ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 4 (10), стр. 783–792

ВЛИЯНИЕ НУЛЕВЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОПЕРЕЧНУЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ВЫРОЖДЕННОЙ ЭЛЕКТРОН-ИОННОЙ ПЛАЗМЫ

Б. А. Векленко[*]

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 февраля 2016 г.

Теоретически показано, что электромагнитный фон продольных нулевых колебаний температурно-вырожденной электрон-ионной плазмы в состоянии термодинамического равновесия резонансно искажает волновые функции ее электронов. При этом возникает характерная квантовая частота, неаналитически зависящая от постоянной Планка $\hbar$. Обусловленные нулевыми колебаниями вакуумные эффекты в плазме оказываются аномально большими. Найдены неаналитические по $\hbar$ квантовые поправки к поперечной диэлектрической проницаемости вырожденной электрон-ионной плазмы, обусловленные ее нулевыми колебаниями.

DOI: 10.7868/S004445101610014X

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сильно возрос интерес к квантовым явлениям в плазме. Этот интерес стимулируется прикладными задачами, возникающими при исследовании металлических наноструктур, квантовых ям и квантовых точек, рентгеновских лазеров на свободных электронах и т. д. [1,2]. Ниже речь пойдет об электрофизических свойствах плазмы. Здесь принято считать, что квантовые явления вызываются двумя причинами. Распределение Ферми–Дирака, — по существу, квантовое, и потому процессы, им определяемые, неминуемо связаны с постоянной Планка [3]. С другой стороны, интерес к квантовым электрофизическим явлениям определяется в плазме ролью квантовой силы Бома [4]

$$\mathbf{F} = \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}(\nabla n)^2\right),$$

где n — концентрация электронов в плазме, m — масса электрона. Пропорциональность $F \propto \hbar^2$ влечет за собой аналитическую зависимость от $\hbar$ во всех ее проявлениях. Первые результаты относительно квантовых эффектов в линейной теории холодной плазмы содержатся уже в пионерских работах [5,6]. Здесь роль квантовых явлений невелика. По мере возрастания амплитуды ленгмюровских волн, из-за нелинейных эффектов, роль указанных квантовых эффектов возрастает [7], на что впервые обращено внимание в работах [8,9].

Но есть иная физическая причина, требующая введения постоянной Планка. Необходимость введения в теорию постоянной $\hbar$ подсказывает использование для описания плазмы математического аппарата квантовой электродинамики [10]. Взаимодействие полей в этом аппарате описывают массовый и поляризационный операторы. В современной теории плазмы аналоги поляризационного оператора (в виде диэлектрической проницаемости) постоянно уточняются, в результате чего в первом приближении теории появляется ленгмюровская частота. Учет массового оператора полностью игнорируется. Мы обращаем внимание на его значение. Массовый оператор позволяет учесть в плазме электромагнитное поле, находящееся в неклассическом состоянии, можно сказать — фоковское ленгмюровское поле. Неклассические состояния квантового электромагнитного поля характеризуются нулевой амплитудой электрической напряженности, $\langle \hat{E}^\nu(\mathbf{r},t)\rangle = 0$, в то время как квантовое среднее значение квадрата электрической напряженности отлично от нуля,

[*] E-mail: veklenkoba@yandex.ru

$\langle \hat{E}^{\nu}(\mathbf{r},t)\hat{E}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle \neq 0$ [11]. Примерами такого состояния поля может служить спонтанное излучение атомов, генерируемое поперечным электромагнитным вакуумом, или черное тепловое излучение. Ленгмюровское поле является их аналогом для продольных электромагнитных колебаний.

Как известно, определяемая массовым оператором вероятность спонтанного излучения атомов обратно пропорциональна постоянной Планка. Энергия спонтанного излучения представляет собой макроскопическую классическую величину. Таких же проявлений постоянной Планка, связанных теперь не с поперечным, а с продольным легмюровским полем, следует ожидать в теории плазмы. Для вычисления массового оператора требуются квантовые характеристики электромагнитного поля. Этим объясняется необходимость вторичного квантования электромагнитного поля плазмы. Эффекты, вызываемые неклассическими состояниями ленгмюровского поля, также как и вероятность спонтанного излучения, обратно пропорциональны постоянной $\hbar$. Но величина их оказывается неожиданно большой. Последнее обстоятельство определяется слабой зависимостью частоты ленгмюровских колебаний от волнового числа на значительном интервале изменений последнего. Это уподобляет электромагнитные ленгмюровские возмущения плазмы осцилляторам с фиксированной частотой и характерными резонансными эффектами.

Закономерности такого рода продольного ленгмюровского поля изучались в работах [12–14] на примере продольной диэлектрической проницаемости. Было показано, что учет массового оператора позволяет изучать квантовую деформацию электронов плазмы под действием термически возбужденного фона ленгмюровских волн. И уже, таким образом, деформированные электроны определяют оптические свойства плазмы. Такая деформация через массовый оператор описывается математическими выражениями, обратно пропорциональными постоянной Планка. Роль подобного рода квантовой деформации электронов не мала. В максвелловской плазме она нередко приводит к 100-процентному изменению результата. В работе [15] показано, что именно учет массового оператора в холодной плазме позволил построить количественную теорию уширения энергетических потерь электронов, пересекающих плазму. В течение долгого времени это явление не поддавалось количественному анализу.

В настоящей работе мы ставим целью исследовать поведение поперечных электромагнитных волн в термически равновесной холодной, температурно-вырожденной плазме. Конкретно речь идет о следующем. Фон неклассических продольных ленгмюровских волн, как отмечено, существенно деформирует волновые функции электронов плазмы (аналог лэмбовского сдвига), превращая электроны в квазичастицы. Такое воздействие носит резонансный характер и приводит к появлению характерной квантовой частоты $\tilde{\omega}$ [14]. Обратная зависимость этой частоты от $\hbar$ исключает аналитический переход к классическому пределу. И уже эти «квазиэлектроны» формируют поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы. Таким образом, речь идет о квантовых поправках в поперечной диэлектрической проницаемости холодной плазмы, неаналитических по постоянной Планка $\hbar$. Появление в плазме фона неклассических ленгмюровских волн и резонансной частоты $\tilde{\omega}$ вызывает необходимость исследования наряду с продольной диэлектрической проницаемостью также и поведения поперечной диэлектрической проницаемости. Именно поперечная диэлектрическая проницаемость оказывается удобным инструментом для исследования электродинамических свойств плазмы путем френелевского отражения.

