регуляризуемого выражения.

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}}{|\mathbf{q}|^\lambda} = \frac{\Gamma[(n-\lambda)/2]}{2^\lambda \pi^{n/2} \Gamma[\lambda/2]} \frac{1}{r^{n-\lambda}},$$

получаем, что при всех $3 \leqslant n \leqslant d-1$ для регуляризованного значения вакуумного среднего $\langle\phi^2(x)\rangle$ имеет место равенство

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{reg} = G^E_{reg}(x,x|D,n) = \\ = -\mu^{2\varepsilon} \frac{1-\beta}{2\pi^{D/2}} \frac{n-1}{D-n} \frac{\Gamma[n/2]\,\Gamma^3[D/2]}{\Gamma[D]} \times \\ \times \left(\frac{\xi}{\xi_D} - 1\right) \frac{\Gamma[1-D/2]}{\Gamma\big[-(D-n)/2\big]} \frac{1}{r^{D-2}}. \quad (19)$$

Перейдем к получению регуляризованного выражения для тензора энергии-импульса.

Регуляризованное вакуумное среднее значение оператора тензора энергии-импульса находится по формуле

$$\langle T^N_M(x)\rangle_{reg} = -i \lim_{x'\to x} D^{N'}_M(x|x') G^F_{reg}(x,x'),$$

где $D^{N'}_M(x|x')$ — дифференциальный оператор, вид которого определяется видом тензора энергии-импульса (см., например, [19]). Для безмассового скалярного поля с произвольной связью

$$D^{N'}_M(x|x') = (1-2\xi)\nabla_M\nabla^{N'} + \frac{1}{2}(4\xi-1)\nabla_L\nabla^{L'}\delta^N_M + \\ + \xi\left[R^N_M - \frac{1}{2}R\,\delta^N_M + 2\nabla_L\nabla^L\delta^N_M - 2\nabla_M\nabla^N\right].$$

Дальнейшие вычисления повторяют проведенные выше. Ограничимся вычислением вакуумной плотности энергии.

Используя явный вид оператора $D^{N'}_M$, выражение (14) и известную связь между фейнмановским пропагатором и евклидовой функцией Грина, получаем

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{reg} = -\mu^{2\varepsilon}(1-\beta)\frac{(n-1)\,\Gamma[n/2]\Gamma^3[D/2]}{4\pi^{D/2}\,\Gamma[D]} \times \\ \times \frac{1}{r^D} \frac{\Gamma[1-D/2]}{\Gamma[-(D-n)/2]} \times \\ \times \left[\frac{1}{D^2-1} - 8(D-1)(\xi-\xi_D)^2\right]. \quad (20)$$

Сравнение регуляризованных значений вакуумных средних $\langle\phi^2(x)\rangle_{reg}$ (19) и $\langle T_{00}(x)\rangle_{reg}$ (20) показывает, что при снятии регуляризации ($\varepsilon\to 0$) поведение и той, и другой величины целиком определяется множителем

$$\frac{\Gamma[1-D/2]}{\Gamma[-(D-n)/2]} \quad (21)$$

и, следовательно, существенно зависит от четности числа измерений всего d-мерного пространства-времени и его n-мерного подпространства.

Рассмотрим возможные варианты.

• ***d* четно, *n* нечетно.** В этом случае $(d-n)/2$ является полуцелым числом, и гамма-функция $\Gamma[-(d-n)/2]$ принимает конечное и неравное нулю значение. При этом стоящая в числителе (21) функция $\Gamma[1-D/2]$ имеет простой полюс в точке $\varepsilon=0$, и при снятии регуляризации выделение расходящейся части может быть выполнено с помощью лорановского разложения

$$\Gamma[-m+2\varepsilon] = \frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - \gamma + H_m + \mathcal{O}(\varepsilon)\right),$$

где γ — постоянная Эйлера, а $H_m = \sum_{k=1}^m k^{-1}$ — m-е гармоническое число.

Мы получаем, что

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{div} = G^E_{div}(x,x|d,n) = \frac{(-1)^{d/2}}{\varepsilon} \frac{1-\beta}{2\pi^{d/2}} \times \\ \times \frac{n-1}{d-n} \frac{\Gamma[n/2]\,\Gamma^2[d/2]}{\Gamma[d]\,\Gamma\big[-(d-n)/2\big]} \left(\frac{\xi}{\xi_d} - 1\right) \frac{1}{r^{d-2}}.$$

Обращает на себя внимание тот факт, что в случае конформной связи $\langle\phi^2(x)\rangle_{div}$ обращается в нуль.

Выделение конечной части регуляризованного выражения (19) осуществляется с помощью разложения

$$\frac{f(D)\,\mu^{2\varepsilon}}{r^{D-2}} = \frac{f(d)}{r^{d-2}}\left[1 + 2\varepsilon\left(\ln\mu r - \frac{f'(d)}{f(d)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)^2\right],$$

где

$$f(z) = \frac{\Gamma^3[z/2]}{\pi^{z/2}\Gamma[z]\,\Gamma\big[1-(z-n)/2\big]},$$

что приводит к окончательному ответу:

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = (-1)^{(n-1)/2}(1-\beta) \times \\ \times \frac{\Gamma[n/2]\,\Gamma\big[(d-n)/2\big]}{2(n-1)^{-1}\pi^{d/2+1}} \frac{\Gamma^2[d/2]}{\Gamma[d]} \times \\ \times \left[\left(\frac{\xi}{\xi_d} - 1\right)\ln\mu' r + \frac{1}{(d-1)(d-2)}\right] \frac{1}{r^{d-2}}. \quad (22)$$

Здесь константа μ' является перенормированным значением введенной в процессе регуляризации константы μ:

$$\mu' = \mu\exp\left(-\frac{f'(d)}{f(d)} + \frac{H_{d/2-1}-\gamma}{2} + \frac{1}{(d-1)(d-2)}\right).$$

Отметим, что при конформной связи логарифмический член и связанная с наличием в нем произвольной константы μ' неопределенность в $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ пропадают.

Отдельно рассмотрим случай многомерного монополя, когда $n = d - 1$. При этом из (22) имеем

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = (-1)^{d/2-1}\frac{(1-\beta)\,(d-2)\,\Gamma[d/2]}{2^{d-1}\pi^{d/2}(d-1)}\times \\ \times\left[\left(\frac{\xi}{\xi_d}-1\right)\ln\mu' r + \frac{1}{(d-1)(d-2)}\right]\frac{1}{r^{d-2}}\,. \quad (23)$$

В частности, для пространств типа $(4, 3)$ и $(6, 5)$

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = -\frac{1-\beta}{12\pi^2 r^2}\left[\Big(6\xi-1\Big)\ln\mu' r+\frac{1}{6}\right], \quad d=4;$$

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = \frac{1-\beta}{20\pi^3 r^4}\left[\Big(5\xi-1\Big)\ln\mu' r+\frac{1}{20}\right], \quad d=6,$$

что с принятой точностью совпадает с результатами работ соответственно [13] и [11].

Снятие регуляризации в выражении (20) осуществляется в полной аналогии с предыдущим изложением. Мы получаем, что расходящаяся часть вакуумного среднего $\langle T_{00}(x)\rangle_{reg}$ имеет вид

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{div} = (-1)^{d/2}\frac{1-\beta}{\varepsilon}\,\frac{(n-1)\Gamma^2[d/2]}{\pi^{d/2}\Gamma\left[-(d-n)/2\right]}\times \\ \times\,\frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[d]}\,\left(\frac{1}{4(d^2-1)}-2(d-1)(\xi-\xi_d)^2\right)\frac{1}{r^d}\,.$$

При этом для перенормированной вакуумной плотности энергии получаем выражение

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{ren} = (1-\beta)\frac{(n-1)\,\Gamma[n/2]\,\Gamma^2[d/2]}{2(-\pi)^{d/2}\,\Gamma[d]\,\Gamma\left[-(d-n)/2\right]}\times \\ \times\,\frac{1}{r^d}\left[\left(-8(d-1)(\xi-\xi_d)^2+\frac{1}{d^2-1}\right)\ln\mu' r+A\right], \quad (24)$$

где $A = -4(\xi-\xi_d)/(d-1) + (3d+1)/(d^2-1)^2$.

Мы видим, что при

$$\xi = \xi_d \pm \frac{1}{d-1}\sqrt{\frac{1}{8(d+1)}}$$

$\langle T_{00}(x)\rangle_{ren}$ не содержит логарифмического члена и не зависит от произвольной постоянной μ', а расходящаяся часть $\langle T_{00}(x)\rangle_{div} = 0$.