В холодной плазме Ферми – Дирака вопрос осложняется следующим обстоятельством [14]. С уменьшением температуры роль термически возбужденных ленгмюровских колебаний, естественно, уменьшается. Но даже при нулевой температуре остается их фон нулевых колебаний, который по аналогии с электромагнитным фоном в вакууме назовем вакуумным фоном ленгмюровских волн. Влияние такого рода электромагнитного фона на квантовую структуру электронов плазмы оказывается весьма существенным [14].

Настоящая работа ставит своей целью выяснение влияния именно вакуумного фона ленгмюровских волн на поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы. Необходимость квантования электромагнитных волн в холодной плазме Ферми – Дирака усугубляется тем, что ленгмюровские кванты поля $\hbar\Omega$ в металлах существенно превосходят энергию Ферми ε_F.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается полностью ионизованная холодная водородная плазма, состоящая из взаимодействующих между собой ионов и электронов. Движением ионов пренебрегаем, полагая их неподвижными, формирующими общий нейтральный фон плазмы. Теория подобной плазмы была сформулирована в работах [16–19] на основе обобщения уравнения Больцмана. Полученное таким образом основное уравнение плазмы получило название уравнения Власова, которое приводится во многих учебниках и учебных пособиях [20, 21]. Взаимодействие частиц в плазме предполагается кулоновским. Квантовые эффекты в потенциале взаимодействия не учитываются. Нами будет использован иной аппарат. Воспользуемся аппаратом квантовой электродинамики, разработанным специально для изучения свойств заряженных частиц.

Сопоставим полю электронов плазмы в представлении вторичного квантования и в гейзенберговском представлении полевой оператор $\check{\psi}_s(\mathbf{r},t)$, определенный в каждой точке пространства $\mathbf{r}$ в любой момент времени t. Для свободного поля электронов

$$\check{\psi}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\sigma} \exp\left(i\frac{p}{\hbar}\,r - i\frac{\varepsilon(p)}{\hbar}\,t\right)\eta_\sigma(s)\,\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma},$$

где $\eta_\sigma(s)$ — функция спина электрона,

$$\eta_+(s) = \begin{cases} 1, & s = \hbar/2, \\ 0, & s = -\hbar/2, \end{cases} \qquad \eta_-(s) = \begin{cases} 0, & s = \hbar/2, \\ 1, & s = -\hbar/2, \end{cases}$$

$\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}$ — оператор уничтожения электронного состояния $(\mathbf{p},\sigma)$, $\varepsilon(p) = p^2/2m$, V — объем квантования, m — масса электрона. Выполняются следующие антикоммутационные соотношения:

$$\left[\check{\psi}_s(x), \check{\psi}^\dagger_{s'}(x')\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \text{при} \quad t = t',$$

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}'\sigma'}\right]_+ = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'},$$

где $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}\sigma}$ — оператор рождения электронного состояния $(\mathbf{p},\sigma)$. В общем случае полевой оператор $\check{\psi}_s(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\check{\psi}_s(x)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\,\check{\mathbf{A}}(x)\right)^2\check{\psi}_s(x), \qquad \hat{p}^\nu_{\mathbf{r}} = -i\hbar\nabla^\nu_{\mathbf{r}}, \quad x = \{\mathbf{r}, t\}. \tag{1}$$

Здесь $\check{\mathbf{A}}(x)$ — оператор векторного потенциала электромагнитного поля, переносящий взаимодействие электронов плазмы. Используем калибровку с нулевым скалярным потенциалом $\check{\varphi}(x) = 0$. В рационализированной гауссовой системе единиц

$$\Box\check{A}^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial r^\nu}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\check{A}^{\nu_1}(x) = -\frac{1}{c}\,\check{j}^\nu(x), \tag{2}$$

$$\check{j}^\nu(x) = \sum_s\left[\frac{e}{2m}\,\check{\psi}^+_s(x)\hat{p}^\nu_{\mathbf{r}}\check{\psi}_s(x) + \frac{e}{2m}\left(\hat{p}^{\nu^*}_{\mathbf{r}}\,\check{\psi}^+_s(x)\right)\times \times\check{\psi}_s(x) - \frac{e}{mc}\,\check{\psi}^+_s(x)\check{A}^\nu(x)\check{\psi}_s(x)\right] + j^\nu_{cl}(x),$$

$$\left[\check{A}^\nu(x), \frac{\partial}{\partial t'}\,\check{A}^{\nu'}(x')\right] = i\hbar c^2\delta_{\nu\nu'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \text{при} \quad t = t', \tag{3}$$

причем $j^\nu_{cl}(x)$ — плотность классического тока, если он присутствует в системе.

Разбиваем электромагнитное поле на потенциальную и соленоидальную (продольную и поперечную) компоненты:

$$\check{A}(x) = \check{A}^l(x) + \check{A}^{tr}(x).$$

Будем считать, что электромагнитное продольное поле в плазме генерируется нулевыми ленгмюровскими колебаниями, в то время как поперечное поле генерируется лишь плотностью классического тока, такой что $\operatorname{div}\mathbf{j}_{cl}(x) = 0$. Интенсивность поперечного поля убывает вместе с уменьшением $j^\nu_{cl}(x)$, и по этому полю строим теорию возмущений. Нас интересует диэлектрическая проницаемость поперечного поля. Влиянием поперечного поля на продольное поле пренебрегаем. Для описания продольного поля введем псевдопотенциал $\check{\Phi}(x)$ согласно определению

$$-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\check{A}^{l\nu}(x)}{\partial t} = -\nabla^\nu\check{\Phi}(x). \tag{4}$$

С учетом того, что

$$\left[\hat{p}^\nu_{\mathbf{r}}, \check{A}^{tr\nu}(x)\right] = 0$$

уравнение Шредингера переписываем в виде

$$i\hbar\frac{\partial\check{\psi}_s(x)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e}{mc}\,\hat{p}^\nu_{\mathbf{r}}\check{A}^{tr\nu}(x) + e\check{\Phi}(x)\right)\check{\psi}_s(x).$$

Мы опустили квадрат векторного потенциала поперечного поля, считая его малой величиной. Произведение операторов $\check{A}^{tr\nu}(x)\check{A}^{l\nu}(x)$ из уравнения выпадает. Теперь

$$\check{j}^\nu(x) = \sum_s\left[\frac{e}{2m}\,\check{\psi}^+_s(x)\hat{p}^\nu_{\mathbf{r}}\check{\psi}_s(x) + \frac{e}{2m}\left(\hat{p}^{\nu^*}_{\mathbf{r}}\,\check{\psi}^+_s(x)\right)\times \times\check{\psi}_s(x) - \frac{e}{mc}\,\check{\psi}^+_s(x)\check{A}^{tr\nu}(x)\check{\psi}_s(x)\right] + j^\nu_{cl}(x). \tag{5}$$

В целях сокращения математических выкладок и исключения расчета поляризационного оператора воспользуемся следующим обстоятельством. Первая итерация уравнений (1) и (2) приводит к стандартным результатам. Именно, оказывается, что в плазме существуют незатухающие ленгмюровские колебания с частотой $\Omega = (e^2n/m)^{1/2}$, если только волновое число k колебаний не превосходит $k_c = \sqrt{2m\Omega/\hbar}$

[14]. Векторный потенциал $A^{\nu l}(x)$ таких колебаний подчиняется уравнению

$$\Box A^{\nu}(x) - \frac{\Omega^2}{c^2} A^{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}} \frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}} A^{\nu_1}(x) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$A^{l\nu}(x) \propto \sum_{\mathbf{k}\lambda} e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda} \left[\alpha_{\mathbf{k}\lambda} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_\lambda t) + \right. \\ \left. + \alpha^*_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega_\lambda t)\right] \theta(k_c - k), \qquad (6)$$

где $e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}$ — единичные орты поляризации ($\lambda = 1, 2$ — поперечной, $\lambda = 3$ — продольной), $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$ — произвольные числа, $\theta(k_c - k)$ — ступенчатая функция Хевисайда,

$$\omega_\lambda(k) = \begin{cases} \sqrt{c^2k^2 + \Omega^2}, & \lambda = 1, 2, \\ \Omega, & \lambda = 3. \end{cases}$$

Выражение (6), описывающее взаимодействие электронов плазмы через кулоновское поле, может быть получено и без учета квантовых свойств поля. Реально на электроны плазмы действуют не только кулоновские силы их взаимодействия, но и электромагнитный фон нулевых ленгмюровских колебаний. Влияние нулевых колебаний поперечных электромагнитных волн на электроны в вакууме хорошо известно [10]. В данном случае речь идет о нулевых колебаниях продольных волн, отсутствующих вне плазмы. Воздействие этих волн на электроны плазмы оказывается макроскопически большим. Это показано в работе [14], где была вычислена диэлектрическая проницаемость продольного электрического поля с учетом воздействия на электроны плазмы электромагнитного фона нулевых колебаний. Было показано, что такое воздействие носит резонансный характер, определяется квантовым параметром $Z \propto e^2\hbar^{-1/2}$, и существенным образом меняет за счет деформации волновых функций электронов продольную диэлектрическую проницаемость плазмы. Поперечная диэлектрическая проницаемость в этой работе не рассматривалась.

В настоящей работе изучается влияние термического электрического продольного поля плазмы на поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы. Для дальнейших расчетов понадобится явное выражение для электромагнитного потенциала плазмы, формируемое ленгмюровскими волнами. Из выражений (2) и (3) следует, что

$$\check{A}^{\nu}(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2kV}}\, e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda} \left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_\lambda t) + \right. \\ \left. + \hat{\alpha}^{\dagger}_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega_\lambda t)\right] \theta(k_c - k).$$

Операторы уничтожения $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и рождения $\hat{\alpha}^{\dagger}_{\mathbf{k}\lambda}$ ленгмюровского кванта в состоянии $(\mathbf{k}, \lambda)$ подчиняются перестановочному соотношению

$$\left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{\alpha}^{\dagger}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$$

Для продольных ленгмюровских волн

$$\check{A}^{l\nu}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2kV}}\, \frac{k^{\nu}}{k} \left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}3} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\Omega t) + \right. \\ \left. + \hat{\alpha}^{\dagger}_{\mathbf{k}3} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\Omega t)\right] \theta(k_c - k).$$

Теперь из выражения (4) находим, что

$$\check{\Phi}^{\nu}(x) = -\sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2k^2V}} \left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}3} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\Omega t) - \right. \\ \left. - \hat{\alpha}^{\dagger}_{\mathbf{k}3} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\Omega t)\right] \theta(k_c - k).$$

Нам понадобится следующая билинейная комбинация

$$\left\langle \check{\Phi}(x)\check{\Phi}(x')\right\rangle_0 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\Omega}{2Vk^2} \times \\ \times \left\{(1 + n_{\mathbf{k}3}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\Omega(t - t')\right] + \right. \\ \left. + n_{\mathbf{k}3} \exp\left[-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\Omega(t - t')\right]\right\} \theta(k_c - k), \quad (7)$$

где

$$n_{\mathbf{k}} = \left\langle \hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}3}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}3}\right\rangle_0 = \frac{1}{e^{\hbar\Omega/T} - 1}.$$

Угловые скобки означают статистическое и квантовое усреднение по термодинамически равновесному полю ленгмюровских квантов.

3. МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

Исследование уравнений (1) и (2) проведем методом функций Грина. Матричные функции Грина электронного поля введем согласно определению [22]

$$G^{ss'}_{ll'}(x, x') = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \hat{T}\check{\psi}_{sl}(x)\check{\psi}^{\dagger}_{s'l'}(x')\right\rangle,$$

где нижний индекс l принимает два значения $l = 1, 2$: $l = 1$ означает временную ось, простирающуюся от $t = -\infty$ до $t = \infty$; $l = 2$ означает другую временную ось, хронологически следующую за первой и простирающуюся от $t = \infty$ до $t = -\infty$; $\hat{T}$ — хронологический оператор, действующий на этих осях. Угловые скобки в определении функции $G^{ss'}_{ll'}(x, x')$ означают усреднение как в квантовом, так и в статистическом смыслах по термодинамическому состоянию системы в целом до включения взаимодействия.