В случае пространства типа $(d, d-1)$ формула (24) приводится к виду

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{ren} = (-1)^{d/2+1}(1-\beta)\frac{(d-2)\,\Gamma[d/2]}{2^d\pi^{d/2}\,(d-1)}\,\frac{1}{r^d}\times \\ \times\left[\left(\frac{1}{d^2-1}-8(d-1)(\xi-\xi_d)^2\right)\ln\mu' r+A\right],$$

и в наиболее важном частном случае пространства типа $(4, 3)$ имеем

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{ren} = \frac{1-\beta}{4\pi^2}\left[\left(4\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)^2-\frac{1}{90}\right)\ln\mu' r + \\ +\,\frac{2}{9}\Big(\xi-\frac{21}{100}\Big)\right]\frac{1}{r^4}\,, \quad d=4. \quad (25)$$

Выражение (25) дает результат, в два раза превосходящий результат работы [13]. Такое различие при условии совпадения соответствующих выражений для $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ заставило нас провести вычисление $\langle T_{00}(x)\rangle_{ren}$, следуя предложенному в [13] методу. Нам удалось обнаружить допущенную авторами этой работы неточность, устранение которой привело к совпадению результатов.

• ***d* и *n* нечетны.** В этом случае при $\varepsilon \to 0$ стоящая в числителе $\Gamma\left[1-D/2\right]$ конечна, а гамма-функция $\Gamma\left[-(D-n)/2\right]$ в знаменателе (19) и (20) имеет простой полюс. Поэтому в низшем по $1-\beta$ порядке вакуумные средние $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ и $\langle T_{00}(x)\rangle_{ren}$ равны нулю.

• ***d* нечетно, *n* четно.** В этом случае обе гамма-функции — $\Gamma\left[1-D/2\right]$ в числителе и $\Gamma\left[-(D-n)/2\right]$ — конечны, $\langle\phi^2(x)\rangle_{div} = 0$, и после преобразований получаем

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = (-1)^{n/2}\frac{1-\beta}{4\pi^{d/2}}\,\frac{(n-1)\Gamma[n/2]\,\Gamma^2[d/2]}{\Gamma[d]}\times \\ \times\,\Gamma\left[\frac{d-n}{2}\right]\left(\frac{\xi}{\xi_d}-1\right)\frac{1}{r^{d-2}}\,. \quad (26)$$

Отсюда для пространства типа $(d, d-1)$ имеем

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = (-1)^{n/2}\frac{(1-\beta)(d-2)\Gamma[d/2]}{2^d\pi^{d/2-1}(d-1)\,r^{d-2}}\times \\ \times\left(\frac{\xi}{\xi_d}-1\right). \quad (27)$$

В частности, для пятимерного монополя ($d = 5$, $n = 4$) $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ приобретает вид

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = (1-\beta)\frac{3(16\,\xi-3)}{2^9\pi r^3}\,, \quad (28)$$

что совпадает с результатом работ [11, 12].

Соответствующее рассматриваемому случаю выражение для плотности энергии имеет вид

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{ren} = (-1)^{n/2}(1-\beta)\frac{(n-1)\Gamma[n/2]\Gamma^2[d/2]}{4\pi^{d/2}\,\Gamma[d]}\times \\ \times\,\Gamma\left[\frac{d-n+2}{2}\right]\left(-8(d-1)(\xi-\xi_d)^2+\frac{1}{d^2-1}\right)\frac{1}{r^d}. \quad (29)$$

• ***d* и *n* четны.** В этом случае простой полюс стоящей в числителе (21) гамма-функции $\Gamma\left[1-D/2\right]$ компенсируется простым полюсом

$\Gamma[-(D-n)/2]$ в знаменателе. Выражение (21) при $\varepsilon = 0$ равно отношению соответствующих вычетов. При этом, как и в предыдущем случае, $\langle\phi^2(x)\rangle_{div} = 0$, а перенормированное вакуумное среднее равно

$$\langle\phi^2(x)\rangle_{ren} = (-1)^{n/2}(1-\beta)\frac{(n-1)\Gamma[(d-n)/2]}{4\pi^{d/2}} \times \\ \times \frac{\Gamma^2[d/2]\,\Gamma[n/2]}{\Gamma[d]}\left(\frac{\xi}{\xi_d}-1\right)\frac{1}{r^{d-2}}, \quad (30)$$

и при конформной связи в низшем по $1-\beta$ приближении $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ обращается в нуль.

С той же точностью вакуумное среднее плотности энергии приводится к виду

$$\langle T_{00}(x)\rangle_{ren} = (-1)^{n/2}(1-\beta)\frac{(n-1)\Gamma[n/2]\Gamma^2[d/2]}{4\pi^{d/2}\,\Gamma(d)} \times \\ \times \Gamma\left[\frac{d-n+2}{2}\right]\left(-8(d-1)(\xi-\xi_d)^2+\frac{1}{d^2-1}\right)\frac{1}{r^d}. \quad (31)$$

Сравнение формулы (26) с (30) и (29) с (31) соответственно показывает, что в рассматриваемом приближении случаи с четным числом измерений конического n-мерного подпространства объединяются в один; в то время как при нечетном n ответ существенно зависит от четности числа измерений всего d-мерного пространства.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены эффекты поляризации вакуума безмассового скалярного поля в многомерном пространстве-времени, которое является обобщением четырехмерного пространства-времени точечного глобального монополя.