С помощью функции $G_{12}^{ss'}(x,x')$ квантовое среднее оператора $\check{j}^{\nu}(x)$ (5) может быть представлено в виде

$$\left\langle \check{j}^{\nu}(x)\right\rangle = -\sum_s \left(i\hbar \frac{e}{2m}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} G_{12}^{ss}(x,x') + \text{c.c.}\right) + \\ + i\hbar\frac{e^2}{mc}\sum_s G_{12}^{ss}(x,x)\left\langle \check{A}^{tr\nu}(x)\right\rangle + j_{cl}^{\nu}(x), \quad (8) \\ x \to x'.$$

Нам надлежит найти функцию $G_{ll'}(x,x')$ в линейном приближении по $\left\langle \check{A}^{tr\nu}(x)\right\rangle$. Получим для нее уравнения Швингера. Для этой цели введем вспомогательные функции [23]

$$G_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho) = \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{\langle\hat{S}\rangle}\left\langle \hat{T}\check{\psi}_{sl}(x)\check{\psi}_{s'l'}^{\dagger}(x')\hat{S}\right\rangle,$$

$$\hat{S} = \hat{T}\exp\left(\frac{e}{i\hbar}\sum_{l_1}(-1)^{l_1+1}\int\check{\Phi}_{l_1}(x_1)\rho_{l_1}(x_1)\,dx_1\right),$$

где $\rho_l(x)$ — классическая вспомогательная функция, имеющая смысл плотности заряда, генерирующего продольное поле. Операторы электронного поля в этом выражении от $\rho_l(x)$ не зависят. Очевидно, что

$$G_{ll'}^{ss'}(x,x'|0) = G_{ll'}^{ss'}(x,x').$$

Непосредственной проверкой находим уравнение для искомой функции Грина:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho) = (-1)^{l+1}\delta_{ll'}\delta_{ss'}\delta(x,x') + \\ + \frac{\hat{p}^2}{2m}G_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho) + i\hbar(-1)^{l+1}\frac{\delta G_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_l(x)} + \\ + e\left\langle\check{\Phi}_l(x)|\rho\right\rangle G_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho) - \frac{e}{i\hbar mc}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\frac{1}{\langle\hat{S}\rangle}\times \\ \times\left\langle \hat{T}\check{A}_l^{tr\nu}(x)\check{\psi}_{sl}(x)\check{\psi}_{s'l'}^{+}(x')\hat{S}\right\rangle,$$

где

$$\left\langle\check{\Phi}_l(x)|\rho\right\rangle = \frac{1}{\langle\hat{S}\rangle}\left\langle\hat{T}\check{\Phi}_l(x)\hat{S}\right\rangle.$$

Если предварительно найти решение уравнения

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho) = (-1)^{l+1}\delta_{ll'}\delta_{ss'}\delta(x,x') + \\ + \frac{\hat{p}_{\mathbf{r}}^2}{2m}G_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho) + i\hbar(-1)^{l+1}\frac{\delta\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_l(x)} + \\ + e\left\langle\check{\Phi}_l(x)|\rho\right\rangle\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho), \quad (9)$$

то в линейном по $\left\langle\check{A}_l^{tr\nu}(x)\right\rangle$ приближении имеем равенство

$$G_{ll'}^{ss'}(x,x') = \tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x') - \frac{e}{mc}\sum_{l_1s_1}\int\tilde{G}_{ll_1}^{ss_1}(x,x_1)\times \\ \times(-1)^{l_1+1}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu_1}\left\langle\check{A}_{l_1}^{tr\nu_1}(x_1)\right\rangle\tilde{G}_{l_1l'}^{s_1s'}(x_1,x')\,dx_1, \quad (10)$$

в котором положено $\rho_l(x)=0$ и

$$\left\langle\hat{T}\check{A}_{l_1}^{tr\nu_1}(x_1)\check{\psi}_{s_1l_1}^{\dagger}(x_1)\check{\psi}_{s'l'}^{\dagger}r(x')\right\rangle \approx \\ \approx i\hbar\left\langle\check{A}_{l_1}^{tr\nu_1}(x_1)\right\rangle\tilde{G}_{l_1l'}^{s_1s'}(x_1,x')\,dx_1.$$

Подстановка найденной отсюда $G_{12}(x,x')$ в выражение (8) позволит вычислить ток в плазме и поперечную диэлектрическую проницаемость. Для решения функционального уравнения (9) исключим из него функциональную производную, поварьировав это уравнение еще раз:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_{l_2}(x_2)} = \frac{\hat{p}^2}{2m}\frac{\delta\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_{l_2}(x_2)} + \\ + i\hbar(-1)^{l+1}\frac{\delta^2\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_{l_2}(x_2)\delta\rho_l(x)} + \\ + e\left\langle\hat{T}\check{\Phi}_l(x)|\rho\right\rangle\frac{\delta\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_{l_2}(x_2)} + \\ + \frac{e^2}{i\hbar}(-1)^{l_2+1}\left[\left\langle\hat{T}\check{\Phi}_l(x)\check{\Phi}_{l_2}(x_2)|\rho\right\rangle - \\ - \left\langle\hat{T}\check{\Phi}_l(x)|\rho\right\rangle\left\langle\hat{T}\check{\Phi}_{l_2}(x_2)|\rho\right\rangle\right]\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho).$$

Решаем это уравнение посредством функции Грина $\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x')$:

$$\frac{\delta\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x'|\rho)}{\delta\rho_{l_2}(x_2)} = \frac{e^2}{i\hbar}(-1)^{l_2+1}\sum_{l_1s_1}(-1)^{l_1+1}\times \\ \times\int\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x_1|\rho)\left[\left\langle\check{\Phi}_{l_1}(x_1)\check{\Phi}_{l_2}(x_2)|\rho\right\rangle - \\ - \left\langle\check{\Phi}_{l_1}(x_1)|\rho\right\rangle\left\langle\check{\Phi}_{l_2}(x_2)|\rho\right\rangle\right]\tilde{G}_{l_1l'}(x_1,x')\,dx_1. \quad (11)$$

Эта формула была бы точной, если бы уравнение (9) было уравнением в обычных, а не в функциональных производных. Мы ограничимся приближением (11), носящим название однопетлевого приближения. Точность такого приближения значительно превосходит точность приближения Хартри – Фока. Выход за рамки однопетлевого приближения представляет громоздкую задачу, и оправдан лишь в том случае, если выполненные в однопетлевом приближении расчеты демонстрируют несостоятельность. Подстановка выражения (11) в уравнение (9) позволяет придать последнему интегральный вид:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x') = \\ = (-1)^{l+1}\delta_{ll'}\delta_{ss'}\delta(x,x') + \frac{\hat{p}_{\mathbf{r}}^2}{2m}\tilde{G}_{ll'}^{ss'}(x,x') + \\ + \sum_{l_1s_1}\int M_{ll_1}^{ss_1}(x,x_1)\tilde{G}_{l_1l'}^{s_1s'}(x_1,x')\,dx_1. \quad (12)$$

Здесь мы положили $\rho_l(x) = 0$ и как следствие $\left\langle \hat{T}\check{\Phi}_l(x)\right\rangle = 0$. Матрица $M_{ll'}^{ss'}(x,x')$ носит название массового оператора:

$$M_{ll_1}^{ss_1}(x,x_1) = e^2\tilde{G}_{ll_1}^{ss_1}(x,x_1)(-1)^{l_1+1}\left\langle \hat{T}\check{\Phi}_{l_1}(x_1)\check{\Phi}_l(x)\right\rangle.$$

Матричному уравнению (12) посредством введения линейных комбинаций [22]

$$\begin{aligned} \tilde{G}_r &= \tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{12} = -\tilde{G}_{22} + \tilde{G}_{21}, \\ \tilde{G}_a &= \tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{21} = -\tilde{G}_{22} + \tilde{G}_{12}, \\ M_r &= M_{11} + M_{12} = M_{22} + M_{21}, \\ M_a &= M_{11} - M_{21} = M_{22} - M_{12} \end{aligned} \tag{13}$$

таких, что

$$M_r^+ = M_a, \quad \tilde{G}_r^+ = \tilde{G}_a,$$

можно придать канонический вид

$$\tilde{G}_r = \overset{0}{\tilde{G}_r} + \overset{0}{\tilde{G}_r} M_r\tilde{G}_r, \quad \tilde{G}_a = \overset{0}{\tilde{G}_a} + \overset{0}{\tilde{G}_a} M_a\tilde{G}_a, \tag{14}$$

где $\overset{0}{\tilde{G}}_{ll'}$ — решения уравнения (12) при $M_{ll'} = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12} = \overset{0}{\tilde{G}}_{12} + \overset{0}{\tilde{G}_r} M_r\tilde{G}_{12} + \\ + \overset{0}{\tilde{G}}_{12} M_a\tilde{G}_a - \overset{0}{\tilde{G}_r} M_{12}\tilde{G}_a, \end{aligned} \tag{15}$$

откуда следует [24]

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12} &= \tilde{G}_{12}^{(c)} + \tilde{G}_{12}^{(n)}, \\ \tilde{G}_{12}^{(c)} &= \left(1 - \tilde{G}_r M_r\right) \overset{0}{G}_{12} \left(1 + M_a\tilde{G}_a\right), \\ G_{12}^{(n)} &= -G_r M_{12} G_a, \end{aligned} \tag{16}$$

причем

$$\tilde{G}_r - \tilde{G}_a = \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{12}.$$

Мы не будем полностью решать эту систему уравнений. Полагая, что плазма находится в состоянии термодинамического равновесия, рассчитаем, согласно уравнению (14), запаздывающую $\tilde{G}_r$ и опережающую $\tilde{G}_a$ функции Грина. Для определения $\tilde{G}_{12}(x,x')$ воспользуемся флуктуационно-диссипативной теоремой [25, 26]

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12}^{ss'}(x,x') = -\frac{\delta_{ss'}}{V}\sum_{\mathbf{p}}\int\left[1+\exp\left(-\frac{E-\mu}{T}\right)\right]^{-1} \times \\ \times \exp\left[i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{i}{\hbar}E(t-t')\right] \times \\ \times\left[\tilde{G}_r^{ss'}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right) - \tilde{G}_a^{ss'}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\right]\frac{dE}{2\pi h}. \end{aligned} \tag{17}$$

Использование для определения функции $\tilde{G}_{12}(x,x')$ флуктуационно-диссипативной теоремы вместо кинетического уравнения (16) значительно упрощает расчеты.

4. МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР

Определяющий функцию $G_r^{ss'}(x,x')$ массовый оператор, согласно (13), имеет вид

$$\begin{aligned} M_r^{ss'}(x,x') = M_{11}^{ss'}(x,x') + M_{12}^{ss'}(x,x') = \\ = e^2G_{11}^{ss'}(x,x')\left\langle \hat{T}\check{\Phi}_1(x')\check{\Phi}_1(x)\right\rangle - \\ - e^2G_{12}^{ss'}(x,x')\left\langle \hat{T}\check{\Phi}_2(x')\check{\Phi}_1(x)\right\rangle. \end{aligned}$$

Для содержащихся здесь функций Грина используем нулевое приближение, учитывая, что

$$\begin{aligned} \overset{0}{G}{}_{12}^{ss'}(x,x') = -\frac{1}{i\hbar V} \times \\ \times \sum_{\mathbf{p}\sigma}\exp\left[i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\frac{\varepsilon(p)}{\hbar}(t-t')\right] \times \\ \times n_{\mathbf{p}\sigma}\eta_\sigma(s)\eta_\sigma(s'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{0}{G}{}_{21}^{ss'}(x,x') = \frac{1}{i\hbar V} \times \\ \times \sum_{\mathbf{p}\sigma}\exp\left[i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\frac{\varepsilon(p)}{\hbar}(t-t')\right] \times \\ \times (1-n_{\mathbf{p}\sigma})\eta_\sigma(s)\eta_\sigma(s'), \quad n_{\mathbf{p}\sigma} = \left\langle \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}^+\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}\right\rangle. \end{aligned}$$

Теперь с помощью (7) находим

$$\begin{aligned} M_r^{ss'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') = \theta(t-t')\frac{e^2}{i\hbar V} \times \\ \times \sum_{\mathbf{pk}\sigma}\frac{\hbar\Omega}{2k^2V}\eta_\sigma(s)\eta_\sigma(s') \times \\ \times \exp\left[i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\frac{\varepsilon(p)}{\hbar}(t-t') + \right. \\ \left. + i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\Omega(t-t')\right] + \theta(t-t')\frac{e^2}{\hbar V}\sum_{\mathbf{pk}\sigma}\frac{\hbar\Omega}{k^2V}n_{\mathbf{p}\sigma} \times \\ \times \exp\left[i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\frac{\varepsilon(p)}{\hbar}(t-t') + i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right] \times \\ \times \eta_\sigma(s)\eta_\sigma(s')\sin\Omega(t-t'). \end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в нуль при $t = t'$ и не возникает в методе, использующем разрыв корреляторов [14]. По этой причине мы его опускаем как превышающее точность расчетов.