Основным результатом работы является то, что нам удалось получить универсальные и достаточно компактные выражения для функции Грина и вакуумных средних $\langle\phi^2(x)\rangle_{ren}$ и $\langle T_{00}(x)\rangle_{ren}$, которые справедливы для произвольной размерности всего d-мерного пространства-времени и его n-мерного конического подпространства, а также произвольного значения константы связи скалярного и гравитационного полей. Это было достигнуто совместным использованием методов теории возмущений и размерной регуляризации. Показано, что поведение $\langle\phi^2(x)\rangle_{reg}$ и $\langle T_{00}(x)\rangle_{reg}$ существенно зависит от четности d и n. В частности, расходящиеся части у вакуумных средних появляются только в случае нечетного n при четном числе измерений всего пространства d. При этом, если d — нечетное число, то с принятой точностью перенормированные значения вакуумных средних равны нулю.

В то же время, если размерность конического подпространства четна, то случаи четного и нечетного d объединяются в один.

Использование теории возмущений ограничивает область применимости полученных результатов требованием малости характеризующего пространство дефицита телесного угла. Однако предложенный подход относительно прост, позволяет воспользоваться хорошо разработанными в квантовой теории поля аналитическими методами и получить результат, который справедлив при произвольных $3 \leqslant n \leqslant d-1$ и $d \geqslant 4$.

В заключение отметим, что пространства, метрика которых в выбранных нами координатах имеет вид (3) при $n = 2$, в работах [20] было предложено рассматривать как многомерное обобщение пространства-времени прямолинейной космической струны. Были исследованы эффекты поляризации вакуума и классического самодействия для некоторых отдельных значений размерности пространства-времени d. Предложенный нами метод применим и для этого случая. Для безмассового скалярного поля с конформной связью при произвольном значении $d \geqslant 3$ это было проделано в работе [10].

Ю. В. Грац признателен проф. А. В. Борисову за обсуждение и высказанные замечания. Работа П. А. Спирина проведена в рамках гранта РФФИ 14-02-01092. П. А. Спирин выражает особую благодарность некоммерческому фонду «Династия» за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. CMS collaboration, JHEP **07**, 178 (2013).

2. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*, ed. by G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and T. Vachaspati, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).

3. A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).

4. M. Bariola and A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1989).

5. D. Harari and C. Lousto, Phys. Rev. D **42**, 2626 (1990).

6. S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, Ann. Phys. **152**, 220 (1984); J. R. Gott and M. Alpert, Gen. Rel. Grav. **16**, 243 (1984); S. Giddings, J. Abbott,

and K. Kuchnar, Gen. Rel. Grav. **16**, 751 (1984); R. Jackiw, Nucl. Phys. B **252**, 343 (1985).

7. P. C. Letelier, Class. Quant. Grav. **4**, 75 (1987).

8. Yu. V. Grats and A. Garcia, Class. Quant. Grav. **13**, 189 (1996); Ю. В. Грац, А. А. Россихин, ТМФ **123**, 150 (2000).

9. E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, and Yu. V. Grats, Class. Quant. Grav. **15**, 1915 (1998); E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, and Yu. V. Grats, Mod. Phys. Lett.A **13**, 1427 (1998).

10. Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, А. Б. Лаврентьев, ЯФ **58**, 570 (1995).

11. E. R. Bezerra de Mello, arXiv:hep-th/0609041.

12. E. R. Bezerra de Mello, J. Math. Phys. **43**, 1018 (2002).

13. F. D. Mazzitelli and C. O. Lousto, Phys. Rev. D **43**, 468 (1991).

14. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

15. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, Москва (1959).

16. J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984).

17. S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **55**, 133 (1977).

18. V. A. Smirnov, *Analytic Tools for Feynman Integrals*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 250, Springer (2012).

19. Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, Москва (1984).

20. J. Spinelly and E. R. Bezerra de Mello, JHEP **0809**, 005 (2008); J. Spinelly and E. R. Bezerra de Mello, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 1481 (2009); E. R. Bezerra de Mello, Class. Quant. Grav. **27**, 095017 (2010); E. R. Bezerra de Mello et al., Phys. Rev. D **91**, 064034 (2015).