Легко находится образ преобразования Фурье массового оператора в полюсном приближении [14]:

$$M_r^{ss'}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)=\int\exp\left[-i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+i\frac{E}{\hbar}(t-t')\right]\times$$
$$\times M_r^{ss'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,d(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,d(t-t')=$$
$$=\delta_{ss'}\frac{Z\hbar^2\Omega^2}{E-\varepsilon(p)-4\hbar\Omega/3+i0},$$
$$Z=\frac{1}{2\pi^2}\frac{e^2}{\hbar v_F}\sqrt{\frac{\varepsilon_F}{\hbar\Omega}}\propto\frac{1}{\sqrt{\hbar}}\,.$$

Запаздывающая функция Грина, согласно уравнению (14), оказывается равной

$$G_r^{ss'}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)=\delta_{ss'}\left[E-\frac{p^2}{2m}-M_r^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\right]^{-1}=$$
$$=\delta_{ss'}\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i(Z)}{E-E^{(i)}(p)+i0},\quad(18)$$

где

$$a_1(Z)=\left(\sqrt{\frac{4}{9}+Z}-\frac{2}{3}\right)\Big/2\sqrt{\frac{4}{9}+Z},$$
$$a_2(Z)=\left(\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{2}{3}\right)\Big/2\sqrt{\frac{4}{9}+Z},$$
$$E^{(1)}(p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{2}{3}\hbar\Omega+\hbar\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z},$$
$$E^{(2)}(p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{2}{3}\hbar\Omega-\hbar\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}.$$

В отсутствие влияния фона нулевых колебаний на электроны плазмы, т. е. при $Z=0$ и $M_r^{ss'}=0$, имеем

$$\overset{0}{G}{}_r^{ss'}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)=\frac{\delta_{ss'}}{E-p^2/2m+i0}.$$

Мы возвращаемся к свободным электронам и к известным формулам теории холодной плазмы. Таким образом, учет массового оператора через параметр $Z\propto\hbar^{-1/2}$ влечет за собой квантовые поправки к стандартной теории холодной плазмы, неаналитические по $\hbar$ и не допускающие предельного перехода $\hbar\to0$.

Влияние фона нулевых колебаний приводит к расщеплению спектра электронов. Между энергетическими компонентами $E^{(1)}(p)$ и $E^{(2)}(p)$ появляются переходы с характерной квантовой частотой

$$\tilde{\omega}=2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}.$$

Поскольку $Z\propto\hbar^{-1/2}$, эта формула не допускает предельного перехода при $\hbar\to0$, что исключает существование плазмы в отсутствие фона нулевых колебаний ленгмюровских волн.

5. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Из выражения (10) находим функцию $G_{12}^{ss'}(x,x')$. По аналогии с формулой (15) формула (10) дает

$$G_{12}^{ss}(x,x')=\tilde{G}_{12}^{ss}(x,x')-$$
$$-\frac{e}{mc}\int\tilde{G}_r^{ss}(x,x_1)\hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}_1}\left\langle\check{A}^{tr\nu}(x_1)\right\rangle\tilde{G}_{12}^{ss}(x_1,x')\,dx_1-$$
$$-\frac{e}{mc}\int\tilde{G}_{12}^{ss}(x,x_1)\hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}_1}\left\langle\check{A}^{tr\nu}(x_1)\right\rangle\tilde{G}_a^{ss}(x_1,x')\,dx_1.$$

Теперь из формулы (8) следует, что

$$\left\langle\check{j}^{\nu}(x)\right\rangle=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\int\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)\Xi_r^{\nu\nu_1}(\mathbf{k},\omega)\times$$
$$\times\left\langle\check{A}^{tr\nu_1}(\mathbf{k},\omega)\right\rangle\frac{d\omega}{2\pi}+\text{H.c.}+$$
$$+i\hbar\frac{e^2}{mc}\sum_s\tilde{G}_{12}^{ss}(x;x)\left\langle\check{A}^{tr\nu}(x)\right\rangle+j_{cl}^{\nu}(x),\quad(19)$$

где использовано обозначение

$$\Xi_r^{\nu\nu_1}(\mathbf{k},\omega)=\frac{i\hbar e^2}{2m^2cV}\sum_{\mathbf{p}s}\int\tilde{G}_r^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}+\mathbf{k},\frac{E}{\hbar}+\omega\right)\times$$
$$\times(p^{\nu}+\hbar k^{\nu})p^{\nu_1}\tilde{G}_{12}^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}+$$
$$+\frac{i\hbar e^2}{2m^2cV}\sum_{\mathbf{p}s}\int\tilde{G}_{12}^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}+\mathbf{k},\frac{E}{\hbar}+\omega\right)\times$$
$$\times(p^{\nu}+\hbar k^{\nu})p^{\nu_1}\tilde{G}_a^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}.$$

Операция эрмитова сопряжения подразумевает одновременную замену $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$ и $\omega\to-\omega$. Поскольку нас интересует поперечная компонента тока, выделим из $\Xi_r^{\nu\nu_1}(\mathbf{k},\omega)$ поперечную компоненту:

$$2\Xi_r^{tr}(\mathbf{k},\omega)=\left(\delta_{\nu\nu_1}-\frac{k^{\nu}k^{\nu_1}}{k^2}\right)\Xi_r^{\nu_1\nu}(\mathbf{k},\omega)\propto$$
$$\propto\left(\delta_{\nu\nu_1}-\frac{k^{\nu}k^{\nu_1}}{k^2}\right)p^{\nu}(p^{\nu_1}+\hbar k^{\nu_1})=\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{k^2}.$$

Теперь

$$\Xi_r^{tr}(k,\omega)=\frac{i\hbar e^2}{4m^2cV}\sum_{\mathbf{p}s}\int\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{k^2}\times$$
$$\times\left[\tilde{G}_r^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}+\mathbf{k},\frac{E}{\hbar}+\omega\right)\tilde{G}_{12}^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)+\right.$$
$$\left.+\tilde{G}_{12}^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}+\mathbf{k},\frac{E}{\hbar}+\omega\right)\tilde{G}_a^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\right]\frac{dE}{2\pi\hbar}.$$

Подстановка выражения (19) в (2) дает

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left\langle \check{A}^{tr\nu}(\mathbf{k},\omega)\right\rangle = \\ = -\frac{1}{c}\left(\Xi_r^{tr}(k;\omega)\left\langle \check{A}^{tr\nu}(\mathbf{k},\omega)\right\rangle + \text{H.c.}\right) - \\ - \frac{i\hbar e^2}{mc^2}\sum_s \tilde{G}_{12}^{ss}(x;x)\left\langle \check{A}^{tr\nu}(\mathbf{k},\omega)\right\rangle - j_{cl}^{tr\nu}(\mathbf{k},\omega).$$

Сопоставление этого уравнения со стандартным уравнением

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)\right)\left\langle \check{A}^{tr\nu}(\mathbf{k},\omega)\right\rangle = -\frac{1}{c}\,j_{cl}^{tr\nu}(\mathbf{k},\omega),$$

определяющим поперечную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$, показывает, что

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{e^2n}{m\omega^2}+\left(\frac{c}{\omega^2}\,\Xi_r^{tr}(k,\omega)+\text{H.c.}\right).$$

В развернутом виде с учетом формул (17) и (18) выражение для поперечной диэлектрической проницаемости плазмы выглядит следующим образом:

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{e^2n}{m\omega^2}-\left\{\frac{e^2}{4m^2\omega^2V}\times \right. \\ \times \sum_{\mathbf{p}si}\frac{a_i(Z)}{\exp\left(\dfrac{E^{(i)}(p)-\mu}{T}\right)+1}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{k^2}\times \\ \times\left[\tilde{G}_r^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}+\mathbf{k},\frac{E^{(i)}(p)}{\hbar}+\omega\right)+\right. \\ \left.\left. +\ \tilde{G}_a^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}-\mathbf{k},\frac{E^{(i)}(p)}{\hbar}-\omega\right)\right]+\text{H.c.}\right\}. \quad (20)$$

При высоких температурах возникает максвелловская плазма, и при $Z=0$ имеем

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{e^2}{m^3\omega^2}\int\exp\left(-\frac{\varepsilon(p)-\mu}{T}\right)\times \\ \times\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{\left(\omega-i0-\dfrac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m}\right)^2}\,\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}-\frac{e^2n}{m\omega^2}.$$

Выберем направление оси z вдоль вектора $\mathbf{k}$, выполним интегрирование по p_z по частям и воспользуемся тем, что $[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2 = k^2(p_x^2+p_y^2)$. В результате для максвелловской плазмы возникает известный результат [20]

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{2e^2}{m^2Tk^2\omega}\int\exp\left(-\frac{\varepsilon(p)-\mu}{T}\right)\times \\ \times\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{\omega-\dfrac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m}-i0}\,\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3},\quad \mu=-T\ln\frac{1}{n}\left(\frac{mT}{4\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

В частном случае для нулевой температуры, $T\to 0$, с учетом выполнения неравенства $4\hbar\Omega/3 > \varepsilon_F(0)$ и соотношений [14]

$$\left[\exp\left(\frac{E^{(1)}(p)-\mu}{T}\right)+1\right]^{-1}\to 0, \\ \left[\exp\left(\frac{E^{(2)}(p)-\mu}{T}\right)+1\right]^{-1}\to\theta\left(p_F(Z)-p\right), \\ \varepsilon_F(Z) = E^{(1)}\left(p_F(Z)\right), \\ p_F^3(Z) = \frac{3n\pi^2\hbar^3}{a_2(Z)} = \frac{p_F^3(0)}{a_2(Z)}, \\ \mu = \frac{p_F^2(Z)}{2m}+\frac{2}{3}\,\hbar\Omega-\hbar\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}$$

выражение (20) упрощается:

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{e^2n}{m\omega^2}-\left\{\frac{e^2}{4m^2\omega^2V}\times\right. \\ \times\sum_{\mathbf{p}s}a_2(Z)\theta\left(p_F(Z)-p\right)\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{k^2}\times \\ \times\left[G_r^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}+\mathbf{k},\frac{E^{(2)}(p)}{\hbar}+\omega\right)+\right. \\ \left.\left. +\ G_a^{ss}\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}-\mathbf{k},\frac{E^{(2)}(p)}{\hbar}-\omega\right)\right]+\text{H.c.}\right\},$$

или

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{e^2n}{m\omega^2}-\frac{e^2}{m^2\omega^2V}\times \\ \times\sum_{\mathbf{p}}\theta\left(p_F(Z)-p\right)\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}]^2}{k^2}\times \\ \times\left\{\frac{a_2^2(Z)k^2/m}{\left(\omega+i0-\dfrac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m}\right)^2-\left(\dfrac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}+\right. \\ +\frac{1}{\hbar}\,a_1(Z)a_2(Z)2\left(2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{\hbar k^2}{m}\right)\times \\ \times\left[\left(\omega+i0-\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m}\right)^2-\right. \\ \left.\left.-\left(2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2\right]^{-1}\right\}. \quad (21)$$

Из (21) при $T = 0$ находим мнимую часть диэлектрической проницаемости:

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega) = \frac{1}{16\pi}\,\frac{e^2}{mk\omega^2\hbar^4}\Biggl\{a_1(Z)a_2(Z)\times \\ \times\left[p_F^2(Z)-\left(\frac{m}{k}\,\omega-\frac{m}{k}\left(2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{\hbar k^2}{2m}\right)\right)^2\right]^2 - \\ - a_1(Z)a_2(Z)\Biggl[p_F^2(Z) - \\ -\left(\frac{m}{k}\,\omega+\frac{m}{k}\left(2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{\hbar k^2}{2m}\right)\right)^2\Biggr]^2 + \\ + a_2^2(Z)\left[p_F^2(Z)-\frac{m}{k}\left(\omega-\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2\right]^2 - \\ - a_2^2(Z)\left[p_F^2(Z)-\frac{m}{k}\left(\omega+\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2\right]^2\Biggr\}. \qquad (22)$$

Формула (22) справедлива, только если выполняются два неравенства,

$$\left|\omega\pm\left(2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{\hbar k^2}{2m}\right)\right| \ll \frac{kp_F(Z)}{m}, \\ \left|\omega\pm\frac{\hbar k^2}{2m}\right| \ll \frac{kp_F(Z)}{m}, \qquad (23)$$

что определяет границы существования $\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)$. В противном случае величины (22) должны быть заменены нулями. Из формулы (23) следует, что учет вакуумных флуктуаций ленгмюровских волн открывает область поглощения поперечных электромагнитных волн в плазме в районе частоты $\omega \sim \sim 2\Omega\sqrt{4/9+Z} = \tilde{\omega}$.

Пусть теперь выполняются неравенства, обратные неравенствам (23). Из (21) в области незатухающих колебаний при $T = 0$ следует вещественная часть диэлектрической проницаемости:

$$\operatorname{Re}\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1-\frac{e^2}{m^2\omega^2}\,\frac{p_F^2(Z)}{5}\,n\times \\ \times\left[\frac{1}{\hbar}\,\frac{2a_1(Z)a_2(Z)\left(2\Omega\sqrt{4/9+Z}+\hbar k^2/m\right)}{\omega^2-\left(2\Omega\sqrt{4/9+Z}+\hbar k^2/2m\right)^2} + \\ + \frac{a_2^2(Z)\hbar^2k^2/m}{(\hbar\omega)^2-(\hbar^2k^2/2m)^2}\right] - \frac{e^2 n}{m\omega^2}.$$

Дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2}{c^2}\operatorname{Re}\varepsilon^{tr}(k,\omega)-k^2 = 0$$

в общем случае определяет при малых k^2 и $a_1(Z)$ два корня:

$$\omega_1^2-\Omega^2-c^2\left(1-\frac{p_F^2(Z)}{5m^2c^2}\right)k^2 = \\ = -\Omega^2\frac{p_F^2(Z)}{m\hbar\Omega}\,a_1(Z)\frac{24}{35}, \\ \omega_2^2 = \left(2\Omega\sqrt{\frac{4}{9}+Z}+\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2 + \\ + \Omega^2\frac{p_F^2(Z)}{m\hbar\Omega}a_1(Z)\frac{24}{35}. \qquad (24)$$

При $Z = 0$ формула (24) совпадает с формулой (VII) основополагающей работы [27]. Зависимость ω_1^2 от постоянной Планка исследовалась в работах [5,6]. Авторы этих работ пришли к выводу о несущественности квантовых поправок к собственной частоте поперечных колебаний нерелятивистской фермиевской плазмы. Такое мнение в линейной теории остается верным [3] в пренебрежении влиянием на плазму вакуумных флуктуаций ленгмюровских волн. Учет влияния вакуумных флуктуаций отражает член в правой части формулы (24), и он оказывается немалым. В металлах $p_F^2(Z)/2m\hbar\Omega \approx 0.5$ и $a_1(Z) \approx 0.1$ [15]. Таким образом, результат учета вакуумных эффектов в физике плазмы аномально велик и составляет проценты от изучаемых величин, в то время как стандартные вакуумные эффекты типа лэмбовского сдвига у атома водорода проявляют себя лишь как тысячные доли процентов основных величин.

Второй корень, ω_2^2, возникает только при учете фона нулевых колебаний. В целом влияние нулевых колебаний ленгмюровских волн влечет за собой расщепление частотного спектра колебаний фермиевской плазмы. При этом, в отличие от продольной диэлектрической проницаемости [14] в поперечной диэлектрической проницаемости оба корня оказываются конечными при $k \to 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В электрон-ионной плазме Ферми–Дирака при конечной температуре существуют незатухающие термические продольные электромагнитные ленгмюровские колебания (плазмоны). С ростом температуры их интенсивность возрастает. При уменьшении температуры до нуля эти колебания исчезают, но остается фон квантовых продольных нулевых колебаний, аналогичный фону квантовых поперечных нулевых колебаний электромагнитных волн в вакууме. Фон поперечных нулевых колебаний в вакууме формирует лэмбовский сдвиг, аномальный магнитный момент электрона и т. д. Аналогично, фон продольных нулевых колебаний ленгмюровских волн оказывает обратное резонансное воздействие на электроны плазмы. Это воздействие деформирует волновые функции электронов плазмы, превращая электроны в «квазиэлектроны». При этом энергетический спектр электронов претерпевает расщепление с характерной квантовой частотой $\tilde{\omega}$. Теперь уже квазиэлектроны описывают термодинамические и оптические свойства плазмы.

В работе [14] было исследовано формирование квазиэлектронами продольной диэлектрической проницаемости ε^l плазмы. Было показано, что сформированная квазиэлектронами продольная диэлектрическая проницаемость ε^l существенно, на макроскопическом уровне, отличается от величины ε^l, сформированной «голыми» электронами.

В настоящей работе исследуется влияние квазиэлектронов на формирование поперечной диэлектрической проницаемости ε^{tr} плазмы. Поперечная диэлектрическая проницаемость легко определяется экспериментально по френелевскому отражению. Показано, что учет вакуумного фона ленгмюровских волн приводит к заметным неаналитическим по $\hbar$ поправкам, количественно составляющим проценты от изучаемых величин. Показано, что под влиянием фона продольных нулевых ленгмюровских колебаний в плазме формируется дополнительная квантовая ветвь поперечных электромагнитных колебаний, определяемая квантовой частотой $\tilde{\omega}$. Спектр поперечных колебаний плазмы расщепляется. В районе частоты $\tilde{\omega}$ в плазме возникает область поглощения поперечных электромагнитных волн, обусловленная квантовыми переходами между энергетическими уровнями квазиэлектронов плазмы, в свою очередь обусловленных фоном продольных нулевых колебаний ленгмюровских волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Шукла, Б. Элиасон, УФН **180**, 55 (2010).

2. С. В. Владимиров, Ю. О. Тышецкий, УФН **181**, 1313 (2011).

3. A. E. Dubinov and A. A. Dubinov, Plasma Phys. Rep. **34**, 403 (2008).

4. D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).

5. D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. **82**, 625 (1951).

6. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 151 (1952).

7. A. E. Dubinov and I. N. Kitaev, Phys. Plasmas **21**, 102 (2014).

8. А. Е. Дубинов, И. Н. Китаев, Физика плазмы **41**, 548 (2015).

9. М. В. Кузелев, ЖЭТФ **137**, 807 (2010).

10. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (1969).

11. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики*, Мир, Москва (1970).

12. Б. А. Векленко, Прикладная физика №4, 5 (2011).

13. B. A. Veklenko, Int. J. Optics, **2012**, Article ID 648741 (2012).

14. Б. А. Векленко, Инженерная физика №1, 14 (2013).

15. Б. А. Векленко, В. П. Афанасьев, А. В. Лубенченко, ЖЭТФ **145**, 601 (2014).

16. L. Tonks and I. Langmuir, Phys. Rev. **33**, 195 (1929).

17. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).

18. А. А. Власов, ЖЭТФ **8**, 291 (1938).

19. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).

20. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Либроком, Москва (2012).

21. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Физматлит, Москва (2007).

22. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).

23. Ш. М. Коган, ФТТ **2**, 1186 (1960).

24. V. P. Budak and B. A. Veklenko, J. Quant. Spectr. Quant. Transfer **112**, 864 (2011).

25. H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).

26. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР **126**, 53 (1959).

27. А. А. Власов, Ученые записки МГУ, вып. 75, кн. 2, ч. 1, МГУ, Москва (1945).